

Curso: HORMIGÓN ESTRUCTURAL 1

MÓDULO 9: INESTABILIDAD EN SOPORTES (PANDEO)

Agustin Spalvier (aspalvier@fing.edu.uy)

1^{er} Semestre - 2024

Universidad de la República - Uruguay



- Repaso
- Introducción
- Relación no lineal
- Definiciones
- Métodos de cálculo
- Ejemplo

ACLARACIÓN: Estas transparencias se preparan únicamente como una guía para las clases, las cuales cumplen la función de ser una presentación de los temas que el estudiante debe aprender para aprobar el curso, indicados en la bibliografía.

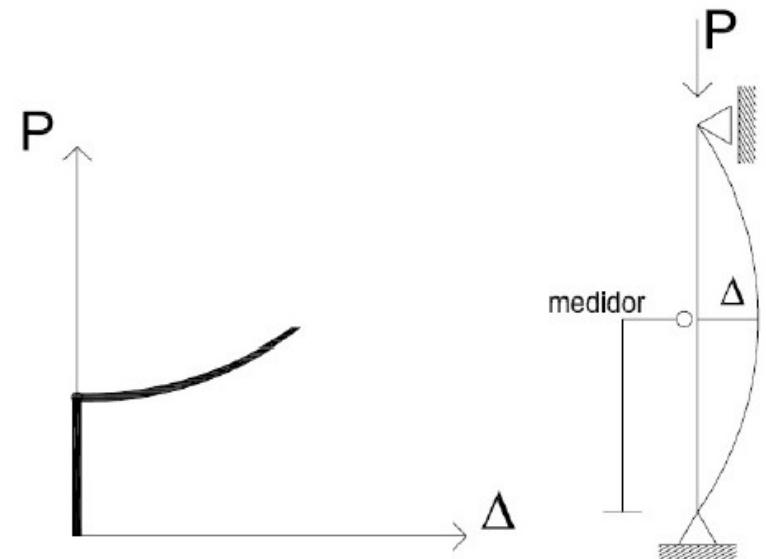
Bibliografía: Jiménez Montoya – 15^a Ed. – Cap. 20.1; 20.2.1; 20.3; 20.6.2; 20.6.4; 20.6.5
EHE-08 – 43.1.1 a 43.3, 43.5, 43.5.1 – **CE 2021 apartado 5.8.**

**ESTAMOS LLENANDO LAS
ENCUESTAS**

- **Pandeo en elementos de materiales elástico-lineales.**

- Se vio que **no hay una relación lineal** entre las **cargas y los efectos** que éstas producen.
- Si sometemos una columna a una **carga de compresión P** y medimos el **desplazamiento** horizontal del punto medio de la columna, se puede ver que:
 - El punto medio de la columna no se desplaza horizontalmente cuando la carga P comienza a crecer. Sin embargo, **a partir de un cierto valor** de ésta, comienza a tener un **desplazamiento significativo** que aumenta en mayor medida que la carga.
 - Si se continua aumentando la carga, la columna termina rompiéndose. Pero **si se retira la carga**, la **columna vuelve a su posición inicial** (comportamiento elástico). Sin embargo la relación carga-desplazamiento no es lineal.
- El pandeo es entonces un **fenómeno no lineal que se desata bruscamente**. La columna pasa de no tener desplazamiento lateral (estabilidad) a, con un incremento relativamente pequeño de la fuerza, tener un desplazamiento importante (que puede alcanzar el colapso). Situación no deseable en nuestras estructuras.
- La carga crítica de una columna biarticulada es

$$N_{crit} = N_B = \left(\frac{\pi}{l_0}\right)^2 EI$$

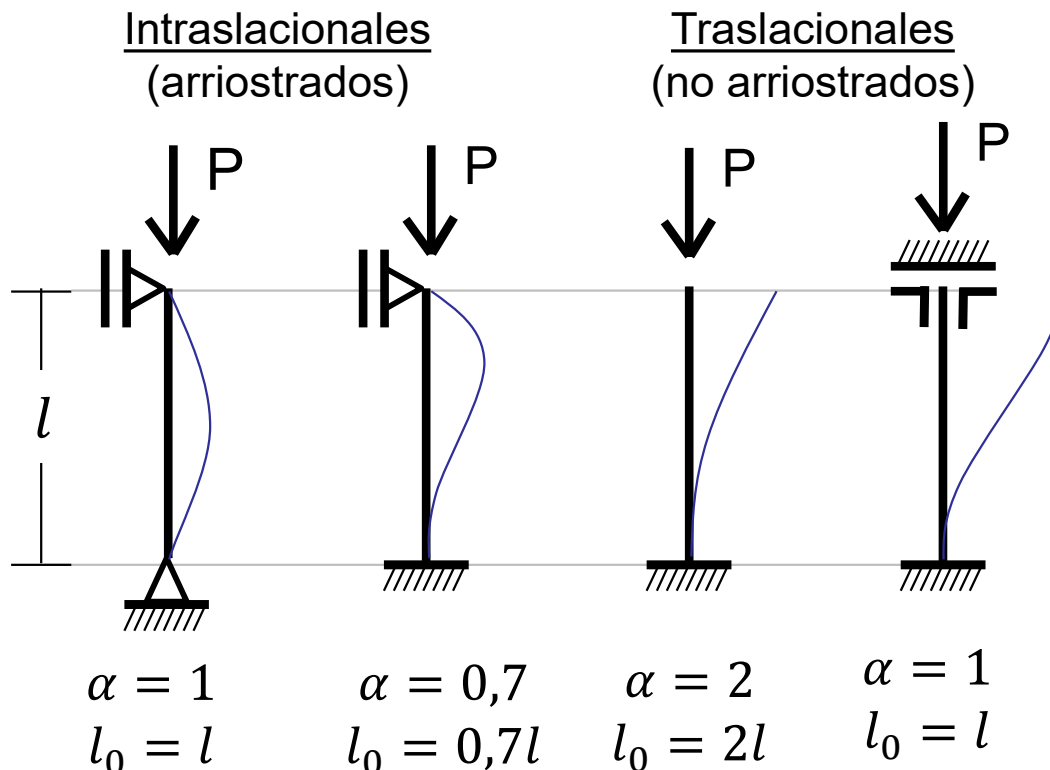


Repaso: Longitud de pandeo

• Definición:

- La **longitud de pandeo o efectiva** (l_0) de un soporte se define como la longitud del soporte biarticulado equivalente al mismo a efectos de pandeo, y es igual a la distancia entre los puntos de momento nulo del mismo.
- Se suele indicar la luz de pandeo (l_0) como la luz real (l) multiplicada por un factor (α) dependiente de los vínculos y condiciones de los apoyos. ($l_0 = \alpha l$)

• Ejemplos



Sustentación de la pieza de longitud l	Valor del coeficiente α
– Un extremo libre y otro empotrado	2
– Ambos extremos articulados	1
– Ambos extremos empotrados, pero con libre desplazamiento normal a la directriz	0,7
– Un extremo con articulación fija y el otro empotrado	0,5
– Ambos extremos empotrados	0,5

