

INSTITUTO NACIONAL DE ESTADÍSTICA Y GEOGRAFÍA

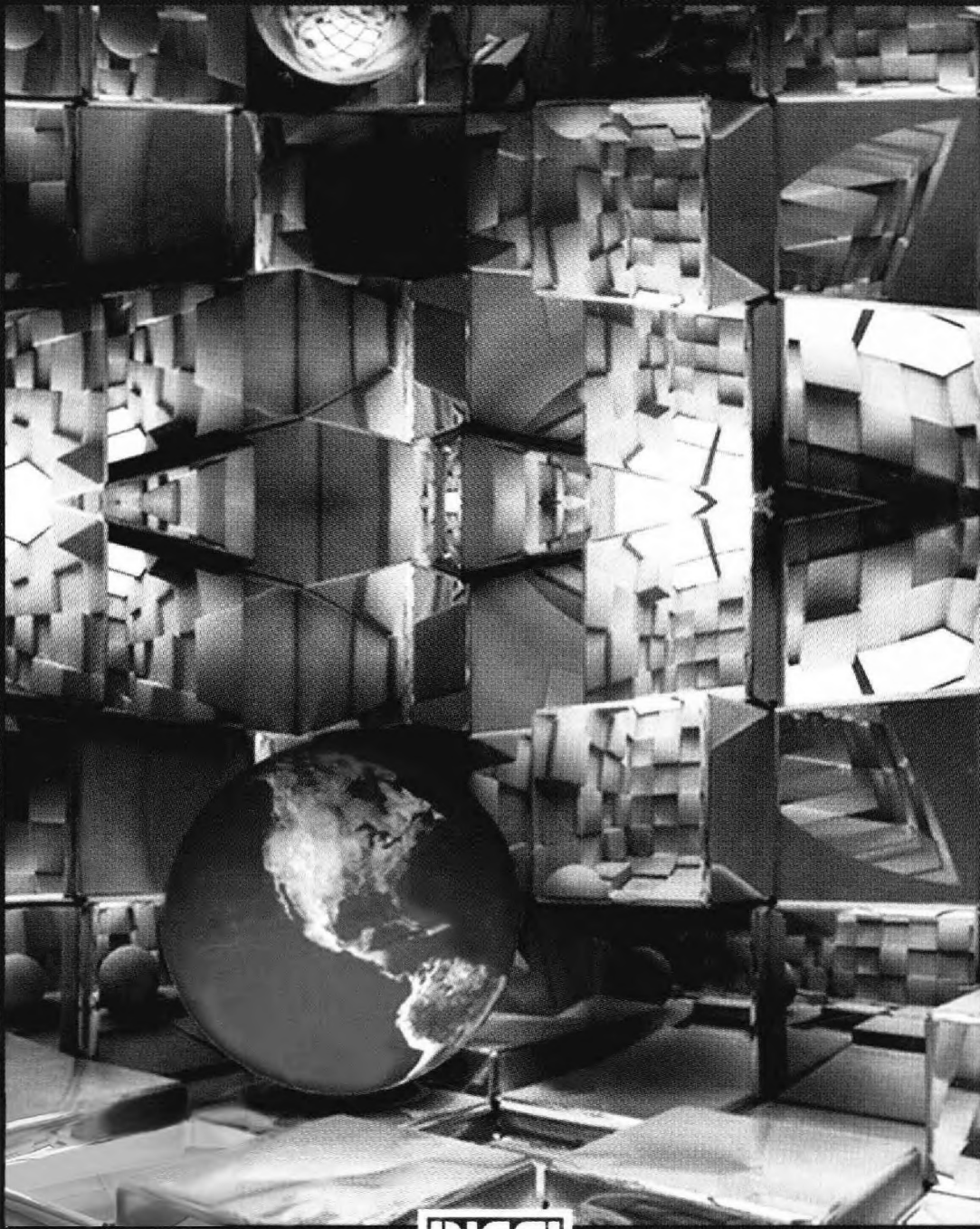
Tratamiento de errores en levantamientos topográficos



INSTITUTO NACIONAL
DE ESTADÍSTICA Y GEOGRAFÍA

INSTITUTO NACIONAL DE ESTADÍSTICA Y GEOGRAFÍA

Tratamiento de errores en levantamientos topográficos



INSTITUTO NACIONAL
DE ESTADÍSTICA Y GEOGRAFÍA

526.98

Reyes Ibarra, Mario Alberto

Tratamiento de errores en levantamientos topográficos /
Mario Alberto Reyes Ibarra, Antonio Hernández Navarro. –
2a ed. -- México : INEGI, c2009.

262 p. : il.

ISBN 978-607-494-022-0

1. Levantamiento topográfico. 2. Levantamiento
topográfico - Modelos matemáticos. I. Hernández Navarro,
Antonio. II. Instituto Nacional de Estadística y Geografía
(México).

DR © 2009, **Instituto Nacional de Estadística y Geografía**
Edificio Sede
Av. Héroe de Nacozari Sur Núm. 2301
Fracc. Jardines del Parque, CP 20276
Aguascalientes, Ags.

www.inegi.org.mx
atencion.usuarios@inegi.org.mx

**Tratamiento de errores
en levantamientos
topográficos
2ª edición**

Impreso en México
ISBN 978-607-494-022-0

PRESENTACIÓN

Independientemente del ritmo evolutivo que la humanidad ha tenido a lo largo de su existencia, el conocimiento del entorno ha sido y seguirá siendo fundamental para lograr extraer de él los satisfactores que se requieren no sólo para tener una vida básica, sino también para alcanzar cada vez mejores niveles de satisfacción de necesidades que dignifiquen nuestro ser y estar aquí.

Las exigencias de bienestar generalmente van asociadas con el potencial que brinda el desarrollo de las sociedades mismas y su propio crecimiento. Así, en tanto que a principios del siglo XX el planeta estaba poblado por apenas mil quinientos millones de personas, ahora somos más de seis mil millones distribuidos en el mismo espacio geográfico, lo cual, expresado de otra manera, significa que la densidad de población ha aumentado, los recursos no renovables han disminuido y los requerimientos han sido y seguirán siendo cada vez mayores para satisfacer las demandas de una población creciente.

Lo anterior plantea un gran reto a quienes nos dedicamos al estudio del espacio geográfico en cualquiera de sus disciplinas, en virtud de que nuestra obligación es promover formas de aprovechar de manera cada vez más eficiente los recursos territoriales, a través de la expresión fidedigna de hechos y fenómenos que en dicho espacio se presentan.

Existen evidencias que desde tiempos muy remotos el ser humano ha estudiado y expresado su entorno geográfico de diferentes maneras y con las herramientas disponibles en su momento. Quizá al principio fue suficiente la observación directa y sin instrumentos dado que no se requería de mayores precisiones en virtud de la escasa competencia por los espacios y

entre personas, y si esta observación llevaba asociados errores más o menos grandes, esto no tenía mucha importancia dado que no se afectaba de manera importante ni a unos ni a otros.

Ahora, en momentos de alta competencia por la territorialidad, un concepto perfectamente definido del sentido de propiedad y, por sobre todo ello, el compromiso de preservar la ecología para futuras generaciones, los profesionales y técnicos involucrados en las ciencias de la tierra debemos estar conscientes de que nuestra aportación es fundamental para el desarrollo equilibrado y sostenido de una sociedad demandante de bienes y servicios, que no salen sino del hogar común de todos: nuestro planeta.

