Universidad de la República
Facultad de Ingeniería - IMERL

Topología y Análisis Real
Primer Semestre de 2024

Práctico 0

repaso de conjuntos y funciones

1. Sean A y B dos conjuntos no vacíos, y C otro conjunto, tales que

$$(A \times B) \cup (B \times A) = C \times C.$$

Demuestre que $A = B = C$.

2. Sean $A, B \subseteq X$ y $C, D \subseteq Y$. Demuestre que:

   (a) $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$.

   (b) $(A \times C) \cup (B \times D) \subseteq (A \cup B) \times (C \cup D)$. Además, muestre que en general la igualdad entre los dos conjuntos anteriores puede no verificarse.

   (c) $(X \times Y) - (B \times D) = [(X - B) \times Y] \cup [X \times (Y - D)]$.

3. Demuestre que $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right] = [0, 1]$.

4. Sea $\{A_n \,/\, n \in \mathbb{N}\}$ una familia de conjuntos, y $S_k = \bigcup_{i=0}^{k} A_i$ con $k \in \mathbb{N}$. Demuestre que

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = A_0 \cup (A_1 - S_0) \cup \cdots \cup (A_n - S_{n-1}) \cup \cdots,$$

y que la unión de la derecha es una unión disjunta dos a dos.

5. Sea $\{A_n \,/\, n \in \mathbb{N}\}$ una familia de subconjuntos de un conjunto X. Se definen el límite superior e inferior de la familia anterior como:

$$\text{Lim sup } A_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} \left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_{n+k} \right) \quad \text{y} \quad \text{Lim inf } A_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} \left(\bigcap_{k=0}^{\infty} A_{n+k} \right).$$

Demuestre que:

   (a) $\text{Lim sup } A_n = \{x \in X \,/\, x \text{ pertenece a una cantidad infinita de } A_i\}$.

   (b) $\text{Lim inf } A_n = \{x \in X \,/\, x \text{ pertenece a todos los } A_i \text{ salvo a un número finito de } A_i\}$.

   (c) $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n \subseteq \text{Lim inf } A_n \subseteq \text{Lim sup } A_n \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$.

   (d) $\text{Lim inf } (X - A_n) = X - (\text{Lim sup } A_n)$.

   (e) $(\text{Lim inf } A_n) \cup (\text{Lim inf } B_n) \subseteq \text{Lim inf } (A_n \cup B_n)$.

   (f) $(\text{Lim inf } A_n) \cap (\text{Lim inf } B_n) = \text{Lim inf } (A_n \cap B_n)$.

   (g) $\text{Lim sup } (A_n \cap B_n) \subseteq (\text{Lim sup } A_n) \cap (\text{Lim sup } B_n)$.

   (h) $\text{Lim sup } (A_n \cup B_n) = (\text{Lim sup } A_n) \cup (\text{Lim sup } B_n)$.

   (i) Si $A_n \subseteq A_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (o $A_n \supseteq A_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$), entonces $\text{Lim inf } A_n = \text{Lim sup } A_n$.

6. Sea $A \subseteq X$ y $f : X \to Y$ una función. Se denota por $f|_A$ a la restricción de f en A, es decir, $f|_A = f \circ i$ donde $i : A \to X$ es la inclusión de A en X. Demuestre que si $(f|_A)^{-1}(B) = A \cap f^{-1}(B)$ para todo $B \subseteq Y$.

7. Sea $f : X \to Y$ una función. Demuestre que:

   (a) Para todo $A \subseteq X$, $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.

   (b) Para todo $B \subseteq Y$, $B \supseteq f(f^{-1}(B))$.

   (c) $f^{-1}(Y - B) = X - f^{-1}(B)$ para todo $B \subseteq Y$.

   (d) Para toda familia $\{A_\lambda \ / \ \lambda \in \Lambda\}$ de subconjuntos de X,

$$f\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda) \quad \text{y} \quad f\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \subseteq \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda).$$

   (e) Para toda familia $\{B_\gamma \ / \ \gamma \in \Gamma\}$ de subconjuntos de Y,

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\right) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} f^{-1}(B_\gamma) \quad \text{y} \quad f^{-1}\left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma\right) = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} f^{-1}(B_\gamma).$$

8. Demuestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   (a) f es inyectiva.

   (b) $f\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda)$ para toda familia $\{A_\lambda \ / \ \lambda \in \Lambda\}$ de subconjuntos de X.

   (c) Para todo $y \in Y$, $\text{Card}(f^{-1}(\{y\})) \leq 1$.

   (d) Para todo $A \subseteq X$, $f(X - A) \subseteq Y - f(A)$.

   (e) Para todo $A \subseteq X$, $f^{-1}(f(A)) = A$.

9. Son equivalentes:

   (a) f es sobreyectiva.

   (b) Para todo $y \in Y$, $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$.

   (c) Para todo $A \subseteq X$, $f(X - A) \supseteq Y - f(A)$.

   (d) Para todo $B \subseteq Y$, $f(f^{-1}(B)) = B$.