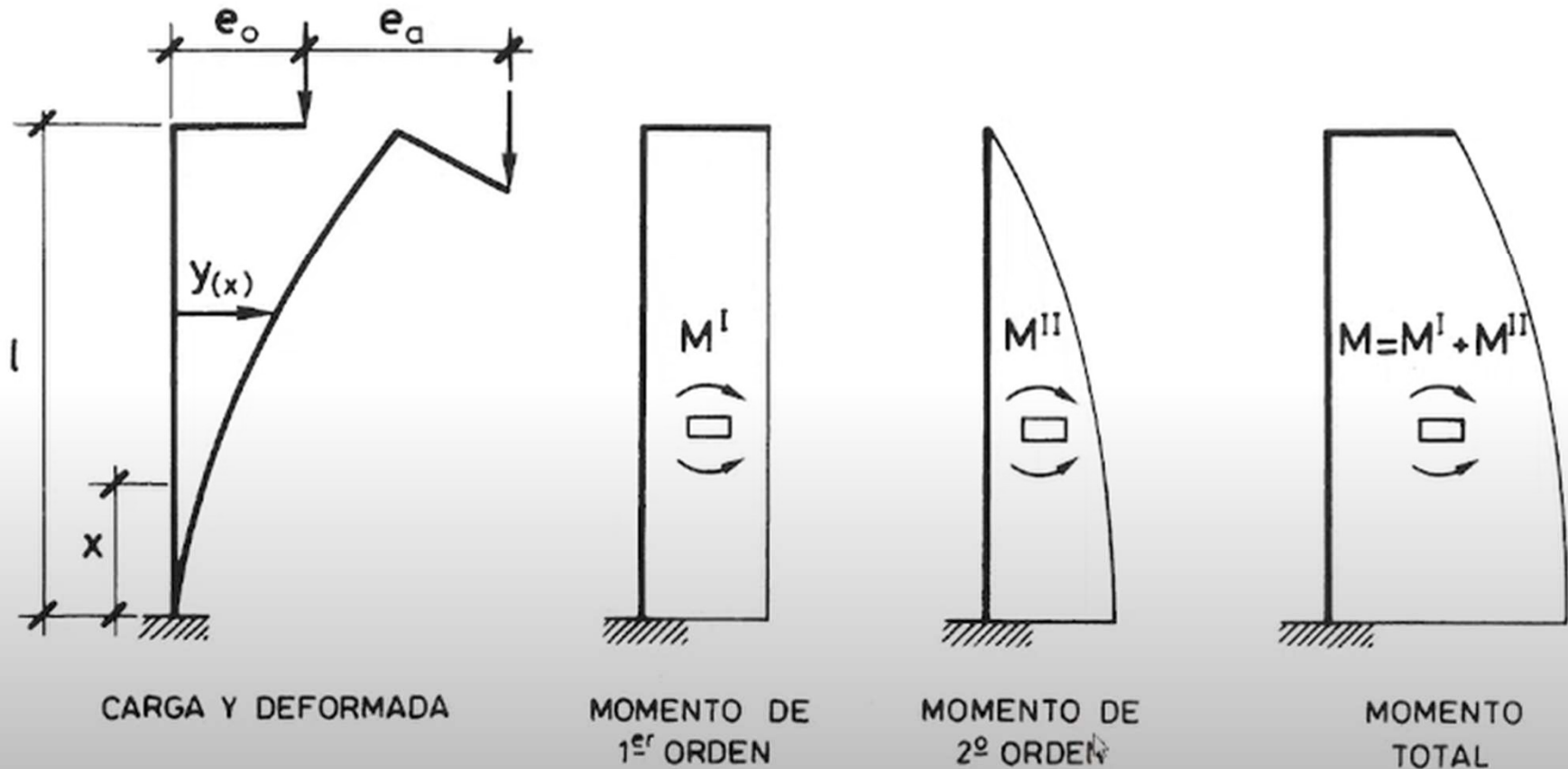
Se pueden usar nomogramas para pilares de pórticos con vigas y pilares de rigideces similares, lo que da diferentes valores de α

Introducción: Compresiones en hormigón

1er Semestre 2024 Agustin Spalvier Curso: Hormigón Estructural 1

6

Las directas de compresión pueden generar momentos adicionales (de 2do orden) significativos, que exigen más a las secciones o incluso pueden inestabilizar la estructura:



Introducción: Compresiones en hormigón

Las directas de compresión pueden generar momentos adicionales (de 2do orden) significativos, que exigen más a las secciones o incluso pueden inestabilizar la estructura:

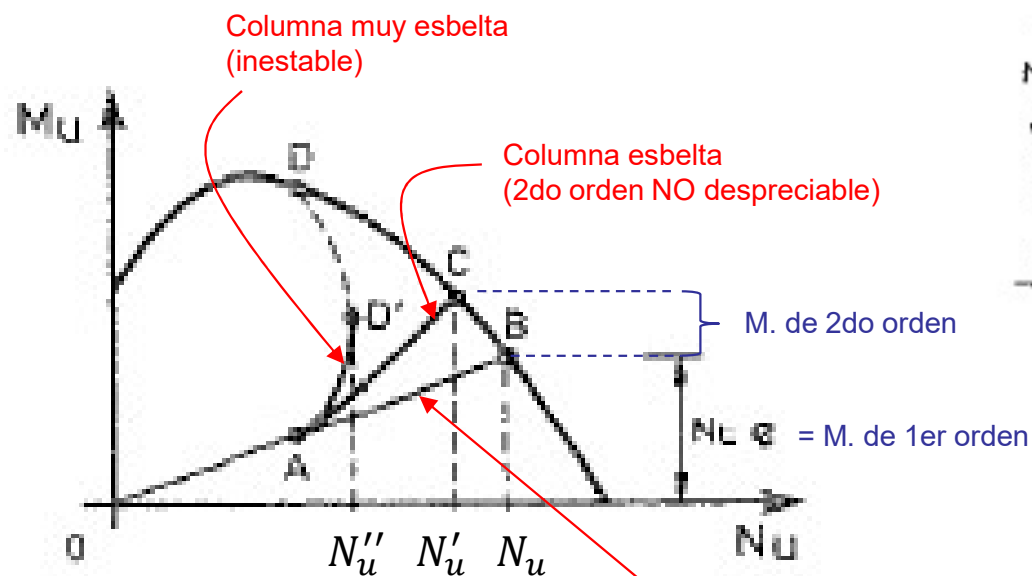


Figura 45.2

Columna robusta (2do orden despreciable)

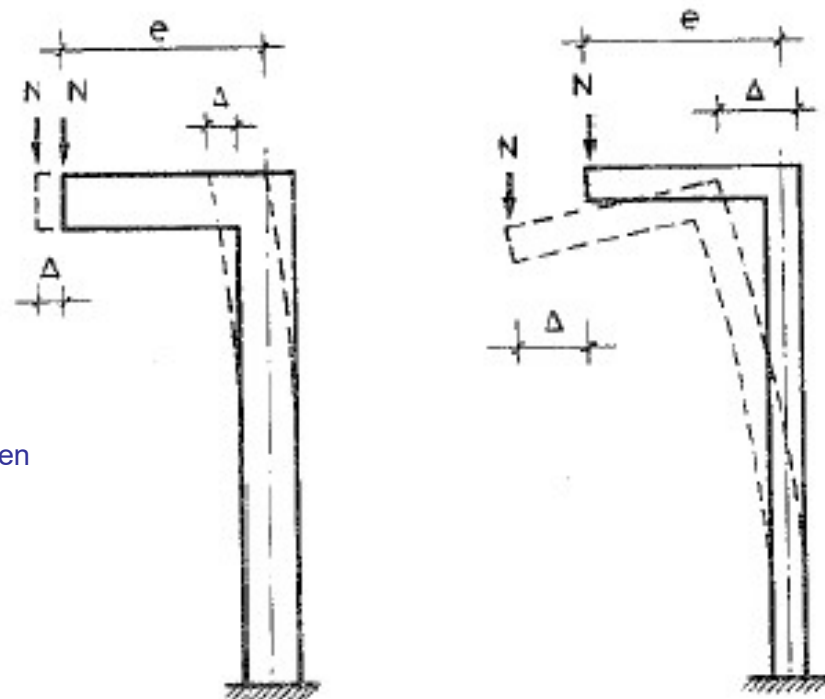


Figura 45-1

Introducción (Calavera Cap. 45)

