

Trabajo Final – Control de un Levitador Magnético

Técnicas Avanzadas de Modelado y Simulación

En este trabajo modelaremos, simularemos y analizaremos un dispositivo de levitación magnética, consistente en una pelotita metálica suspendida en el aire mediante un electroimán, como el que se muestra en la Figura 1. El dispositivo tendrá además un sistema de control que comandará la corriente del electroimán para estabilizar la pelotita en una posición de referencia.

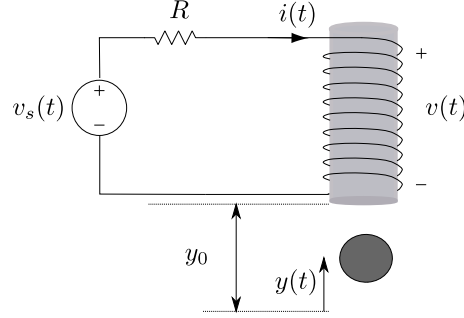


Figura 1: Dispositivo de Levitación Magnética.

Problema 1. Modelado de la Interacción Electromagnética-Mecánica

Para modelar la interacción entre el electroimán y la pelotita crearemos una nueva clase de Modelica que denominaremos `CoilBall` siguiendo los siguientes pasos:

1. La clase contendrá un conector mecánico y dos pines eléctricos, pudiendo por lo tanto utilizarse herencia de la clase `OnePort`. El conector mecánico tendrá asociada la posición $y(t)$ de la pelotita y la fuerza $f(t)$ ejercida por el electroimán.
2. Para plantear las relaciones constitutivas, tendremos en cuenta lo siguiente:

- Consideraremos que el arrollamiento tiene una inductancia $L(y)$ que varía con la posición $y(t)$ de la pelotita.
- El voltaje en el arrollamiento cumplirá con la ecuación:

$$v(t) = \frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{d[L(y(t)) i(t)]}{dt} = \frac{\partial L}{\partial y} \dot{y}(t) i(t) + L(y(t)) \frac{di(t)}{dt} \quad (1)$$

siendo $\dot{y}(t)$ la velocidad de la pelotita.

- La potencia eléctrica entregada es $p_e(t) = v(t) i(t)$ mientras que la mecánica es $p_m(t) = f(t) \dot{y}(t)$. Por lo tanto, utilizando la Ec.(1) la potencia total entregada al componente es:

$$p_T(t) = \frac{\partial L}{\partial y} \dot{y}(t) i^2(t) + L(y(t)) \frac{di(t)}{dt} i(t) + f(t) \dot{y}(t) \quad (2)$$

- La energía eléctrica acumulada en el componente es $E(t) = \frac{1}{2} L(y) i^2(t)$, por lo que la potencia que se acumula instantáneamente es

$$p_a(t) = \frac{dE(t)}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\partial L}{\partial y} \dot{y}(t) i^2 + L(y) i(t) \frac{di(t)}{dt} \quad (3)$$

Dado que la potencia total brindada al componente se acumula en forma de energía eléctrica, resulta $p_a(t) = p_T(t)$ o $p_T(t) - p_a(t) = 0$, de donde restando las Ecs.(2) y (3), se obtiene

$$\frac{1}{2} \frac{\partial L}{\partial y} \dot{y}(t) i^2(t) + f(t) \dot{y}(t) = 0$$

de donde,

$$f(t) = -\frac{1}{2} \frac{\partial L}{\partial y} i^2(t) \quad (4)$$

- Consideraremos que la inductancia tiene la siguiente ley:

$$L(y) = L_0 \frac{y_0}{y_0 - y} \quad (5)$$

donde y_0 es la distancia del núcleo al eje de coordenadas y L_0 es la inductancia cuando la pelotita está en el origen (notar que se deberá cumplir la restricción $y(t) < y_0$). Luego, reemplazando $L(y)$ con la Ec.(5) en las Ecs.(1) y (4) resultan las siguientes relaciones constitutivas:

$$v(t) = L_0 \frac{y_0}{(y_0 - y(t))^2} \dot{y}(t) i(t) + L_0 \frac{y_0}{y_0 - y(t)} \frac{di(t)}{dt} \quad (6)$$

$$f(t) = \frac{1}{2} L_0 \frac{y_0}{(y_0 - y(t))^2} i^2(t) \quad (7)$$

De esta manera, utilizaremos como relaciones constitutivas del componente las ecuaciones (6) y (7) que vincularán el voltaje, la corriente, la posición y la fuerza del mismo.

3. De acuerdo a lo visto, los parámetros de la clase `CoilBall` deberán ser la distancia y_0 y la inductancia L_0 . Para los mismos utilizaremos como valores por defecto $y_0 = 9 \cdot 10^{-3} \text{m}$ y $L_0 = 5.5181 \cdot 10^{-3} \text{Hy}$.