Los autores de la publicación que el lector ahora tiene en sus manos, ambos Ingenieros Topógrafos Geodestas, desean hacer una aportación en el campo de estas disciplinas en el sentido de que bajo las exigencias actuales no basta conocer un fenómeno, sino también es necesario contar con elementos que nos permitan saber el nivel de confianza con el cual lo conocemos y es lo que en geodesia y topografía conocemos como tratamiento de errores en las mediciones, tema central de este libro, cuyo fin es colaborar en el mejoramiento de la calidad de los trabajos de este tipo independientemente del campo al cual sirvan y la forma de expresión que tomen.

Este documento es resultado de más de 20 años de experiencia en la práctica profesional y académica de los autores; la primera fundamentalmente en el Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI) y la segunda en la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), y surge precisamente como un curso que se imparte en la División de Educación Continua de la Facultad de Ingeniería de la UNAM, con la demanda suficiente para ser impartido en seis ocasiones y tener que suspenderlo por otros compromisos de los autores.

Pero es precisamente debido a quienes en el ejercicio cotidiano de nuestro quehacer y a quienes como alumnos nos han orientado por el camino del aprendizaje, que nos creemos capaces de exponer ante la comunidad interesada esta aportación documental. Gracias a todos ellos.

Un agradecimiento especial le expresamos a nuestro compañero de trabajo, Raúl A. Gómez Moreno, por su paciente y minuciosa lectura y sugerencias para mejorar el contenido.

Así, amable lector, dejamos este documento en sus manos con la expectativa de que sirva a los fines que tuvo en mente al abrirlo.

Ing. Mario Alberto Reyes Ibarra

mario.reyes@inegi.org.mx

Ing. Antonio Hernández Navarro

antonio.hernand@inegi.org.mx

Aguascalientes, Ags., diciembre de 2008

3. MEDICIÓN ELECTRÓNICA DE DISTANCIAS	49
3.1 Introducción	49
3.2 Principio de funcionamiento de los instrumentos EDM	51
3.2.1 Determinación de las correcciones al EDM	55
3.3 Clasificación de los distanciómetros	60
3.3.1 Distanciómetros electroópticos	61
3.3.2 Distanciómetros de microondas	63
3.3.3 Distanciómetros de ondas largas	65
3.4 Errores en la medición con distanciómetros	66
3.5 Reducción de distancias al horizonte	74
4. EL GONIÓMETRO	77
4.1 Características	77
4.1.1 Nivel tubular de burbuja	78
4.1.2 Anteojo	81
4.2 Clasificación de los goniómetros	86
4.2.1 Goniómetros repetidores	89
4.2.1.1 Medición angular	89
4.2.2 Goniómetros direccionales	91
4.2.2.1 Medición de ángulos	92
4.3 Manipulación y centrado	94
4.4 Fuentes de error en la medición de ángulos	95
4.4.1 Errores instrumentales	96
4.4.2 Errores naturales	112
4.4.3 Errores personales	112
4.4.4 Equivocaciones	113
5. POLIGONACIÓN	115
5.1 Definición y aplicaciones	115
5.1.1 Poligonales cerradas	115
5.1.2 Poligonal abierta geoméricamente pero cerrada analíticamente	116
5.1.3 Poligonal abierta geométrica y analíticamente	117

5.2	Métodos de observación	117
5.2.1	Medición de distancias	117
5.2.2	Medición angular	117
5.2.3	Causas de error y equivocaciones	118
5.3	Anteproyecto	118
5.4	Selección de estaciones	119
5.5	Cálculo de poligonales	121
5.5.1	Proyecciones ortogonales	121
5.5.2	Condición de cierre	122
5.5.3	Métodos de compensación	125
5.5.3.1	Compensación angular	125
5.5.3.1.1	Método arbitrario	125
5.5.3.1.2	Distribución lineal	126
5.5.3.1.3	Ajuste riguroso	126
5.5.3.2	Compensación lineal	127
5.5.3.2.1	Método arbitrario	127
5.5.3.2.2	Método del tránsito	127
5.5.3.2.3	Método de la Brújula o de Bowditch	128
5.5.3.2.4	Método de Crandall	129
5.5.3.2.5	Método de mínimos cuadrados	129
5.5.4	Cálculo por dispositivos electrónicos	148
5.5.5	Causas de error en el cálculo	149
5.5.6	Cálculo de áreas	150
5.5.6.1	Productos cruzados	150
5.5.6.2	Dobles distancias meridianas (DDM)	152
5.5.6.3	Dobles distancias paralelas (DDP)	153
5.5.6.4	Planímetros	153
5.5.6.5	Causas de error	154
5.5.6.6	Propagación del error en el cálculo de superficies	156

6. INTRODUCCIÓN A LA ALTIMETRÍA	159
6.1 Generalidades	159
6.2 Efectos de curvatura terrestre y refracción atmosférica	160
7. APARATOS EMPLEADOS EN NIVELACIÓN	167
7.1 Equipo menor	167
7.1.1 Sapos	167
7.1.2 Miras o estadales	168
7.1.3 Trípodes	169
7.1.4 Conservación y manejo del equipo	170
7.2 Niveles	171
7.2.1 Nivel fijo	171
7.2.2 Nivel basculante	172
7.2.3 Nivel automático	173
7.2.4 Ajuste instrumental	174
7.3 Procedimientos operativos	174
7.3.1 Transporte y colocación del equialtímetro	174
7.3.2 Obligaciones de los estadaleros	175
7.4 Errores sistemáticos en la nivelación diferencial	176
7.4.1 Error de colimación	176
7.4.2 Error por curvatura terrestre y refracción atmosférica	177
7.5 Errores aleatorios en la nivelación diferencial	178
7.5.1 Error de lectura	179
7.5.2 Errores instrumentales	179
7.5.3 Errores en las miras	180
7.5.4 Propagación de errores	181
8. NIVELACIÓN GEOMÉTRICA	187
8.1 Nivelación diferencial	188
8.2 Nivelación de perfiles	190
8.3 Nivelación de terrenos	191
8.3.1 Curvas de nivel	193
8.4 Nivelación de detalles	196

9. NIVELACIÓN TRIGONOMÉTRICA	197
9.1 Concepto general	197
9.2 Observaciones recíprocas	197
9.3 Observaciones no recíprocas	201
9.4 Correcciones a las observaciones	201
9.4.1 Corrección por altura de la señal y del instrumento	201
9.4.2 Corrección por curvatura terrestre y refracción atmosférica	203
9.5 Cálculo de desniveles	204
9.6 Propagación de errores	204
10. CÁLCULO Y AJUSTE DE NIVELACIONES	209
10.1 Cálculo y ajuste de líneas	210
10.2 Cálculo y ajuste de circuitos	211
10.3 Cálculo y ajuste de redes	212
11. SISTEMA DE POSICIONAMIENTO GLOBAL	231
11.1 Posicionamiento con GPS	231
11.1.1 Principio básico	233
11.2 Observables	235
11.2.1 El pseudorango	235
11.2.2 La diferencia de fase	237
11.2.3 Equivalencia de pseudorango y fase portadora	239
11.3 Errores sistemáticos	243
11.3.1 Error en efemérides	243
11.3.2 Error en el reloj satelital	243
11.3.3 Error ionosférico	243
11.3.4 Error troposférico	245
11.3.5 Error de multitrayectoria	246
11.3.6 Resumen de errores sistemáticos	248

11.4	El DOP como medida de la confianza del GPS	248
11.4.1	Introducción	248
11.4.2	La aplicación del DOP	251
11.4.3	Ecuaciones del DOP	252
11.4.4	Exactitud de una solución puntual	257
BIBLIOGRAFÍA		261

1. INTRODUCCIÓN

1.1 DEFINICIÓN DE TOPOGRAFÍA

Desde un punto de vista generalizado, la Topografía puede definirse como la disciplina que tiene bajo su responsabilidad la captación de información física y su procesamiento numérico, para lograr la representación geométrica, ya sea en forma gráfica o analítica, del espacio físico que nos rodea.