Si un pilar es muy esbelto, puede ocurrir que su capacidad resistente se vea disminuida por las deformaciones transversales debidas a las sollicitaciones actuantes, o a las excentricidades o faltas de verticalidad accidentales. En pilares poco esbeltos, tales como el a) de la figura 45-1, la flecha Δ debida a la acción N conduce a una sollicitación de agotamiento del pilar N'_u , bajo un momento flector $M'_u = N'_u (e + D)$ sensiblemente

igual al valor $M_u = N_u \cdot e$ y, en definitiva, puede aceptarse que $N_u = N'_u$ y que el momento de segundo orden es despreciable. En el primer caso (fig. 45-2), el punto representativo de la situación de servicio de la sección del pilar es el A, y el esfuerzo axial y el momento flector crecen proporcionalmente hasta alcanzar el punto B de agotamiento correspondiente a la sollicitación $(N_u, N_u \cdot e)$. En el segundo caso, el recorrido de A hasta el agotamiento es la curva AC, donde a C le corresponde la sollicitación de agotamiento $N'_u, N'_u (e + \Delta)$. Como decimos, si el pilar no es esbelto, la diferencia puede despreciarse.

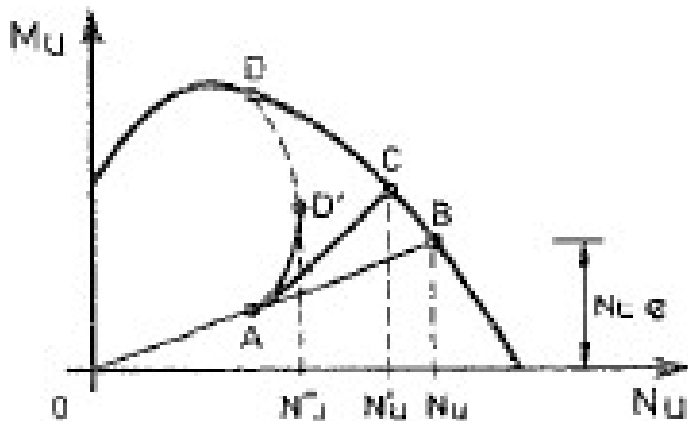


Figura 45.2

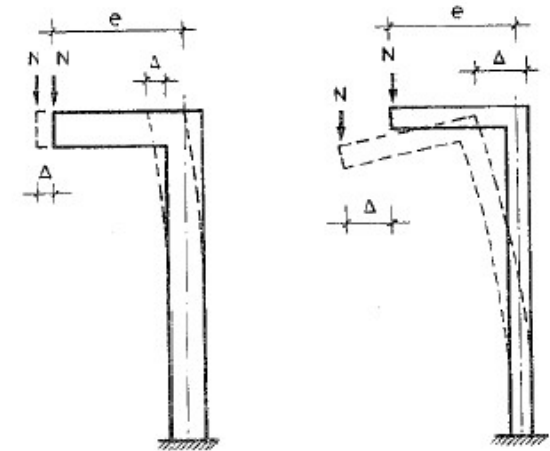


Figura 45-1

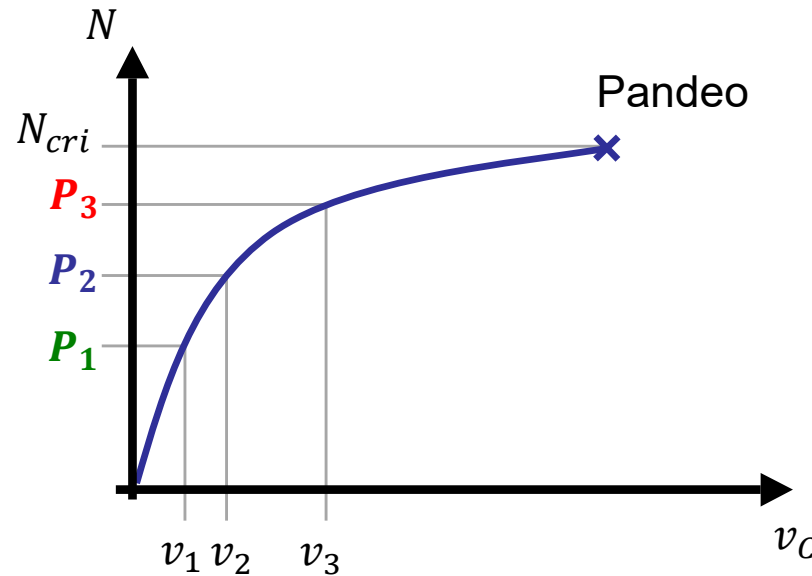
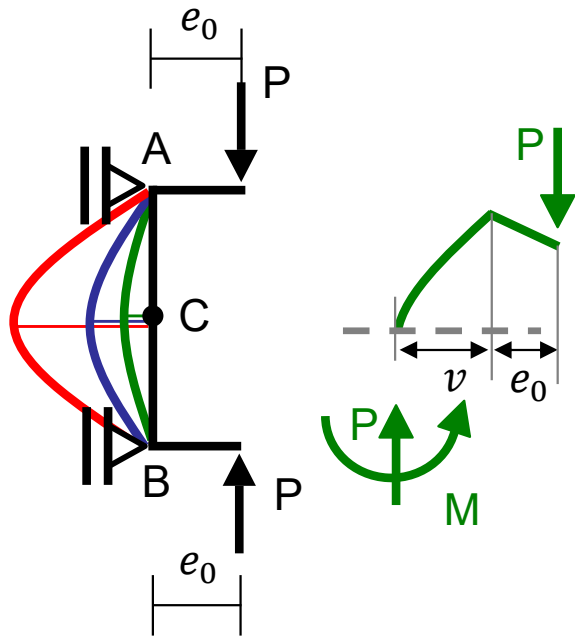
Si el pilar tiene, en cambio, una esbeltez importante (fig. 45-1 b)) la flecha Δ lo será también y el comportamiento de la pieza, debido a que el momento adicional $N \cdot \Delta$ ya no es despreciable, puede ser muy diferente. Las deformaciones Δ pueden crecer muy rápidamente y el agotamiento ocurrir en un punto teórico D' (fig. 45-2), bajo un axil N''_u muy reducido respecto a los valores N_u o N'_u . Mientras que el agotamiento en los puntos B y C corresponde al estado límite último de flexión compuesta, con agotamiento del hormigón y/o del acero, es decir, con fallo de la pieza por agotamiento de los materiales, el caso D corresponde a un fallo por pandeo, debido a la inestabilidad de forma de la pieza.

En el caso que nos ocupa, referente a pilares de hormigón, el problema se agrava por el crecimiento adicional de Δ debido a las dos causas siguientes:

- El incremento $N \cdot \Delta$ del momento flector, al fisurarse la pieza reduce el valor I del momento de inercia de la sección.
- El proceso de fluencia del hormigón, si la carga es duradera, produce un incremento de deformación análogo al que produciría una reducción del módulo de deformación E_c del hormigón.

En definitiva, la flecha adicional Δ al reducir la rigidez (EI) de la pieza, reaccúa sobre el problema, incrementando Δ .

Relación no lineal: cargas y desp. y sollicitaciones



Relación carga-desplazamiento de un pilar real (imperfecto)

Relación no-lineal entre M y N , y entre v y N . M y v toman valores cada vez más altos para pequeños incrementos de N : impide que solo se usen factores de seguridad para abordar el cálculo.