Problema 2. Modelo del sistema sin control

Se pide ahora construir el modelo del sistema a lazo abierto. Para esto, crearemos una nueva clase llamada `MaglevSys` utilizando elementos de la `DSFLib` y la clase `CoilBall` desarrollada en el punto anterior. Tendremos en cuenta lo siguiente:

1. La pelotita tiene masa $m = 0.02 \text{ Kg}$ y la misma, además de recibir la fuerza electromagnética, está sujeta a la acción de la gravedad. Se considera despreciable el rozamiento con el aire.
2. La resistencia del circuito valdrá $R = 1 \Omega$.
3. La tensión de alimentación $v_s(t)$ proviene de una fuente controlada que recibe la suma de dos señales:

$$v_s(t) = u_0 + u(t) \quad (8)$$

donde $u(t)$ será la entrada de control y u_0 es el voltaje de equilibrio para que la pelotita quede en la posición $y(t) = 0$.

Para calcular u_0 podemos tener en cuenta que en el equilibrio resulta $\dot{y}(t) = 0$, $\frac{di(t)}{dt} = 0$ y además $\ddot{y}(t) = 0$ para lo cual deberán igualarse la fuerza de la gravedad y la del electroimán. Luego, usando la Ec.(4) resulta:

$$m g = \frac{1}{2} L_0 \frac{y_0}{(y_0 - y(t))^2} i^2(t) = \frac{1}{2} L_0 \frac{y_0}{y_0^2} i_0^2 = \frac{1}{2} L_0 \frac{1}{y_0} i_0^2$$

de donde la corriente en el equilibrio i_0 resulta

$$i_0 = \pm \sqrt{\frac{2 m g y_0}{L_0}} \quad (9)$$

Teniendo en cuenta que en el equilibrio el voltaje $v(t)$ es nulo, la tensión de equilibrio u_0 resulta

$$u_0 = \pm R \sqrt{\frac{2 m g y_0}{L_0}} \quad (10)$$

4. Para verificar que el modelo funcione correctamente simularemos el mismo con la entrada de control $u(t) = 0$ y con la condición inicial $i(t) = i_0$. Debería verificarse (aproximadamente) que el punto $\bar{x} = [y = 0, \dot{y} = 0, i = i_0]^T$ es un punto de equilibrio del sistema para la entrada $u(t) = 0$.

Problema 3. Control Lineal de Posición

Se pide ahora estudiar el uso de un control PID para comandar la posición de la pelotita. El controlador PID tendrá la siguiente forma:

$$G_c(s) = K \frac{\left(\frac{s}{20} + 1\right)^2}{s} \quad (11)$$

con $K = 4000$. Para analizar el comportamiento del sistema a lazo cerrado, procederemos siguiendo los siguientes pasos:

1. Construir un modelo del sistema controlado en OpenModelica para una referencia de entrada $y_{\text{ref}} = 0$ utilizando un esquema como el de la Figura 2.

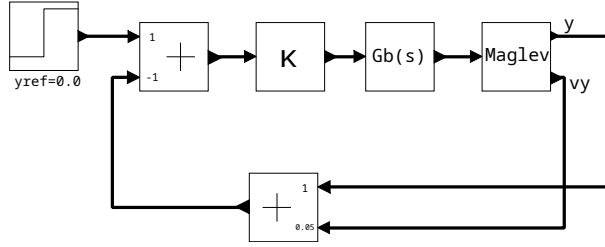


Figura 2: Control del Levitador Magnético.

En el esquema, se toma

$$G_b(s) = \frac{s}{20} + 1 \quad (12)$$

y para evitar usar derivadores, se mide directamente la velocidad. Notar que la entrada del levitador magnético resulta

$$\begin{aligned} U(s) &= K \frac{\left(\frac{s}{20} + 1\right)}{s} \left(Y_{\text{ref}}(s) - \left(Y(s) + \frac{V_y(s)}{20} \right) \right) = K \frac{\left(\frac{s}{20} + 1\right)}{s} \left(Y_{\text{ref}}(s) - \left(Y(s) + \frac{s Y(s)}{20} \right) \right) \\ &= K \frac{\left(\frac{s}{20} + 1\right)}{s} \left(Y_{\text{ref}}(s) - \left(\frac{s}{20} + 1 \right) Y(s) \right) = K \frac{\left(\frac{s}{20} + 1\right)}{s} Y_{\text{ref}}(s) - K \frac{\left(\frac{s}{20} + 1\right)^2}{s} Y(s) \\ &= G_c(s) \left(\frac{Y_{\text{ref}}(s)}{\left(\frac{s}{20} + 1\right)} - Y(s) \right) \end{aligned}$$

lo que implica que a lazo cerrado el controlador se corresponde al PID $G_c(s)$ de la Ec.(11) sin la necesidad de utilizar derivadores.

2. Simular el sistema a lazo cerrado y verificar que funcione correctamente. Observar además que ocurre al colocar una condición inicial nula en la corriente del electroimán.
3. Observar que ocurre al cambiar la referencia de posición y_{ref} para valores positivos y negativos que no superen la restricción $y(t) < y_0 = 0.009$ m.
4. Observar que ocurre al cambiar la posición inicial de la masa $y(t = 0)$ manteniendo la referencia $y_{\text{ref}} = 0$.