1.2 IMPORTANCIA DE LA TOPOGRAFÍA EN LA SOCIEDAD

Es fácil imaginar que el hombre, desde su inicio, ha requerido conocer tanto cualitativa como cuantitativamente el entorno en que se desarrolla, ya que por necesidad de carácter vital está en estrecha interrelación con los elementos que éste contiene, puesto que de él obtiene sus satisfactores, los cuales son cada vez más difíciles de conseguir dado el crecimiento poblacional y la consecuente disminución de recursos explotables.

Así, mientras que en épocas remotas sus necesidades de conocimiento territorial se limitaban a espacios reducidos para efectos de lograr sus satisfactores, en virtud de la abundancia de recursos y la escasa población, en la actualidad la situación se invierte ya que cada vez la población crece y su entorno, la Tierra, no es expandible.

Aspectos como son la comunicación, se establecían en forma directa y no se hacían necesarias grandes obras como las que actualmente se requieren; las necesidades de explotación de

recursos naturales han crecido alarmantemente con serios riesgos de agotarlos si no se establecen los controles y las sustituciones necesarias, los cuales no se pueden dar si se desconoce la magnitud en que dicha explotación se presenta, la dotación de servicios, sobre todo en medianas y grandes concentraciones humanas, entraña un complejo conocimiento de la distribución espacial de los suministros, los conductos para hacerlos llegar a los usuarios a los cuales se dirigen dichos servicios.

En áreas urbanas, problemas que toman una gran magnitud desde el punto de vista espacial son:

- Hacer llegar de manera suficiente y oportuna los alimentos desde donde se producen o procesan hasta los centros de distribución o consumo, para lo que se requieren redes eficientes de sistemas de comunicación como son carreteras, vías férreas, puentes, etcétera.
- Construir habitaciones, calles, avenidas, centros de recreo, etcétera.
- Dotar a los habitantes de servicios tales como: agua, luz, drenaje, redes de telefonía, entre tantos otros, que a su vez requieren de la construcción de presas, canales, ductos, túneles, líneas de transmisión, etcétera.
- Otro gran problema es el relacionado con aspectos de la propiedad inmueble, para fines de asegurar la tenencia de la tierra y las correspondientes contribuciones fiscales, que toma una gran relevancia en las grandes ciudades donde el valor del terreno es sumamente alto.

En el medio rural no es menos importante el conocimiento del espacio físico, ya que si bien la dotación de servicios puede ser

menos compleja, es necesario conocer óptimamente la distribución y cantidad de territorios aprovechables en función de que es de ellas de donde se obtienen la mayoría de los alimentos y materias primas necesarias para los procesos industriales que, finalmente son para el bienestar humano.

Las áreas marítimas son importantísimas fuentes de abastecimiento de múltiples productos, a las que se están dirigiendo grandes esfuerzos, que no serían bien aprovechados de no tener confiables descripciones topográficas de los espacios factibles de aprovechamiento.

Tómense éstos sólo como algunos ejemplos no suficientemente explicados, pero seguramente bien comprendidos de porque la sociedad actual, y principalmente quienes planean, construyen o mantienen la infraestructura para el aprovechamiento de los recursos o controlan su explotación, están interrelacionados con la descripción topográfica de nuestro entorno, la tierra, el país, el estado, municipio o aquél de interés particular para cierto grupo humano.

Esta situación obliga a todos los involucrados en la disciplina de la Topografía a mantenerse actualizados, a fin de colaborar eficaz y eficientemente en el cumplimiento de su responsabilidad al desarrollo de nuestro país.

1.3 TIPOS DE LEVANTAMIENTOS TOPOGRÁFICOS

Por cuanto toca a sus objetivos, los levantamientos topográficos pueden clasificarse en:

- Levantamientos de propiedades, que involucran trabajos como: determinación de linderos, derechos de vía o adquisición de datos para elaborar planos oficiales o en la subdivisión de tierras.
- Levantamientos catastrales, con objeto de registro y control de la tenencia de la tierra.
- Levantamientos de construcción, en los que se involucran obras como fraccionamientos, carreteras, vías férreas, canales, ductos y líneas de transmisión.
- Levantamientos subterráneos, indispensables en la explotación minera y en la construcción de túneles y lumbreras.
- Levantamientos de apoyo terrestre para Fotogrametría, que dan la expresión escalar a las fotografías aéreas tomadas con fines métricos.
- Levantamientos hidrográficos, los cuales comprenden las operaciones requeridas para obtener la información topográfica de cuerpos de agua y valorar factores que afectan la navegación y otros aprovechamientos hidráulicos.

El levantamiento topográfico más “típico” es aquel que se efectúa para usos múltiples y que tiene como objetivo la representación en un plano de los detalles planimétricos y altimétricos, y que pudiera ser resultado o usarse conjuntamente con algunos o todos los tipos de levantamientos.

1.4 HISTORIA DE LA TOPOGRAFÍA EN MÉXICO

Resultaría ciertamente difícil realizar una reseña, aunque está fuese breve de las actividades estrictamente topográficas en nuestro país, ya que en épocas pasadas no existía una diferencia absoluta entre trabajos geodésicos, cartográficos, topográficos y geográficos, por lo cual en esta sección, de manera ilustrativa se tratarán conjuntamente los hechos relevantes de estas disciplinas.

Sin lugar a dudas, la actividad topográfica en México se remonta a la era prehispánica y prueba de ello lo constituyen la disposición geométrica de ciudades como Teotihuacán, Chichén Itza, Palenque y muchas otras que demuestran los conocimientos de nuestros antepasados en la materia.

Durante la conquista, fue levantado el primer plano de la ciudad de México por Alonso García Bravo y Bernardino Vásquez Tápia auxiliándose por 2 aztecas. El segundo plano fue elaborado por Juan Gómez de la T en 1628.

En 1611 Alonso Arias realizó medidas de la longitud desde la laguna de Texcoco hasta el llamado Salto del Río Tula para efectuar el desagüe del Valle de México.

Trabajos posteriores de alta relevancia son los realizados por Carlos de Sigüenza y Góngora y José Antonio Alzáte y Ramírez, los cuales dieron origen al Nuevo Mapa Geográfico de Norteamérica.

