$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2} \\ \vdots \\ x \equiv a_n \pmod{m_n} \end{cases}$$

Teorema Chino del resto: si $m_1, m_2, \dots, m_n$ son coprimos dos a dos entonces el sistema tiene solución y es única módulo $m_1 m_2 \cdots m_n$:

$\Rightarrow$ si x_0 es solución, entonces todas las soluciones son

$$x \equiv x_0 \pmod{m_1 m_2 \cdots m_n}$$

Ejercicio 1

b. $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{14} \\ 2x \equiv 3 \pmod{11} \end{cases}$

$2 \cdot 6 = 12 \Rightarrow 2 \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{inverso de } 2 \\ \text{modulo } 11}}{6} \equiv 1 \pmod{11}$

$2x \equiv 3 \pmod{11} \iff \underbrace{2 \cdot 6}_{\equiv 1 \pmod{11}} x \equiv 3 \cdot 6 \pmod{11}$

$\iff x \equiv 18 \pmod{11}$

$\iff \boxed{x \equiv 7 \pmod{11}}$

Entonces el sistema queda:

$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{14} \\ x \equiv 7 \pmod{11} \end{cases}$ como 14 y 11 son coprimos, el sistema tiene solución y es única módulo $14 \cdot 11 = 154$

$x \equiv 3 \pmod{14} \longrightarrow 14 \mid x - 3 \Rightarrow x - 3 = 14y \Rightarrow x = 14y + 3$

$x \equiv 7 \pmod{11} \longrightarrow x = 11z + 7$

entonces: $14y + 3 = 11z + 7$

$\boxed{14y - 11z = 4}$ ecuación diofántica

vamos a resolver $14y - 11z = 4$

* solución particular:

$$14 = 11 \cdot 1 + 3$$
$$11 = 3 \cdot 3 + 2$$
$$3 = 2 \cdot 1 + 1$$

$$1 = 3 - 2$$
$$1 = 3 - (11 - 3 \cdot 3)$$
$$1 = 4 \cdot 3 - 11$$
$$1 = 4(14 - 11) - 11$$
$$1 = 14 \cdot 4 - 11 \cdot 5$$

$\times 4$ $14 \cdot 4 - 11 \cdot 5 = 1$ igualdad de Bezout

$14 \cdot 16 - 11 \cdot 20 = 4$

solución particular: $\begin{cases} y_0 = 16 \\ z_0 = 20 \end{cases}$

* todas las soluciones:

$$14(16 + 11k) - 11(20 + 14k) = 4$$

$$\begin{cases} y = 16 + 11k & \text{con } k \in \mathbb{Z} \\ z = 20 + 14k & \text{con } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Entonces:

$$x = 14y + 3 = 14(16 + 11k) + 3 = 14 \cdot 16 + 14 \cdot 11k + 3$$
$$= 14 \cdot 16 + 3 + 14 \cdot 11k$$
$$= 227 + 154k$$

$x = 227 + 154k \rightsquigarrow x - 227 = 154k$

$$\boxed{x \equiv 227 \pmod{154}}$$

$$x \equiv 73 \pmod{154}$$

Ejercicio 2.

a. Hallar el menor natural que dividido 3 da resto 1, divido 4 da resto 3 y dividido 7 da resto 5.

buscamos el menor natural x tal que

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 3 \\ x \equiv 3 \pmod 4 \\ x \equiv 5 \pmod 7 \end{cases}$$

3, 4 y 7 son coprimos dos a dos entonces el sistema tiene solución y es única módulo $3 \cdot 4 \cdot 7$

① vamos a resolver

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 3 \\ x \equiv 3 \pmod 4 \end{cases} \iff x \equiv \underset{\substack{\uparrow \\ \text{solución particular}}}{x_0} \pmod{3 \cdot 4}$$

vamos a buscar una solución particular x_0:

$mcd(3,4) = 1 \Rightarrow$ 3 es invertible modulo 4 y 4 es invertible modulo 3

igualdad de Bezout: $3(-1) + 4 \cdot 1 = 1$

módulo 3: $3(-1) + 4 \cdot 1 \equiv 1 \pmod 3$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{inverso de 4} \\ \text{módulo 3}}}{4 \cdot 1} \equiv 1 \pmod 3$$

módulo 4: $3(-1) + 4 \cdot 1 \equiv 1 \pmod 4$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{inverso de 3} \\ \text{modulo 4}}}{3(-1)} \equiv 1 \pmod 4$$

tenemos: $\begin{cases} \boxed{4 \cdot 1 \equiv 1 \pmod 3} \\ \boxed{3(-1) \equiv 1 \pmod 4} \end{cases}$ $\quad \boxed{\begin{matrix} x \equiv 1 \pmod 3 \\ x \equiv 3 \pmod 4 \end{matrix}}$

solución particular $x_0 = 1 \cdot 4 \cdot 1 + 3 \cdot 3(-1)$

$$x_0 \equiv 3 \pmod 4 \Rightarrow \alpha \cdot \underbrace{4 \cdot 1}_{\equiv 0 \pmod 4} + \beta \cdot \overbrace{3(-1)}^{\equiv 1 \pmod 4} \equiv 3 \pmod 4$$

$$\underbrace{\alpha \cdot 4 \cdot 1}_{\equiv 0} + \beta \cdot \underbrace{3(-1)}_{\equiv 1} \equiv \beta \pmod 4$$

tomamos $\beta = 3$

$$x_0 \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow \underbrace{\alpha \cdot \overbrace{4 \cdot 1}^{\equiv 1 \pmod 3}}_{\equiv \alpha \pmod 3} + \underbrace{\beta\, 3(-1)}_{\equiv 0 \pmod 3} \equiv 1 \pmod 3$$

tomamos $\alpha = 1$

Solución particular es: $x_0 = 1 \cdot 4 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \cdot (-1) = -5$

