**Ejercicio 6.** Hallar los números naturales $a$ y $b$ que cumplen: $\operatorname{mcd}(a, b) = 18$, $a$ tiene 21 divisores positivos y $b$ tiene 10 divisores positivos.

$a, b$ naturales tales que $\begin{cases} \operatorname{mcd}(a,b) = 18 \\ a \text{ tiene } 21 \text{ divisores positivos} \\ b \text{ tiene } 10 \text{ divisores positivos} \end{cases}$

* que podemos decir de $a$?

$\operatorname{mcd}(a,b) = 18 = 2 \cdot 3^2$

$\operatorname{mcd}(a,b) \mid a$

$\Rightarrow a = 2^{\alpha} 3^{\beta} p_1^{\alpha_1} \cdots p_e^{\alpha_e}$ con $\alpha \geq 1$, $\beta \geq 2$, $\alpha_i \geq 0$

a tiene 21 divisores positivos:

$\Rightarrow \underset{7 \cdot 3}{\overset{\shortparallel}{21}} = (\alpha+1)(\beta+1)(\alpha_1+1) \cdots (\alpha_e+1)$

tenemos dos posibilidades:

① $\alpha+1 = 7$, $\beta+1 = 3$, $\alpha_i+1 = 1$

$\rightarrow \alpha = 6$, $\beta = 2$, $\alpha_i = 0$ $\longrightarrow$ $a = 2^6 \cdot 3^2$

② $\alpha+1 = 3$, $\beta+1 = 7$, $\alpha_i+1 = 1$

$\rightarrow \alpha = 2$, $\beta = 6$, $\alpha_i = 0$ $\longrightarrow$ $a = 2^2 \cdot 3^6$

* que podemos decir de $b$?

$\operatorname{mcd}(a,b) = 18 = 2 \cdot 3^2$

$\Rightarrow 18 \mid b$

$b = 2^{\gamma} 3^{\delta} q_1^{\beta_1} \cdots q_r^{\beta_r}$ con $\gamma \geq 1$, $\underline{\delta \geq 2}$, $\beta_i \geq 0$ $\quad q_i \neq 2$, $q_i \neq 3$

b tiene 10 divisores positivos:

$\underset{2 \cdot 5}{\overset{\shortparallel}{10}} = (\gamma+1)(\delta+1)(\beta_1+1) \cdots (\beta_r+1)$

tenemos dos posibilidades:

① $\gamma+1=2$, $\delta+1=5$, $\beta_i+1=1$

$\to \gamma=1$, $\delta=4$, $\beta_i=0$ $\longrightarrow$ $b=2\cdot 3^4$

② $\gamma+1=5$, $\delta+1=2$. $\beta_i+1=1$

$\to \delta=1$ X porque $\delta\geq 2$

en conclusión:

$$\mathrm{mcd}(a,b)=18$$

$\boxed{b=2\cdot 3^4}$

$\boxed{a=2^6\cdot 3^2}$ $\quad \mathrm{mcd}(2^6\cdot 3^2, 2\cdot 3^4)=2\cdot 3^2$ ✓

$a=2^2\cdot 3^6$ $\quad \mathrm{mcd}(2^2\cdot 3^6, 2\cdot 3^4)=2\cdot 3^4$ X

**Ejercicio 9.** Demostrar que $\sqrt{pq}$ y $\log_{30}(pq)$ son irracionales para cualquier par de primos distintos $p$, $q$.

* Sean $p,q$ primos distintos
  queremos ver que $\sqrt{pq}$ es irracional

Supongamos por absurdo que $\sqrt{pq}$ es racional

$$\sqrt{pq}=\frac{m}{n} \quad \text{con } m,n\in\mathbb{Z} \quad \text{y } \mathrm{mcd}(m,n)=1$$

$$\Rightarrow \sqrt{pq}=\frac{m}{n}$$

$$pq=\frac{m^2}{n^2}$$

$$\boxed{n^2pq=m^2}$$

$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_e^{\alpha_e} \longrightarrow n^2=p_1^{2\alpha_1}p_2^{2\alpha_2}\cdots p_e^{2\alpha_e}$

$m=q_1^{\beta_1}q_2^{\beta_2}\cdots q_r^{\beta_r} \longrightarrow m^2=q_1^{2\beta_1}q_2^{2\beta_2}\cdots q_r^{2\beta_r}$

$n^2pq=m^2$ $\quad$ p y q primos distintos

$$\underbrace{p_1^{2\alpha_1}p_2^{2\alpha_2}\cdots p_e^{2\alpha_e}\,p^1 q}_{\text{el exponente de } p \text{ es impar}}=\underbrace{q_1^{2\beta_1}q_2^{2\beta_2}\cdots q_r^{2\beta_r}}_{\text{todos los exponentes son pares}}$$

imposible

Otra forma:

Suponemos que $\sqrt{pq} = \frac{m}{n}$, con $mcd(m,n) = 1$

$\sqrt{pq} = \frac{m}{n} \Rightarrow pq = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow n^2 pq = m^2$

entonces tenemos $p \mid m^2$ y por lo tanto $p \mid m$ porque $p$ es primo

para llegar a un absurdo vamos a ver que $p \mid n$:

$p \mid m \Rightarrow m = pq_1$ para algún $q_1 \in \mathbb{Z}$

$n^2 pq = m^2 = (pq_1)^2 = p^2 q_1^2$

$\Rightarrow n^2 pq = p^2 q_1^2$

$\Rightarrow n^2 q = p q_1^2 \rightsquigarrow n^2 = \frac{p q_1^2}{q} = p\left(\frac{q_1^2}{q}\right) \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow p \mid n^2 q$

$\Rightarrow p \mid n^2$ porque $mcd(p,q) = 1$

$\Rightarrow p \mid n$ porque $p$ es primo

entonces tenemos $p$ primo tal que $p \mid m$ y $p \mid n$

esto es absurdo porque $m$ y $n$ son coprimos

**Ejercicio 10.**

**a**. Probar que un número de la forma: $99\ldots99$, con una cantidad par de 9s, no puede ser cuadrado perfecto. Sugerencia: usar que $n^2+1$ no es cuadrado perfecto para ningún $n \in \mathbb{N}$.

**b**. Probar que $11\ldots11$, con una cantidad par de 1s, no puede ser cuadrado perfecto.

$m = \underbrace{99\ldots99}_{\text{cantidad par de 9s}}$

queremos ver que $m$ no es un cuadrado perfecto afirmación: $n^2+1$ no es un cuadrado perfecto

$$n^2 < n^2+1 < n^2+2n+1 = (n+1)^2$$

el cuadrado perfecto que sigue a $n^2$ es $(n+1)^2$

$(n+1)^2 = n^2+2n+1$

$$\underbrace{n^2 < n^2+1 < (n+1)^2}$$

en este intervalo no hay ningún cuadrado perfecto

$\Rightarrow n^2+1$ no es un cuadrado perfecto

---

$\underbrace{9999}_{2\cdot 2} + 1 = 10000 = 10^4$

$m = \underbrace{99\ldots99}_{2c \text{ nueves}}$ $c \in \mathbb{N}$

queremos ver que $m$ no es un cuadrado perfecto

$99..99+1 = 10^{2c}$ cuadrado perfecto

supongamos por absurdo que $99..99$ es un cuadrado perfecto

entonces $\underbrace{99..99}_{\text{cuadrado perfecto}}+1$ no es un cuadrado perfecto

y esto es absurdo porque $99..99+1 = 10^{2c} = (10^c)^2$ es un cuadrado perfecto

supongamos que existe $n$ (natural) tal que $n^2 = 99..99$

$\Rightarrow n^2+1$ no es un cuadrado perfecto

pero $n^2+1 = \underbrace{99..99}_{2c \text{ nueves}}+1 = 100..00 = 10^{2c} = (10^c)^2$ absurdo!

b) queremos probar que $11\ldots11$ no es un cuadrado perfecto

Supongamos por absurdo que existe $n \in \mathbb{N}$ tq $n^2 = 11\ldots11$

$$11\ldots11 = n^2$$
$$\Rightarrow 9(11\ldots11) = 9n^2$$
$$\Rightarrow 99\ldots99 = 3^2 n^2 = (3n)^2$$

y esto es absurdo porque $99\ldots99$ no es un cuadrado perfecto.

**Ejercicio 5.** Hallar los números naturales $n \leq 1000$ que tienen exactamente 3 divisores positivos distintos.

buscamos $n \leq 1000$ natural que tiene exactamente tres divisores positivos

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_e^{\alpha_e} \qquad \alpha_i \geq 0$$

$\#$ divisores positivos de $n$ : $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_e+1)$

$$\Rightarrow 3 = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_e+1)$$

la unica posibilidad es : $\begin{cases} \alpha_1 + 1 = 3 & \rightsquigarrow \alpha_1 = 2 \\ \alpha_i + 1 = 1 \text{ si } i \geq 2 & \rightsquigarrow \alpha_i = 0 \end{cases}$

entonces la descomposición en primos de $n$ es

$$n = p_1^2 \qquad \rightsquigarrow \text{los tres divisores de } n: 1, p_1, p_1^2$$

$$n \in \{2^2, 3^2, 5^2, 7^2, 11^2, 13^2, 17^2, 19^2, 23^2, 29^2, 31^2\}$$