No pueden dejar de mencionarse los trabajos realizados por Joaquín Velázquez de León, de los cuales sobresalen la Carta Geográfica de Nueva Galicia, Nueva Vizcaya, Sonora, Sinaloa y

California y evidentemente los trabajos de triangulaciones y nivelaciones del Valle de México, los cuales fueron después utilizados por Luis Martín para el Mapa del Valle de México y de la Montañas que lo rodean, así como mencionados por Alejandro Von Humbolt en el Atlas Geográfico y los Ensayos Políticos en el Reino de la Nueva España publicado en París en 1811.

Después del periodo Independiente hubo bastante actividad topográfica y geodésica, de entre los que sobresale la compilación realizada por Antonio García Cubas, la cual dio por resultado el Atlas Estadístico e Histórico de la República Mexicana, publicado en 1856 por el Ministro de Economía y Obras Públicas. En 1869 se levantó el primer plano de la Ciudad de México de la Época Independiente y en 1880, el segundo.

El Ingeniero y Geógrafo Francisco Díaz Covarrubias proporcionó el apoyo geodésico para la elaboración de la Carta Hidrográfica del Valle de México.

En 1872 la Comisión Geográfica Exploradora estableció posicionamiento por métodos astronómicos en lugares importantes de la República Mexicana.

A partir de 1899 se inició un periodo dinámico en esta actividad, pues mientras se formaba la Comisión Geodésica Mexicana, bajo la cual quedaba la responsabilidad de los trabajos gravimétricos y de posicionamiento horizontal y vertical del País, en el Distrito Federal se implantaba un Sistema Catastral formado por redes trigonométricas de cuatro ordenes, líneas de poligonación, de nivelación y elaboración de planos para usos múltiples. Durante ese mismo año se realizaron poligonales en Correo Mayor, delegación Guadalupe Hidalgo en 1900, Azcapotzalco en 1901,

Av. Central y Av. Dios en 1902, en la Calzada de Niño Perdido en 1906 y Delegación Tlalpan en 1907. En 1905 la Dirección General de Catastro del DF dictó las instrucciones para las operaciones topográficas.

Desde principios del siglo XX, diversas dependencias gubernamentales desarrollaron una fuerte actividad topográfica, geodésica y cartográfica, generalmente dirigida a la solución de problemas específicos que caían dentro de sus áreas de responsabilidad.

Un intento de uniformar los trabajos topográficos se dio al crear en 1925 el Consejo Gubernamental de la República de Estudios Topográficos, cuyo propósito era establecer normas y especificaciones para los estudios y coordinar los diversos proyectos.

Otros organismos que en diferentes épocas han desarrollado importantes trabajos han sido el Comité Coordinador de Estudios Geográficos de la República, la Comisión Coordinadora Intersecretarial de Estudios, el Departamento Cartográfico Militar, el Departamento de Estudios Geográficos y Climatológicos que derivó en la que anteriormente se llamó Dirección de Geografía y Meteorología.

En 1968 se fundó la Comisión de Estudios del Territorio Nacional y Planeación, siendo uno de sus objetivos principales producir la Carta Topográfica de la República Mexicana escala 1:50 000 con información altimétrica por medio de curvas de nivel cada 20 metros.

Con la creación en 1992 de la Dirección General de Cartografía Catastral, el ámbito de la Topografía, Geodesia y Cartografía

experimentaron un crecimiento acelerado, ya que dicha Dirección General es la encargada de los trabajos de medición y representación de poco más de 1 000 000 de kilómetros cuadrados para el Programa de Certificación de Derechos Ejidales y Titulación de Solares (PROCEDE), que es la superficie que abarca la propiedad social en nuestro país.

Actualmente, el INEGI es la institución oficial responsable de normar el funcionamiento del Sistema Nacional de Información Geográfica, promover su integración y desarrollo, establecer las políticas, normas y técnicas para uniformizar la información geográfica del país, efectuar trabajos cartográficos y geodésicos diversos, entre otras actividades que la Ley le confiere.

Muchas son las instituciones públicas y privadas que actualmente desarrollan trabajos de carácter topográfico, geodésico, cartográfico y geográfico y por lo tanto, sería difícil enumerarlas, pero valga esta breve reseña para demostrar la vasta tradición que en la materia se ha desarrollado en nuestro país, resultante del esfuerzo permanente de actualizar la información que describe gráficamente nuestro entorno, para el mejor aprovechamiento de los recursos que han de dar satisfactores a nuestras necesidades crecientes.

Es obligación nuestra y de generaciones de profesionistas involucrados por venir, mantenernos permanentemente actualizados en todo lo que apoye estas actividades, a fin de disponer siempre de la información confiable, veraz y oportuna que sirva a los planificadores del desarrollo nacional en la toma de decisiones adecuadas, y que la información que nosotros aportamos profesionalmente, impulse verdaderamente este desarrollo.

2. TEORÍA DE LA MEDICIÓN Y LOS ERRORES

2.1 LAS MEDICIONES EN GENERAL

La palabra medir es un verbo transitivo que proviene del latín metiri. Esta acción consiste en comparar una cantidad con sus respectivas unidades, con el fin de averiguar cuantas veces la primera contiene a la segunda. Así pues se necesita una escala de comparación. Casi todo los países del mundo emplean el Sistema Internacional de Unidades (SI¹), el cual se basa en el Sistema Métrico Decimal.

Las unidades más usadas en el ámbito de la Topografía son las de longitud, áreas, volúmenes y angulares. La unidad de longitud empleada en el SI es el metro (m). Originalmente se definió como la diezmillonésima parte de un cuadrante terrestre, representado por dos marcas en una barra metálica hecha de una aleación de 90% de platino y 10% de iridio bajo ciertas condiciones físicas. Dado que existe cierto riesgo de inestabilidad en la barra patrón de metal, en octubre de 1960, en la conferencia General de Pesas y Medidas, se adoptó una nueva definición del metro, en la actualidad se tiene que el metro es igual a la longitud de 1 650 763.73 ondas de la luz rojo naranja producida por la combustión del elemento criptón 86. La nueva definición permite a la industria manufacturar instrumentos de medición confiables

¹ En algunas otras publicaciones, sobre todo cuando se trata de traducciones del inglés, el lector podrá encontrar que las siglas SI corresponden al Sistema Inglés de unidades; sin embargo, en este texto no se hace ninguna referencia a dicho sistema de unidades.

sin tener que recurrir a la barra patrón para comparar los dispositivos (por ejemplo cintas). En las unidades de área el SI define al metro cuadrado (m^2) como el área de la superficie contenida en un cuadrado de 1 metro por lado, generalmente en Topografía se emplea la hectárea (ha) equivalente a 10 000 m^2 . En cuanto a la unidad de volumen el SI define el metro cúbico (m^3) como el volumen contenido en un cubo de 1m por lado. La unidad angular definida por el SI para ángulos planos es el radian (rad) igual al ángulo central subtendido por un arco de circunferencia de longitud igual al radio. Los grados, minutos y segundos sexagesimales son unidades permitidas en el SI para medir ángulos planos. Obviamente $2\pi\text{rad}=360^\circ$, $1\text{rad}=57^\circ 17' 44'' 8$. En algunos países se emplean grados centesimales para subdividir a la circunferencia, así tenemos que $2\pi\text{rad}=400^\circ$, $1^\circ=100^c$ y $1^c=100^{cc}$.