Centro (punto C)

N	M_{prim}	M_{sec}
P_1	$P_1 e_0$	$P_1 (e_0 + v_1)$
P_2	$P_2 e_0$	$P_2 (e_0 + v_2)$
P_3	$P_3 e_0$	$P_3 (e_0 + v_3)$

Extremo (puntos A y B)

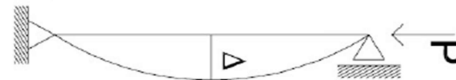
N	M_{prim}	M_{sec}
P_1	$P_1 e_0$	$P_1 e_0$
P_2	$P_2 e_0$	$P_2 e_0$
P_3	$P_3 e_0$	$P_3 e_0$

Efectos del pandeo son de mayor importancia en el tercio central del pilar.

Pandeo: fallo debido a la inestabilidad de un elemento o estructura sometido a compresión simple y sin carga transversal.

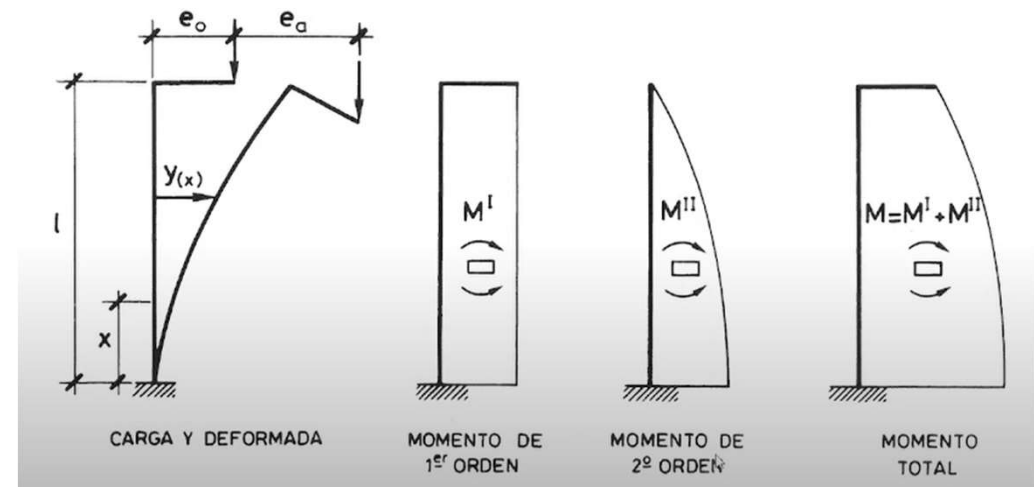
NOTA: El “pandeo puro” no es un estado límite relevante en las estructuras reales debido a las imperfecciones y a las cargas transversales, pero en algunos métodos puede emplearse como parámetro una carga nominal de pandeo para el análisis de segundo orden.

Carga de pandeo: carga que origina el pandeo. Para el caso de elementos elásticos aislados, es sinónimo de la carga crítica de Euler.



Efectos de primer orden: efectos de las acciones sin considerar el efecto de la deformación estructural, pero incluyendo las imperfecciones geométricas.

Efectos de segundo orden: efectos adicionales causados por las deformaciones estructurales.



Elementos o sistemas arriostrados: elementos estructurales o subsistemas que, en el análisis y en el cálculo, se supone que no contribuyen a la estabilidad horizontal global de la estructura.

Ejemplos de sistemas arriostrados (intraslacionales):

Elementos o sistemas de arriostramiento: elementos estructurales o subsistemas que, en el análisis y en el cálculo, se supone que contribuyen a la estabilidad horizontal global de la estructura.

Ejemplos de sistemas no arriostrados (traslacionales):

Longitud efectiva: Es la longitud utilizada para tener en cuenta la forma de la curva de desplazamiento del elemento, pudiéndose definir también como la longitud de pandeo, es decir, la longitud de un pilar biarticulado sometido a un esfuerzo normal constante, con la misma sección y carga de pandeo que el elemento real.

Elementos aislados: elementos que se encuentra aislados, o elementos de una estructura que se toman como aislados por razones de cálculo. La figura A19.5.7 muestra ejemplos de elementos aislados con diferentes condiciones de apoyo.

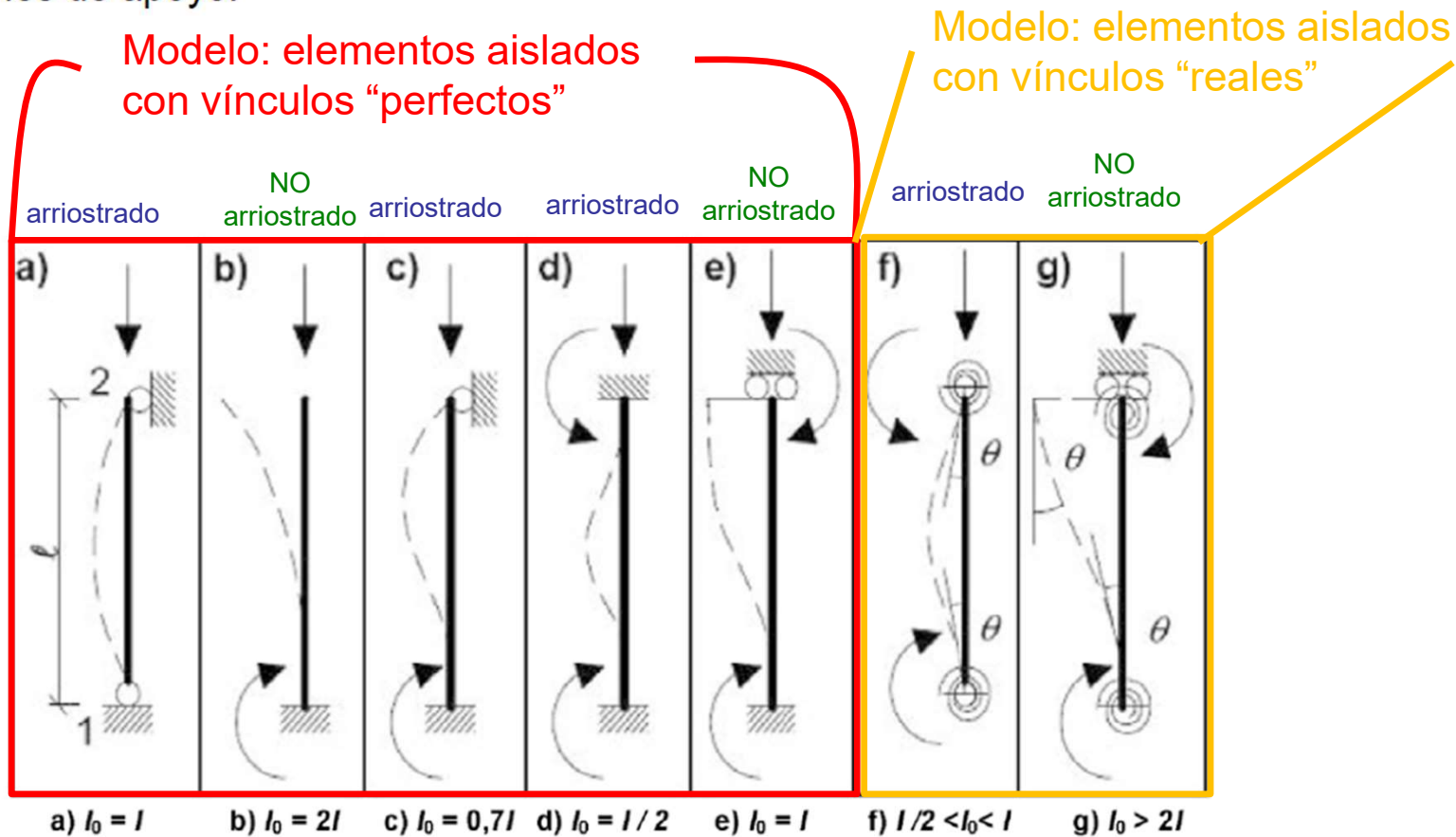


Figura A19.5.7 Ejemplos de diferentes modos de pandeo y sus respectivas longitudes efectivas para elementos aislados