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 3 \\ x \equiv 3 \pmod 4 \end{cases} \iff x \equiv -5 \pmod{12}$$

(2) resolvemos

$$\begin{cases} x \equiv -5 \pmod{12} \\ x \equiv 5 \pmod{7} \end{cases}$$

vamos a buscar una solución particular:

* inverso de 12 módulo 7 e inverso de 7 módulo 12

$$12 = 7 + 5 \qquad\qquad 1 = 5 - 2 \cdot 2$$
$$7 = 5 + 2 \qquad\qquad 1 = 5 - 2(7-5)$$
$$5 = 2 \cdot 2 + 1 \qquad\qquad 1 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7$$
$$1 = 3(12-7) - 2 \cdot 7$$
$$1 = 12 \cdot 3 + 7(-5)$$

igualdad de Bezout: $12 \cdot \underline{3} + 7\underline{(-5)} = 1$

módulo 7: $12 \cdot 3 + 7(-5) \equiv 1 \pmod{7}$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{inverso de 12} \\ \text{módulo 7}}}{12 \cdot 3} \equiv 1 \pmod{7}$$

módulo 12: $12 \cdot 3 + 7(-5) \equiv 1 \pmod{12}$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{inverso de 7} \\ \text{módulo 12}}}{7(-5)} \equiv 1 \pmod{12}$$

tenemos: $\begin{cases} \boxed{12 \cdot 3 \equiv 1 \pmod{7}} \\ \boxed{7(-5) \equiv 1 \pmod{12}} \end{cases}$ $\boxed{\begin{matrix} x \equiv -5 \pmod{12} \\ x \equiv 5 \pmod{7} \end{matrix}}$

* solución particular

$$x_0 = \alpha \cdot 12 \cdot 3 + \beta \cdot 7 \cdot (-5)$$

$$x_0 \equiv -5 \pmod{12} \Rightarrow \alpha \cdot \overbrace{12 \cdot 3}^{\equiv 0 \pmod{12}} + \beta \cdot \overbrace{7(-5)}^{\equiv 1 \pmod{12}} \equiv -5 \pmod{12}$$
$$\Rightarrow \beta \equiv -5 \pmod{12}$$

tomamos $\beta = -5$

$$x_0 \equiv 5 \pmod{7} \Rightarrow \alpha \cdot \overbrace{12 \cdot 3}^{\equiv 1 \pmod{7}} + \beta \cdot \overbrace{7(-5)}^{\equiv 0 \pmod{7}} \equiv 5 \pmod{7}$$
$$\Rightarrow \alpha \equiv 5 \pmod{7}$$

tomamos $\alpha = 5$

entonces $x_0 = 5 \cdot 12 \cdot 3 - 5 \cdot 7 \cdot (-5) = 355$

$$\begin{cases} x \equiv -5 \pmod{12} \\ x \equiv 5 \pmod{7} \end{cases} \iff x \equiv 355 \pmod{12 \cdot 7}$$

$$\boxed{x \equiv 355 \pmod{84}}$$

$$\boxed{x \equiv 19 \pmod{84}}$$

el menor natural que verifica es 19

Ejercicio 4. Investigar si los siguientes sistemas tienen solución, y en caso de que así sea, hallarlas todas (observar que cuando existen soluciones, son únicas módulo el m.c.m. de los módulos de cada ecuación).

a. $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{7} \\ x \equiv 6 \pmod{21} \\ x \equiv 11 \pmod{15} \end{cases}$ **b**. $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{4} \\ x \equiv 6 \pmod{15} \\ x \equiv 7 \pmod{18} \end{cases}$ **c**. $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{4} \\ x \equiv 6 \pmod{15} \\ x \equiv 15 \pmod{18} \end{cases}$

a) $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{7} \\ x \equiv 6 \pmod{21} \\ x \equiv 11 \pmod{15} \end{cases}$

$x \equiv 6 \pmod{21}$

$21 = 7 \cdot 3$

$x \equiv 6 \pmod{21} \Rightarrow x - 6 = 21q$ para algún $q \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x - 6 = 7(3q)$

$\Rightarrow 7 \mid x - 6$

$\Rightarrow x \equiv 6 \pmod{7}$

$x \equiv 6 \pmod{21} \Rightarrow x - 6 = 21q$ para algún $q \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x - 6 = 3(7q)$

$\Rightarrow 3 \mid x - 6$

$\Rightarrow x \equiv 6 \pmod{3}$

$$x \equiv 6 \pmod{21} \Longrightarrow \begin{cases} x \equiv 6 \pmod{7} \\ x \equiv 6 \pmod{3} \end{cases}$$

porque $7 \mid 21$ y $3 \mid 21$

$$\begin{cases} x \equiv 6 \pmod{7} \\ x \equiv 6 \pmod{3} \end{cases} \Longrightarrow x \equiv 6 \pmod{21}$$

TCR porque $\mathrm{mcd}(7,3)$

$$x \equiv 11 \pmod{15} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \equiv 11 \pmod{5} \\ x \equiv 11 \pmod{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{7} \\ x \equiv 6 \pmod{21} \\ x \equiv 11 \pmod{15} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \equiv 1 \pmod{7} \\ x \equiv 6 \pmod{3} \\ x \equiv 6 \pmod{7} \\ x \equiv 11 \pmod{3} \\ x \equiv 11 \pmod{5} \end{cases}$$

incompatibles

incompatibles

no tiene solución