En muchas ocasiones se piensa en el acto de medir como un hecho unitario, pero esta acción es la integración de una serie de operaciones diferenciales, que incluyen aspectos como el centrado, la puntería, la comparación, el ajuste y la lectura, por citar algunos de ellos y que con la suma de todas estas, se logre una cantidad numérica que representa la medida buscada.

Consideremos, por ejemplo, la tarea relativamente simple de medir la distancia entre dos puntos apartados unos 20 metros con una cinta de acero de 30 m, con lo que se tendrán las siguientes acciones diferenciales:

- 1) Los cadeneros trasero y delantero toman sus posiciones cerca de sus respectivas estaciones, sosteniendo la cinta sobre el terreno y aproximadamente en línea con las estaciones.

- 2) El cadenero trasero suspende su plomada sobre la cinta ajustando y deteniendo el cordel sobre la marca de 0 m.
- 3) El cadenero trasero centra su plomada sobre la estación.
- 4) El cadenero delantero suspende su plomada sobre la cinta, con el cordel de la plomada cercano a la marca de 20 m.
- 5) Los dos cadeneros aplican tensión a la cinta.
- 6) El cadenero delantero hace puntería centrando la plomada sobre la estación.
- 7) El cadenero delantero hace la lectura.

Después de estos 7 pasos, que cada uno se puede dividir en otros tantos, se obtiene la medida buscada. Para algunos propósitos el valor obtenido en el paso (7) puede ser satisfactorio; para otros, este valor deberá ser corregido por factores meteorológicos, tensión, catenaria, etc. El grado de refinamiento de los datos observados, el nivel de apreciación, se conoce como resolución.

Con el advenimiento de las computadoras electrónicas, se ha desarrollado el preanálisis de medidas topográficas, que es una técnica que permite evaluar los componentes de una medición y así elaborar los proyectos de medición, estableciéndose la cantidad de medidas que se deben hacer, las tolerancias aceptables en las medidas, la selección del instrumento adecuado y los procedimientos de medición.

2.1.1 Cifras significativas

Al registrarse medidas, una indicación de la exactitud lograda es el número de dígitos (cifras significativas) que se anotan. Por

definición el número de cifras significativas en cualquier cantidad, son todos los dígitos positivos (verdaderos) más uno que es estimativo (dudoso) y por lo tanto cuestionable. Si en la cantidad 37.824 los tres primeros dígitos son verdaderos y los dos últimos dudosos, esa cantidad se debe expresar en cuatro cifras significativas, por lo tanto será 37.82.

El número de cifras significativas en una cantidad directamente medida no es difícil de determinar, esencialmente depende de la cuenta menor del instrumento empleado (resolución). Por ejemplo, si se mide una distancia con una cinta graduada al centímetro con estimación al milímetro, y la lectura tomada es 462.513 m, tiene seis cifras significativas, 462.51 son exactas y 0.003 es estimada.

2.1.2 Redondeo de números

Redondear un número es el proceso de suprimir uno o más dígitos para que la respuesta sólo contenga aquellos que sean significativos o necesarios en cálculos subsecuentes. El error mínimo en el proceso de redondeo se consigue aplicando las siguientes reglas:

- i) Si se requieren k cifras significativas, se descartan todos los dígitos a la derecha del dígito $k+1$.
- ii) Se examina el dígito $k+1$.
 - a) Si está entre 0 y 4 se descarta; por ejemplo 12.24421 redondeado a 4 cifras significativas será 12.24

- b) Si está entre 6 y 9 se descarta y se incrementa el dígito k en 1; por ejemplo 1.376 redondeado a 3 cifras significativas será 1.38
- c) Si es 5 y k es par se descarta; por ejemplo 12.345 redondeado a 4 cifras significativas será 12.34
- d) Si es 5 y k es non se descarta y se incrementa el dígito k en 1; por ejemplo 12.3435 redondeado a 5 cifras significativas será 12.344

2.1.3 Métodos de cálculo

En las cantidades determinadas a partir de cálculo, el número de cifras significativas no es un proceso tan elemental de establecer como en el caso de las mediciones determinadas directamente. Existen algunas reglas generales que se pueden aplicar a estas cantidades. Las dos reglas más importantes son para las operaciones aritméticas de adición (o substracción) y multiplicación (o división).

En el proceso de adición, en la suma final se deben de tomar el número de cifras significativas que incluya el valor que tenga el menor número de decimales. Por ejemplo en la suma:

$$\begin{array}{r}
 165.21 \\
 49.7 \\
 65.495 \\
 \hline
 2.2167 \\
 \hline
 282.6217
 \end{array}$$

se deberán tomar cuatro cifras significativas ya que en la cantidad 49.7 el valor 0.7 es estimado, y así el valor de la suma será 228.6.

Para la multiplicación, el número de cifras significativas en el producto deberá ser igual al número de cifras significativas del término que tenga el menor número de ellos, los valores constantes no se deben considerar en el proceso, así por ejemplo en:

$$2.15 \times 11.1234 = 23.91531$$

se deben tomar 3 cifras significativas (2.15) y por lo tanto el producto será igual a 23.9.

Con mucha frecuencia se confunde el número de cifras significativas con el número de decimales en un valor. En ocasiones puede tener que usarse cifras decimales para conservar el número correcto de cifras significativas, pero los decimales no indican por sí mismos las cifras significativas.

Debe quedar claro, que un número entero también tiene un cierto número de cifras significativas. Por ejemplo, consideremos el caso de la velocidad de la luz en el vacío, la cual en forma aproximada se expresa como cercana a los 300 000 kilómetros por segundo. Si consideramos este valor tal cual, se podría pensar que tiene seis cifras significativas, de las cuales las primeras cinco son verdaderas y la unidad de kilómetros es estimada. Otra forma de establecer el número de cifras significativas de un valor, ya sea entero o real, es a través de la desviación estándar del valor. Continuando con el ejemplo de la velocidad de la luz Albert Michelson, quien realizó trabajos experimentales para determinar la velocidad de la luz por más de 40 años, encontró en 1879 que las ondas electromagnéticas se propagaban a $299\,910 \pm 50$ km/s. En este caso se puede esperar que el valor de c sea correcto en sus tres primeras cifras. Hacia 1925 se estableció que la velocidad de la luz

era de $299\,778 \pm 20$ km/s; este valor, garantiza que las primeras cuatro cifras son verdaderas. En 1947 el Dr. Erik Bergstrand estableció el valor de c como $299\,793.9 \pm 2.7$ km/s; con lo que se tiene que las primeras cinco cifras son verdaderas. En 1948 los trabajos de Bergstrand dieron por resultado $299\,793.1 \pm 0.26$ km/s, asegurándose nuevamente que las cinco primeras cifras del valor de la velocidad de la luz son verdaderas. En la actualidad el valor aceptado para c es de $299\,792.458 \pm 0.001$ km/s, lo que garantiza los ocho primeros valores.

