Facultad de Ingeniería
IMERL
PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA
Curso 2024
Práctico 1

Problemas de conteo

1. En cierta ciudad las matrículas de los autos se forman con 2 vocales diferentes seguidas de 5 dígitos todos diferentes. Calcular la cantidad de matrículas que pueden hacerse y calcular cuántas de ellas comienzan con A y terminan con 89.

2. De un grupo formado por 3 ingenieros, 5 economistas y 4 arquitectos deben seleccionarse 4 para formar una comisión.

   (a) Calcular cuántas comisiones diferentes podrían formarse.

   (b) Calcular cuántas de esas comisiones estarían integradas por un ingeniero, dos economistas y un arquitecto.

   (c) Calcular en cuántas configuraciones hay por lo menos dos arquitectos.

3. En una fábrica los productos se codifican con 3 letras distintas que indican 3 operaciones que sufren cada uno de los productos y 3 cifras distintas y en ese orden: primero las letras y después los números. Las letras utilizadas son A, B, C y D.

   (a) ¿Cuántos productos pueden codificarse?

   (b) ¿Cuántos códigos empiezan con A y terminan con 9?

   (c) ¿En cuántos los números 0 y 2 aparecen juntos y en ese orden?

   (d) ¿En cuántos los números 0 y 2 aparecen juntos?

   (e) ¿En cuántos productos aparecen dos números pares juntos y el otro es impar?

4. Una caja fuerte se abre mediante una cierta clave de 5 dígitos (pueden ser repetidos). Ud. es lo suficientemente audaz como para intentar abrirla, y lo hace probando números al azar. ¿Cuántas claves posibles hay? ¿Cuántas claves posibles hay si se usan sólo los dígitos de 1 a 6 en vez de usar los 10?

5. Se juega a un juego del tipo 5 de Oro: hay que acertar 5 números, elegidos dentro de 36 posibilidades.

   (a) ¿Cuántas jugadas posibles hay?

(b) Si se eligen 5 números a priori, ¿cuántas jugadas posibles hay que contengan exactamente uno de los números elegidos?

(c) Si se eligen 5 números a priori, ¿cuántas jugadas posibles hay que contengan por lo menos 2 de los números elegidos?

6. * Usted va a la panadería a comprar una docena de bizcochos. En la panadería sólo quedan croissants, margaritas y galletas en cantidades suficientes.

   (a) ¿Cuántas elecciones distintas puede hacer?

   (b) Usted llega a la facultad con α croissants, β margaritas y γ galletas ($\alpha + \beta + \gamma = 12$) y los reparte entre usted y 11 amigos. ¿de duántas formas los puede repartir? (Calcular en función de α, β y γ). ¿Cuánto deben valer α, β y γ para que dicha cantidad sea máxima? (Sugerencia: ver como varía dicha cantidad al variar en una unidad alguno de los parámetros)

Propiedades de la Probabilidad

7. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espacio de probabilidad. Sean A, B y C sucesos. Expresar mediante operaciones con conjuntos los sucesos que corresponden a:

   (a) Ocurren A y B.

   (b) Ocurren los tres sucesos.

   (c) Ocurre A u ocurre B.

   (d) Ocurre por lo menos uno de los tres sucesos.

   (e) Ocurre A u ocurre B pero no los dos simultáneamente.

   (f) No ocurre B.

   (g) No ocurre ni A ni B.

   (h) No ocurre ninguno de los tres sucesos.

   (i) Ocurre A y no ocurre B.

   (j) Ocurre exactamente uno de los tres sucesos.

   (k) Ocurren por lo menos dos de los tres sucesos.

8. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espacio de probabilidad. Demostrar que:

   (a) Si A y B son sucesos tales que $A \subset B$ entonces:

$$\mathbf{P}(B \setminus A) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A)$$

   Sugerencia. Considerar que $B \setminus A = B \cap A^c$ y $B = (B \cap A) \cup (B \cap A^c)$ Deducir que $\mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(B)$.

(b) Si A y B son sucesos entonces $P(A \cup B) \geq \max\{P(A), P(B)\}$ y $P(A \cap B) \leq \min\{P(A), P(B)\}$

9. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espacio de probabilidad. Se consideran dos sucesos A y B tales que $P(A) = 1/3$ y $P(B) = 1/2$. Determinar el valor de $P\left(A^C \cap B\right)$ en los siguientes casos:

   (a) A y B incompatibles (mutuamente excluyentes).

   (b) $A \subset B$.

   (c) $P(A \cap B) = 1/8$.

10. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espacio de probabilidad. Se consideran los sucesos A y B con: $P(A) = 3/8$, $P(B) = 1/2$, $P(A \cap B) = 1/4$. Calcular:

    (a) $P\left(A^C\right)$ y $P\left(B^C\right)$.

    (b) $P(A \cup B)$.

    (c) $P\left(A^C \cap B^C\right)$.

    (d) $P\left(A^C \cap B\right)$ y $P\left(A \cap B^C\right)$.

11. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad. Demostrar que:

    (a) * Si A, B y C son sucesos entonces se cumple que:

    $$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

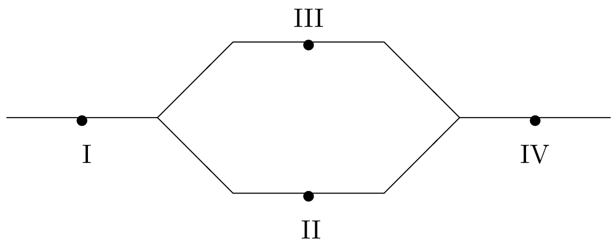
    (b) * Si $A_1, \ldots, A_n$ son sucesos probar que:

    $$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{1 \leq i \leq n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap \ldots \cap A_n)$$

12. Un sistema de canalización de agua tiene 4 compuertas, dispuestas como en la figura. Cada compuerta se abre y cierra al azar, dejando pasar agua (si está abierta) o impidiéndolo. Supongamos las probabilidades siguientes:

    P (I abierta) $= 0.51$
    P (II abierta) $= P$ (IV abierta) $= 0,55$,
    P (III abierta) $= 0,36$.
    P (I cerrada, II abierta) $=$
    P (I cerrada, III abierta) $= 0,2$.
    P (II abierta, IV abierta) $= 0,35$,
    P (III abierta, IV cerrada) $= 0,16$.
    P (II abierta, III abierta) $= 0$
    P (I abierta, IV cerrada) $= 0.12$
    P (I o II o IV abierta) $= 0,81$,
    P (I o III o IV abierta) $= 0,93$.

    Calcular la probabilidad de que un torrente de agua lanzado en el punto Y llegue a Z. Se sugiere utilizar el ejercicio anterior.



13. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad.

(a) Mostrar que si A y B son sucesos entonces:

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

(b) * Deducir que si $A_1, A_2, \ldots, A_m$ son sucesos entonces:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{m} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{m} P(A_n)$$

(c) ** Demostrar que si $\{A_n\}_{n \in N}$ es una colección de sucesos se cumplen:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{N} P\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right)$$
$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{N} P\left(\bigcap_{n=1}^{N} A_n\right)$$

Sugerencia: aplicar el teorema de continuidad de la probabilidad.

(d) ** Deducir que si $\{A_n\}_{n \in N}$ es una colección de sucesos entonces:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

(e) ** Deducir por último que si $P(A_n) = 0$, $\forall n \in N$ entonces $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$.