# Práctico 2

bolas y distancias

1. Sea $(M,d)$ un espacio métrico. Recuerde que un subconjunto $D \subseteq M$ se dice **discreto** si todo punto de $D$ es un **punto aislado**, es decir, para cada $x \in D$ existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \cap D = \{x\}$.

   Demuestre que todo espacio métrico finito es un conjunto discreto.

2. Sea $M$ un conjunto infinito y numerable. Demuestre que es posible definir una métrica sobre $M$ de tal manera que ningún punto de $M$ sea un punto aislado.

3. Considere $\mathbb{R}$ con la métrica eucídea. Dé un ejemplo de dos subconjuntos discretos $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ tales que $X \cup Y$ no sea discreto.

4. Dé un ejemplo de un conjunto acotado $X \subseteq \mathbb{R}$ para el cual no existan $a, b \in X$ que cumplan con $|a-b| = \operatorname{diam}(X)$, donde
$$\operatorname{diam}(X) := \sup\{d(x,y) \ / \ x,y \in X\}.$$

5. Demuestre que todo espacio métrico es una unión numerable de conjuntos acotados.

6. Dado un espacio métrico $(M,d)$, $x_0 \in M$ y $r > 0$, considere el complemento en $M$ de la bola abierta de centro $x_0$ y radio $r$, es decir, $F = M - B(x_0, r)$. Usando únicamente las propiedades de $d$ y del concepto de distancia (no usar caracterizaciones de conjuntos cerrados y de puntos de adherencia en topologías métricas), demuestre que si $x \in M$ es tal que $d(x,F) = 0$, entonces $x \in F$.

7. Considere $\mathbb{R}^n$ con la métrica euclídea $d_2 \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,
$$d_2(\vec{x},\vec{y}) := \sqrt{|x_1-y_1|^2 + \cdots + |x_n-y_n|^2} \ \text{ para todo } \vec{x} = (x_1,\ldots,x_n),\ \vec{y} = (y_1,\ldots,y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

   Sea $X = \{\vec{x} = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ x_{p+1} = \cdots = x_n = 0\}$ con $p \in \{0,\ldots,n-1\}$ fijo. Demuestre que para todo $\vec{y} = (y_1,\ldots,y_n)$ se tiene que
$$d(\vec{y},X) = \sqrt{y_{p+1}^2 + \cdots + y_n^2}.$$