En Topografía se encuentran 4 tipos de problemas relacionados con cifras significativas:

- 1) Las medidas de campo se presentan con un número específico de cifras significativas, con lo cual se indica el número correspondiente que debe tener un valor calculado en base a ellas. Para evitar problemas es recomendable llevar por lo menos un dígito más de los que estrictamente se necesitan, y al terminar los cálculos redondear el resultado al número correcto de cifras significativas. Si se usan logaritmos o funciones trigonométricas, debe tenerse siempre una cifra más que el número de cifras significativas que se desean tener en la respuesta.
- 2) Puede haber un número implícito de cifras significativas; por ejemplo, la longitud de un predio puede estar especificado como de 100 m, pero al delimitarlo, tal distancia se medirá al centésimo de metro más próximo y no al medio metro más cercano.
- 3) Cada factor puede no ocasionar una variación igual. Por ejemplo, si se va a corregir una cinta de acero de 30.00 m de longitud por un cambio de temperatura de 10° C, uno de

estos números tiene cuatro cifras significativas mientras que el otro sólo tiene dos. La variación de 10° C en la temperatura cambia la longitud de la cinta en 0.002 m. Por lo tanto, para este tipo de cálculos si se justifica una longitud corregida de la cinta expresada en cinco cifras significativas.

- 4) En los cálculos realizados con calculadoras y computadoras se obtienen más dígitos que el número de cifras significativas requeridas, además de que las cantidades se ven afectadas por errores por truncamiento y redondeo.

2.2 TIPOS DE MEDICIONES QUE SE REALIZAN EN TOPOGRAFÍA

Como es claro de los incisos anteriores, la materia prima de la Topografía son las mediciones. Independientemente de cual sea

la finalidad de los trabajos topográficos, en ellos se realizan cinco tipos de mediciones:

- 1) distancias horizontales,
- 2) distancias verticales,
- 3) distancias inclinadas,
- 4) ángulos horizontales y
- 5) ángulos verticales.

Los cuales se pueden determinar directa o indirectamente. En la figura 2-1 se ilustran los cinco tipos de mediciones.

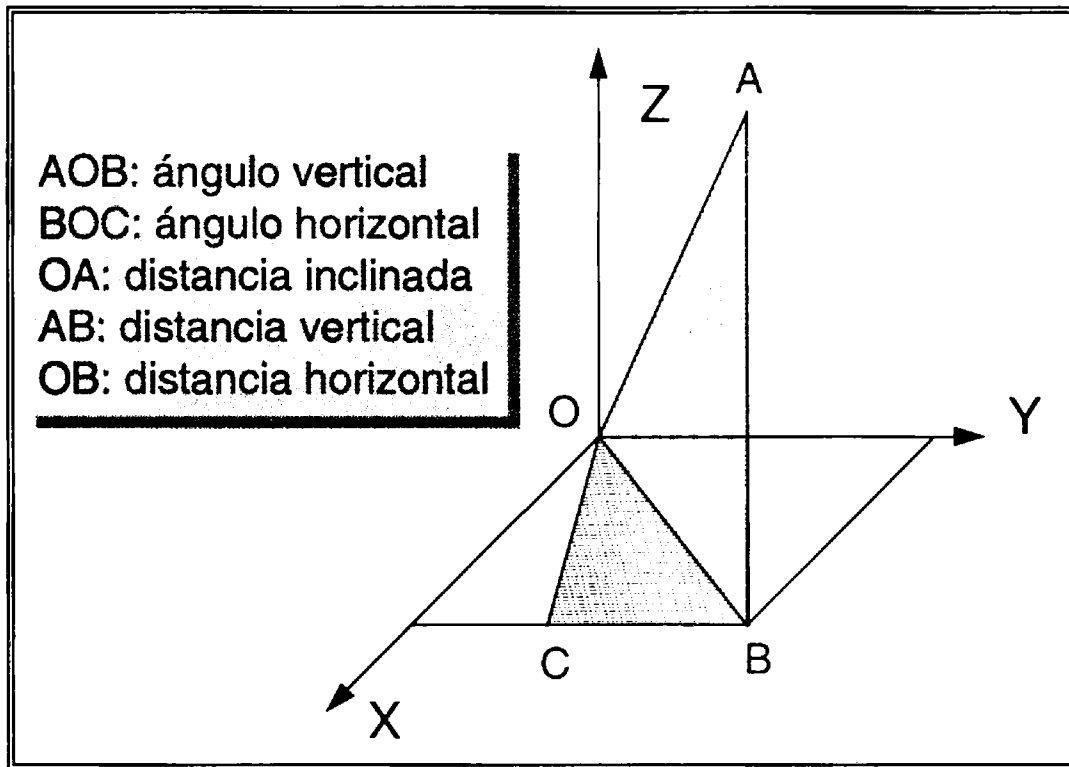


Figura 2-1. Mediciones que se realizan en topografía

2.2.1 Mediciones directas

Cuando el observador puede comprar directamente el instrumento de medición contra el fenómeno a medir, se dice que obtienen mediciones directas (figura 2-2).

2.2.2 Mediciones indirectas

Cuando la magnitud física de un objeto no puede determinarse aplicando los instrumentos de medición directamente sobre él, se efectúa una medición indirecta. Por lo tanto, se determina el valor buscado por medio de una relación con algún otro valor conocido. Por ejemplo, si se desea conocer la altura de una torre (figura 2-3), esta se puede determinar midiendo la longitud de una línea y los

ángulos verticales de los extremos, con estos valores y las fórmulas clásicas de la trigonometría fácilmente puede ser deducida la altura.

En la práctica de la Topografía moderna, todas las mediciones de distancias se realizan por métodos indirectos, ya que los distanciómetros electrónicos comparan un patrón, cantidad conocida, contra el tiempo que tarda una señal en ser reflejada y aplicando relaciones matemáticas, se determina la distancia. Estos conceptos serán presentados con mayor detalle en el capítulo 3.

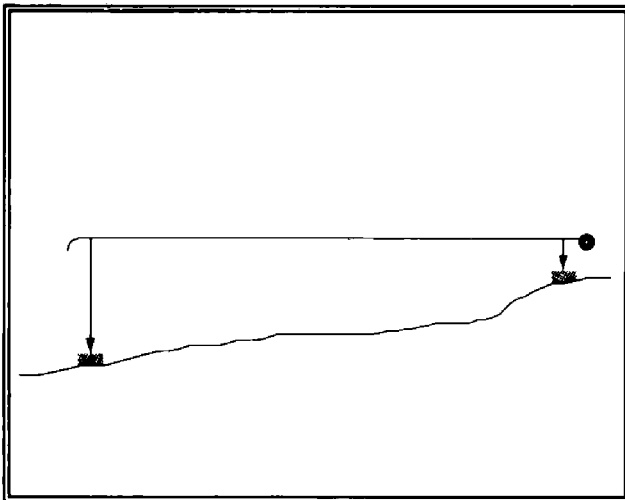


Figura 2-2. Medición directa

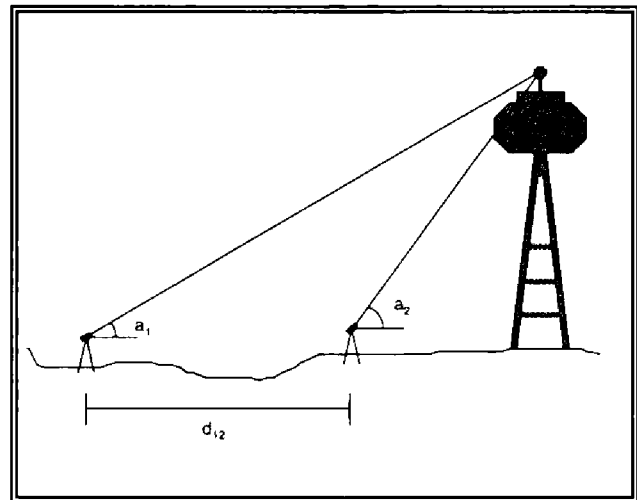


Figura 2-3. Medición indirecta

2.3 ERRORES EN LAS MEDIDAS

Puede establecerse incondicionalmente que:

- 1) ninguna medida es exacta,
- 2) toda medida contiene errores,
- 3) nunca se puede conocer el valor verdadero de una dimensión, y por lo tanto

- 4) el error exacto que hay en una medida siempre será desconocido.