5.8.3.2 Esbeltez y longitud efectiva de elementos aislados

Esbeltez mecánica: $\lambda = l_0/i$

l_0 : longitud efectiva (“longitud de pandeo”)

i : radio de giro (en la dirección considerada)

$i = \sqrt{I/A}$ (con I inercia bruta **en la dirección considerada** y A área de la sección)

Esbeltez geométrica: $\lambda_g = l_0/h$

con h , altura de la sección en la dirección considerada

5.8.3.2 Esbeltez y longitud efectiva de elementos aislados

(3) En elementos comprimidos en pórticos, el criterio de esbeltez (véase el apartado 5.8.3.1) debe comprobarse con una longitud efectiva l_0 determinada de la siguiente manera:

Elementos arriostrados (véase figura A19.5.7(f)):

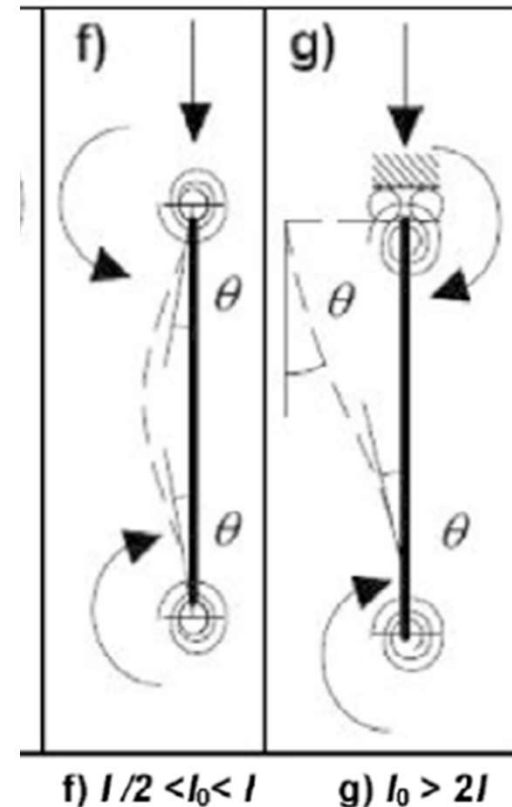
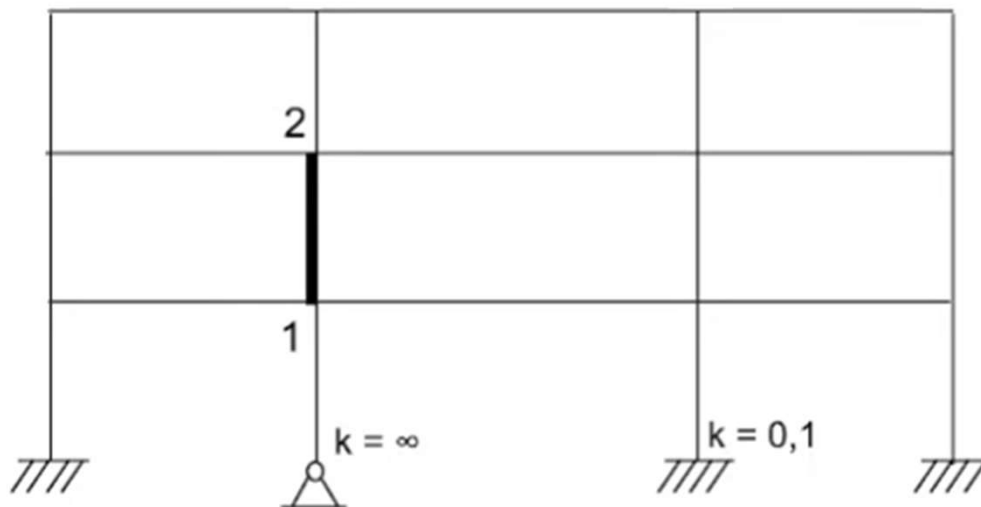
$$l_0 = 0,5l \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{k_1}{0,45+k_1}\right) \cdot \left(1 + \frac{k_2}{0,45+k_2}\right)}$$

Elementos no arriostrados (véase figura A19.5.7(g)):

$$l_0 = l \cdot \max \left\{ \sqrt{1 + 10 \cdot \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2}}; \left(1 + \frac{k_1}{1+k_1}\right) \cdot \left(1 + \frac{k_2}{1+k_2}\right) \right\}$$

k_1 y k_2 flexibilidades relativas de las coacciones al giro en los extremos respectivamente:

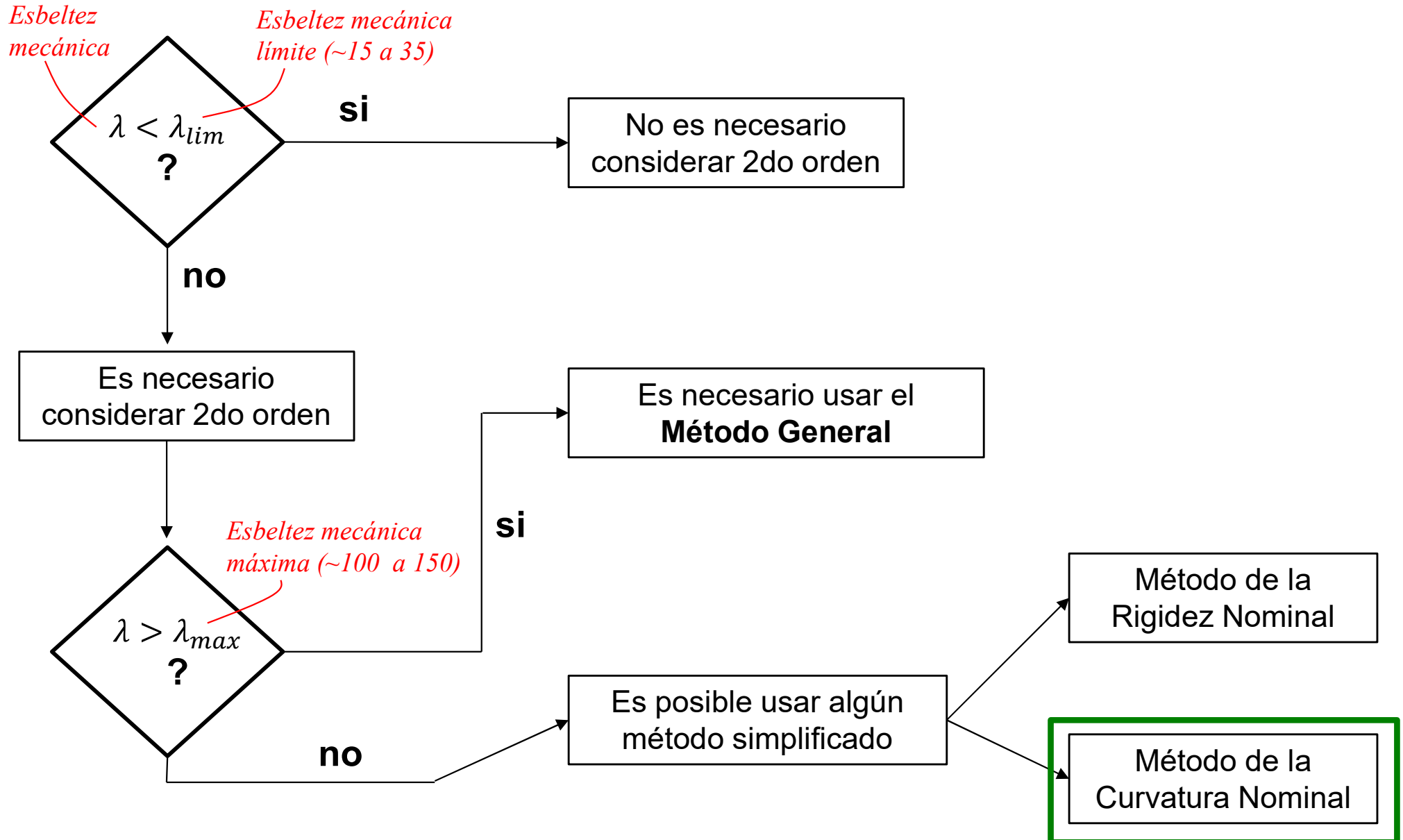
$$k = (\theta/M) \cdot (EI/l)$$



En HE1 solo consideraremos longitudes efectivas l_0 con vínculos “perfectos”:
No será necesario calcular k_1 y k_2 .

Métodos de cálculo para ELU de inestabilidad

Frente a un caso de diseño de armado simétrico de elementos comprimidos:



5.8.3.1 Criterio de esbeltez para elementos aislados

Los efectos de 2do orden pueden ignorarse si $\lambda < \lambda_{lim}$

$$\lambda_{lim} = 20 \cdot A \cdot B \cdot C / \sqrt{n}$$

$$1/(1 + 0,2\varphi_{ef})$$

A=0,7 si φ_{ef} no es conocido
(es decir, tomar $\varphi_{ef} = 2,15$)

$$\sqrt{1 + 2\omega}$$

B=1,1 para diseñar (es decir, tomar $\omega = 0,105$)
o calcular B para casos de verificación.
[ojo que el CE2021 está mal la fórmula]

$$\omega = A_s f_{yd} / (A_c f_{cd})$$

$$1,7 - r_m$$

C=0,7 si no se conoce r_m

Con $r_m = M_{01}/M_{02}$ relación
entre momentos (ver
siguiente diapo.)

$$n = N_{Ed} / (A_c f_{cd})$$

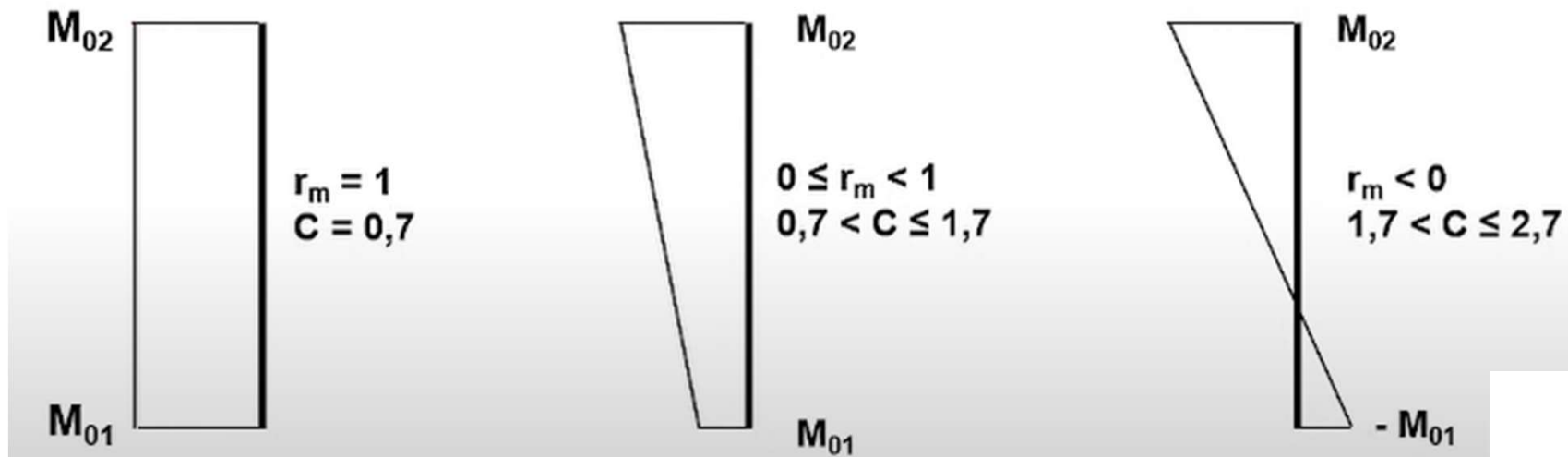
Directa reducida de
compresión, de diseño.

5.8.3.1 Criterio de esbeltez para elementos aislados

$$C = 1,7 - r_m \quad \text{con } r_m = M_{01}/M_{02}$$

M_{01}, M_{02} son los momentos en los extremos de primer orden, $|M_{02}| \geq |M_{01}|$.

Si los momentos en los extremos M_{01} y M_{02} producen tracciones en el mismo lado, r_m se debería tomar como positivo (es decir $C \leq 1,7$), en otro caso como negativo (es decir $C > 1,7$).



En los siguientes casos, r_m se debería tomar como 1,0 (es decir $C = 0,7$):

- para elementos arriostrados en los cuales los momentos de primer orden surgen solo o predominantemente debido a imperfecciones o cargas transversales,
- para elementos sin arriostrar en general.

5.8.8 Método basado en la curvatura nominal

(1) Este método es adecuado sobre todo para elementos aislados con esfuerzo normal constante y una longitud efectiva definida l_0 (véase el apartado 5.8.3.2). El método establece un momento nominal de segundo orden basado en una deformación, que a su vez se basa en la longitud efectiva y en la máxima curvatura estimada (véase también el apartado 5.8.5(3)).

(2) El momento de cálculo resultante se utiliza para el dimensionamiento de secciones, con respecto al momento flector y al esfuerzo axial, de acuerdo con lo establecido en el apartado 6.1.

Con diagramas de interacción

5.8.8 Método basado en la curvatura nominal

(1) El momento de cálculo es:

$$M_{Ed} = M_{0Ed} + M_2 \quad (5.31)$$

donde:

$M_{0Ed} \equiv M_{0e}$ es el momento de primer orden, incluyendo el efecto de las imperfecciones, véase también el apartado 5.8.8.2(2)

M_2 es el momento nominal de segundo orden, véase el apartado 5.8.8.2(3).

El valor máximo de M_{Ed} se establece mediante las distribuciones de M_{0Ed} y M_2 ; esta última, puede tomarse como distribución parabólica o sinusoidal respecto a la longitud efectiva.

$$M_{Ed} = \max(M_{02}, M_{0e} + M_2, |M_{01}| + 0.5 M_2)$$

where

$$M_{01} = \text{Min} \{|M_{\text{top}}|, |M_{\text{bottom}}|\} + e_i N_{Ed}$$

$$M_{02} = \text{Max} \{|M_{\text{top}}|, |M_{\text{bottom}}|\} + e_i N_{Ed}$$

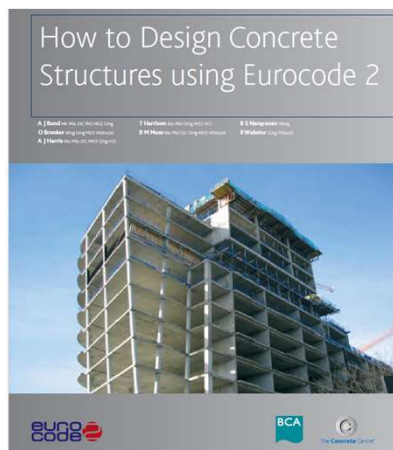
$$e_i = \text{Max} \{l_0/400, h/30, 20\} \text{ (units to be in millimetres).}$$

$M_{\text{top}}, M_{\text{bottom}}$ = Moments at the top and bottom of the column

$$M_{0e} = 0.6 M_{02} + 0.4 M_{01} \geq 0.4 M_{02}$$

$M_2 = N_{Ed} e_2$ where N_{Ed} is the design axial load and e_2 is deflection due to second order effects

M_{01} and M_{02} should be positive if they give tension on the same side.