Estos hechos se demuestran con el ejemplo siguiente:

Cuando se mide una distancia con una cinta graduada al decímetro, la distancia sólo podrá apreciarse hasta el medio decímetro dada la resolución de la cinta. Si disponemos de una cinta graduada al centímetro de igual forma sólo se puede apreciar al medio centímetro, lográndose un valor diferente y así sucesivamente (figura 2-4).

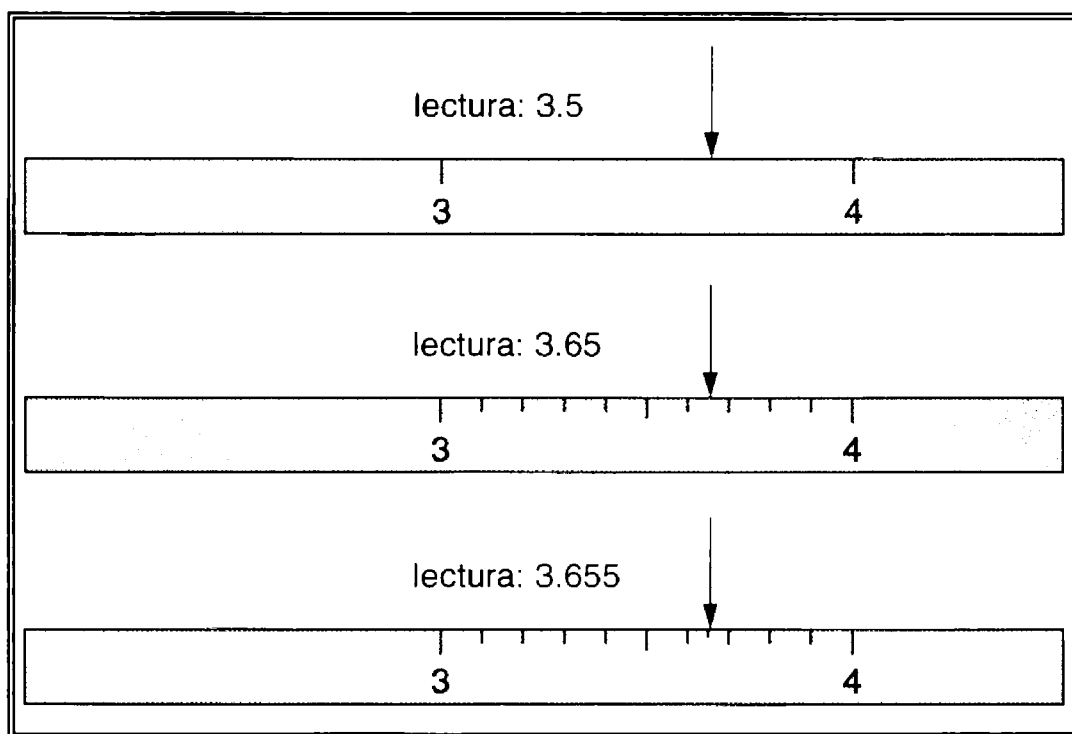


Figura 2-4. Resolución de las medidas

Las equivocaciones, errores gruesos, ocurren por una mala comprensión del problema, por descuido o por un criterio deficiente. Las equivocaciones se detectan mediante la

comprobación sistemática de todo trabajo y se eliminan rehaciendo parte del mismo o bien todo él.

Las equivocaciones pequeñas son difíciles de detectar y por lo tanto se deben tratar como errores.

2.3.1 Clases de errores en las medidas

En las mediciones aparecen tres clases de errores:

- 1) Errores naturales.
- 2) Errores instrumentales.
- 3) Errores personales.

Los errores naturales, son todos aquellos imputables a los cambios que producen variaciones en las condiciones físicas en las que fue calibrado un instrumento o que no permiten el correcto manejo del mismo.

Los errores instrumentales resultan de cualquier imperfección en la fabricación, ensamble y ajuste de los instrumentos, así como del movimiento de sus partes.

Por último los errores personales son ocasionados por las limitaciones de los sentidos, o por condiciones físicas de las personas encargadas de hacer las observaciones.

Cabe hacer mención que estos tres errores se pueden presentar juntos o separados, al efectuarse las mediciones.

2.3.2 Tipos de errores

Los errores que contienen las medidas son de dos tipos:

- 1) Errores sistemáticos.
- 2) Errores accidentales.

Los errores sistemáticos, también conocidos como errores acumulativos, se comportan de acuerdo a leyes físicas susceptibles de ser modelados matemáticamente, por lo que su magnitud puede calcularse y su efecto eliminarse.

Los errores accidentales son los que quedan después de haberse eliminado las equivocaciones y los errores sistemáticos. Son ocasionados por factores que quedan fuera del control del observador, obedecen a las leyes de la probabilidad y se conocen también con el nombre de errores aleatorios. Por su carácter de aleatorios, siempre están presentes y su efecto no puede ser eliminado.

La magnitud y los signos algebraicos de los errores aleatorios dependen por completo del azar y no hay forma alguna de calcularse, a estos errores también se les llama compensatorios, ya que tienen la misma oportunidad de tener signo positivo o negativo.

2.3.3 Magnitud de los errores

La diferencia entre dos valores medidos de una misma cantidad o la diferencia entre el valor medido y el valor conocido de esa misma cantidad recibe el nombre de discrepancia, la cual si es

pequeña sólo indica que los errores aleatorios son pequeños y que no existe ninguna equivocación gruesa. Lo anterior no revela la magnitud de los errores aleatorios, por que como se puntualizó en la sección 2.1, la acción de medir no es un acto unitario, sino la integración de una serie de operaciones diferenciales, con lo que el error en la medida es la suma de una serie de errores aleatorios que intervienen a lo largo de todo el proceso de medir.

La precisión es el grado de posibilidad de repetición entre varias medidas de la misma cantidad, y se basa en el refinamiento de las mediciones y en el tamaño de las discrepancias. El grado de precisión alcanzable depende de la sensibilidad del equipo y la destreza del observador. Una serie de observaciones pueden ser precisas sin ser exactas. Por ejemplo, si se midió una distancia con una cinta de 30 m la cual está mal graduada y en realidad mide 31 m, todas las distancias serán sistemáticamente mayores, si las discrepancias son pequeñas, la medición será precisa pero nunca exacta.

2.3.4 Minimización de los errores

Como se indicó en la sección 2.3 la magnitud de los errores aleatorios no se puede determinar. En el caso de los errores gruesos o equivocaciones sólo se pueden eliminar si se descubren, esto se logra haciendo varias determinaciones de las cantidades medidas y aplicando una metodología que permita aislarlas.