5.8.8 Método basado en la curvatura nominal

$$M_{Ed} = \max(M_{02}, M_{0e} + M_2, |M_{01}| + 0.5 M_2)$$

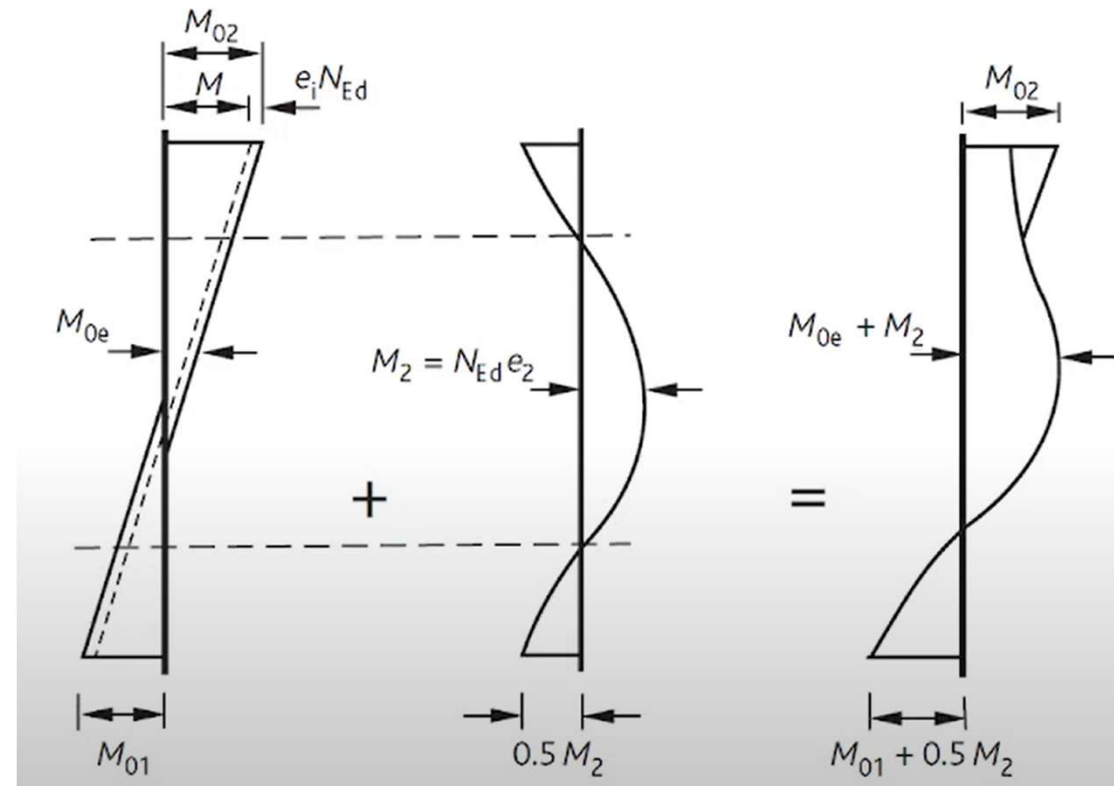
M_{02} : momento flector de primer orden en el extremo que incluye excentricidad por imperfecciones (siempre definido positivo).

M_{01} : momento flector de primer orden en el extremo que incluye excentricidad por imperfecciones, tal que $|M_{02}| \geq |M_{01}|$, (tomarlo negativo si tiene sentido contrario a M_{02})

M_{0e} : momento flector de primer orden en el tercio central de la columna. Para el caso sin cargas transversales entre extremos:

$$M_{0e} = 0,6M_{02} + 0,4M_{01} \geq 0,4M_{02}$$

M_2 : momento flector de segundo orden calculado como $M_2 = N_{Ed}e_2$ donde e_2 es la flecha de 2do orden calculada a partir de una curvatura estimada.



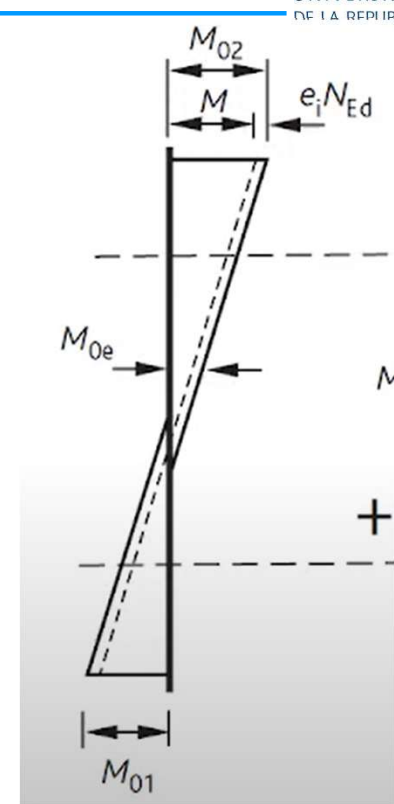
5.8.8 Método basado en la curvatura nominal

Cálculo de M_{02} y M_{01}

M_{02} (y M_{01}) corresponde al momento flector de diseño (1er orden) incluyendo las imperfecciones geométricas (ver apartado 5.2 del CE 2021).

Para HE1 tomaremos que las imperfecciones geométricas aumentan el momento flector de diseño de cálculo a través de la suma de un momento debido a una excentricidad $e_i = l_0/400$.

Además, debe considerarse una excentricidad mínima (como indica el apartado 6.1(4))



(4) En el caso de secciones sometidas a compresión, es necesario suponer una excentricidad mínima $e_0 = h/30$ no inferior a 20 mm, siendo h el canto de la sección.

Por lo tanto:

$$M_{02} = |M_{calc,02}| + e_i N_{Ed}$$

$$M_{01} = |M_{calc,01}| + e_i N_{Ed}$$

$$e_i = \max\left(\frac{l_0}{400}; \frac{h}{30}; 20 \text{ mm}\right)$$

(luego tomar M_{01} positivo si tracciona el mismo lado que M_{02} o negativo si no)



5.8.8 Método basado en la curvatura nominal

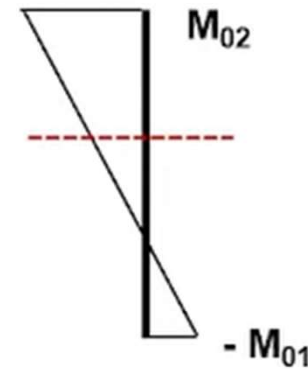
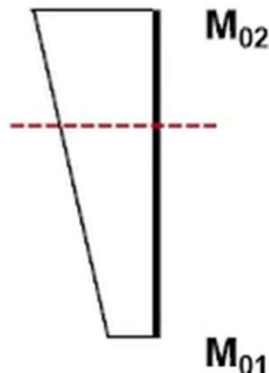
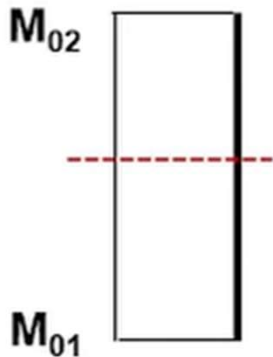
Cálculo de M_{0e} :

“entre”

(2) En el caso de elementos sin cargas aplicadas en sus extremos,

$$M_{0e} = 0,6M_{02} + 0,4M_{01} \geq 0,4M_{02} \quad (5.32)$$

Si M_{01} y M_{02} dan lugar a tensiones en el mismo lado de la sección, deben tener el mismo signo, en caso contrario, tendrán signos opuestos. Además, $|M_{02}| \geq |M_{01}|$.



5.8.8 Método basado en la curvatura nominal

Cálculo de M_{0e} :

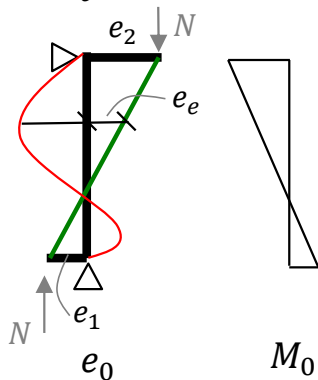
Si hay cargas transversales en el tramo (el diagrama de momentos no es lineal) entonces M_{0e} es el máximo momento del tercio central.

El “tercio central” es el tercio de la luz efectiva (la columna equivalente) que es donde los efectos de segundo orden son mayores.

Es un criterio de este curso

$$Ej: e_2 = 4 \text{ cm y } e_1 = -2 \text{ cm}$$

$$e_e = 0.6 \times 4 - 0.4 \times 2 = 1,6 \text{ cm}$$



Peor punto no es en el centro de la luz sino hacia un apoyo \Rightarrow tercio central.

5.8.8 Método basado en la curvatura nominal

Cálculo de M_2 :

(3) El momento nominal de segundo orden en la expresión (5.31) es:

$$M_2 = N_{Ed}e_2 \quad (5.33)$$

donde:

N_{Ed} es el valor de cálculo del esfuerzo axial

e_2 es la flecha = $(1/r)l_0^2/c$

$1/r$ es la curvatura, véase el apartado 5.8.8.3

l_0 es la longitud efectiva, véase el apartado 5.8.3.2

c es un coeficiente que depende de la distribución de la curvatura, véase el apartado 5.8.8.2(4).

(4) Para sección constante, es habitual la utilización de $c = 10 (\approx \pi^2)$. Si el momento de primer orden es constante, debe considerarse un valor inferior (8 es el límite inferior correspondiente a un momento total constante).

NOTA: El valor π^2 corresponde a una distribución sinusoidal de la curvatura. Para curvatura constante el valor será 8. Debe observarse que c depende de la distribución total de la curvatura, mientras c_0 en el apartado 5.8.7.3(2) depende únicamente de la curvatura correspondiente al momento de primer orden.

5.8.8 Método basado en la curvatura nominal

Cálculo de M_2 : $M_2 = N_{Ed}e_2$

$$e_2 = (1/r)l_0^2/c$$

$$1/r = K_r \cdot K_\varphi \cdot 1/r_0 \quad (\text{para elementos con sección simétrica constante (incluida la armadura)})$$

(3) K_r , en la expresión (5.34), deberá tomarse como:

$$K_r = (n_u - n)/(n_u - n_{bal}) \leq 1$$

donde:

$n = N_{Ed}/(A_c f_{cd})$, es el axil reducido

N_{Ed} es el valor de cálculo del esfuerzo axil

$$n_u = 1 + \omega$$

n_{bal} es el valor de n utilizando el momento máximo resistente; puede emplearse el valor 0,4

$$\omega = A_s f_{yd}/(A_c f_{cd})$$

A_s es el área total de armadura

A_c es el área de la sección de hormigón.

En HE1,

- Para diseñar: considerar $\omega = 0.105$ y calcular K_r
- Para verificar: $K_r = 1$

5.8.8 Método basado en la curvatura nominal

Cálculo de M_2 : $M_2 = N_{Ed}e_2$

$$e_2 = (1/r)l_0^2/c$$

$$1/r = K_r \cdot K_\varphi \cdot 1/r_0 \quad (\text{para elementos con sección simétrica constante (incluida la armadura)})$$

(4) Debe tenerse en cuenta el efecto de la fluencia mediante el siguiente coeficiente:

$$K_\varphi = 1 + \beta\varphi_{ef} \geq 1 \quad (5.37)$$

donde:

φ_{ef} es el coeficiente de fluencia efectivo, véase el apartado 5.8.4

$$\beta = 0,35 + f_{ck}/200 - \lambda/150$$

λ es la esbeltez, véase el apartado 5.8.3.2.

Para HE1 tomar $\varphi_{ef} = 2,15$, lo cual es conservador.

5.8.8 Método basado en la curvatura nominal

Cálculo de M_2 : $M_2 = N_{Ed}e_2$

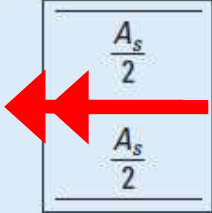
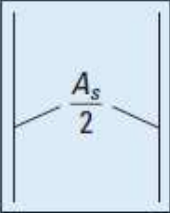
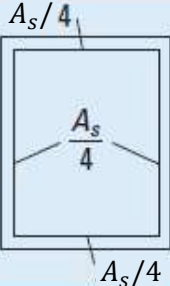
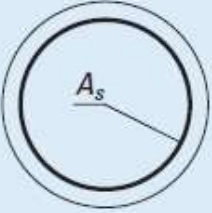
$$e_2 = (1/r)l_0^2/c$$

$$1/r = K_r \cdot K_\varphi \cdot \frac{1}{r_0} \quad (\text{para elementos con sección simétrica constante (incluida la armadura)})$$

$$\frac{1}{r_0} = \frac{f_{yd}}{E_s} \frac{1}{0,45d^*}$$

$$d^* = \frac{h}{2} + i_s$$

donde i_s es el radio de giro del área total de armadura.

Disposición de armadura	i_s
	$\frac{1}{2}(d - d')$
	$\frac{1}{2\sqrt{3}}(d - d')$
	$\frac{1}{\sqrt{6}}(d - d')$
	$\frac{1}{2\sqrt{2}}(d - d')$

5.8.8 Método basado en la curvatura nominal

Resumen del método para diseñar:

1: Tenemos los diagramas. Calculamos M_{02} y M_{01} que incluyen imperfecciones geométricas y excentricidad mínima.

2: Con M_{01} y M_{02} calculamos M_{0e} (si el diagrama de momentos no es lineal M_{0e} es el máximo del tercio central considerando imperfecciones geométricas y excentricidad mínima).

3: Calculamos el momento de 2do orden $M_2 = N_{Ed}e_2$:

$$\text{siendo } e_2 = \left(K_r K_\varphi \frac{1}{r_0} \right) l_0^2 / c \quad \left\{ \begin{array}{l} K_r = 1 \\ K_\varphi \text{ un valor } \geq 1 \text{ que se debe calcular} \\ \frac{1}{r_0} = \frac{f_{yd}}{E_s} \frac{1}{0,45d^*} \end{array} \right. \quad \text{con } d^* = \frac{h}{2} + i_s \text{ que depende de la disposición de la armadura.}$$

4: Calculamos $M_{Ed} = \max(M_{02}, M_{0e} + M_2, |M_{01}| + 0.5 M_2)$.

5: Con el momento de diseño M_{Ed} y la directa de compresión de diseño N_{Ed} , entramos al diagrama de interacción correspondiente y calculamos la cuantía de acero ω .

6: Verificamos cuantía mínima y máxima.