Cuando se detecta una equivocación, generalmente es mejor repetir la medición. Sin embargo, si se dispone de un número suficiente de medidas de la cantidad que si están de acuerdo entre sí, puede descartarse el valor que sea divergente del resultado.

Debe considerarse el efecto que ocasionaría el valor antes de descartarlo. Raras veces es conveniente cambiar un número registrado, aunque parezca provenir de una simple transposición de cifras.

Los errores sistemáticos pueden calcularse y es posible corregir las observaciones apropiadamente, o bien, usar un procedimiento de campo que elimine automáticamente estos errores.

Así pues, una vez detectadas las equivocaciones y los errores sistemáticos sólo quedan los errores aleatorios, los cuales se deben tratar con métodos estadísticos.

2.3.5 Errores aleatorios

Cuando se hacen mediciones físicas, es necesario registrar o anotar valores leídos en escalas, carátulas, calibradores o dispositivos semejantes. Es característico de una medición el que no se pueda hacer exactamente, y que por lo tanto siempre contenga un error aleatorio. El tamaño de ese error puede reducirse por refinamiento del equipo empleado y de los procedimientos aplicados.

Por conveniencia, se usará en el resto de este capítulo la palabra error para referirse únicamente a los errores aleatorios.

2.3.5.1 Alcance de la probabilidad

En la sección 2.3.2 se mencionó que los errores son gobernados por los principios de la probabilidad.

Para exponer el principio de como ocurren los errores, supóngase que se realiza la medición de una distancia de 10.46 m con una escala en la que se puede estimar una lectura al centésimo, y que es correcta en +0.05 m. En este caso, el valor real de la medida está comprendido entre 10.41 y 10.51. En consecuencia, hay 11 posibilidades para la respuesta correcta. La probabilidad de que cualquier respuesta sea la correcta es de 1/11 o 0.0909.

VALOR DEL ERROR	NÚMERO DE POSIBILIDADES	PROBABILIDAD
±0.10	2	0.0083
±0.09	4	0.0165
±0.08	6	0.0248
±0.07	8	0.0330
±0.06	10	0.0413
±0.05	12	0.0496
±0.04	14	0.0578
±0.03	16	0.0661
±0.02	18	0.0744
±0.01	20	0.0826
0.00	11	0.0909
	121	

Tabla 2-1. Probabilidad para dos medidas

Considérese una línea que requiere que se hagan dos medidas con esta escala, teniendo cada una el mismo error posible. La respuesta, que es la suma de dos medidas, puede ser cualquier par de las 11 posibilidades para cada medición separada, teniendo todas, igual probabilidad de ser correctas. Si un evento puede ocurrir de n maneras y otro de r formas, los dos eventos pueden

ocurrir de nr formas. En las condiciones supuestas hay 121 posibilidades. La diferencia entre la suma de las dos medidas y el valor real estará comprendida entre -0.10 y $+0.10$. Sólo un par de valores posibles pueden dar la diferencia -0.10 , para el error de -0.09 de dos formas, continuando el análisis se llega a la tabla 2-1. Haciendo el análisis para tres medidas con una amplitud de -0.15 y $+0.15$, se tienen 1331 posibilidades. En la Tabla 2-2 se presenta el desarrollo para este caso.

VALOR DEL ERROR	NÚMERO DE POSIBILIDADES	PROBABILIDAD
± 0.15	2	0.0008
± 0.14	6	0.0023
± 0.13	12	0.0045
± 0.12	20	0.0075
± 0.11	30	0.0113
± 0.10	42	0.0158
± 0.09	56	0.0210
± 0.08	72	0.0270
± 0.07	90	0.0338
± 0.06	110	0.0413
± 0.05	132	0.0496
± 0.04	150	0.0563
± 0.03	164	0.0616
± 0.02	174	0.0654
± 0.01	180	0.0676
0.00	91	0.0684
	1331	

Tabla 2-2. Probabilidad para tres medidas

Graficando los valores de las columnas 1 y 3 de la Tabla 2-2 (figura 2-5), se obtiene la distribución de los errores. Uniendo los centros de cada barra se obtiene la curva de probabilidades. La forma acampanada de esta curva es característica de los errores con distribución normal, y por ello se le denomina a menudo curva normal de distribución de errores. En estadística se le conoce como curva normal de densidad, porque muestra las densidades de los errores de diversas magnitudes.

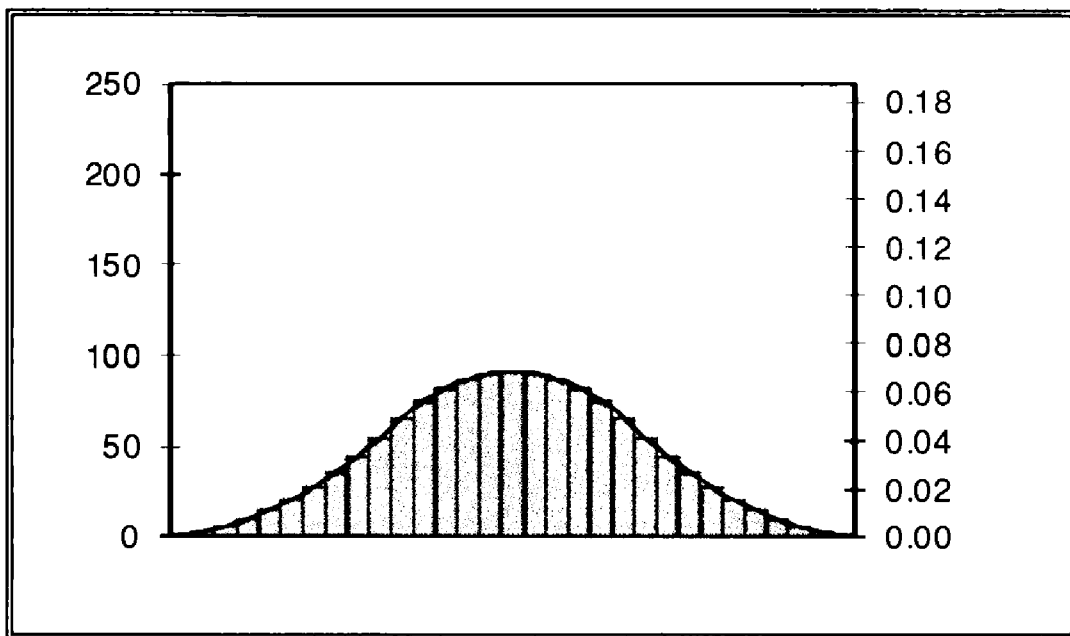


Figura 2-5. Histograma y curva de probabilidad de errores correspondientes a 3 medidas con un error máximo de ± 0.05

Cada barra del histograma de la figura 2.5 tiene un ancho igual a un incremento del error de 0.01, y la altura representa la probabilidad del error. El área comprendida bajo toda la curva de probabilidad representa la suma de todas las probabilidades de la columna 3, o sea, uno. También, el área total comprendida entre

dos ordenadas cualesquiera, es igual a la suma de las áreas parciales, o bien, probabilidades, de que se encuentren entre ellas.

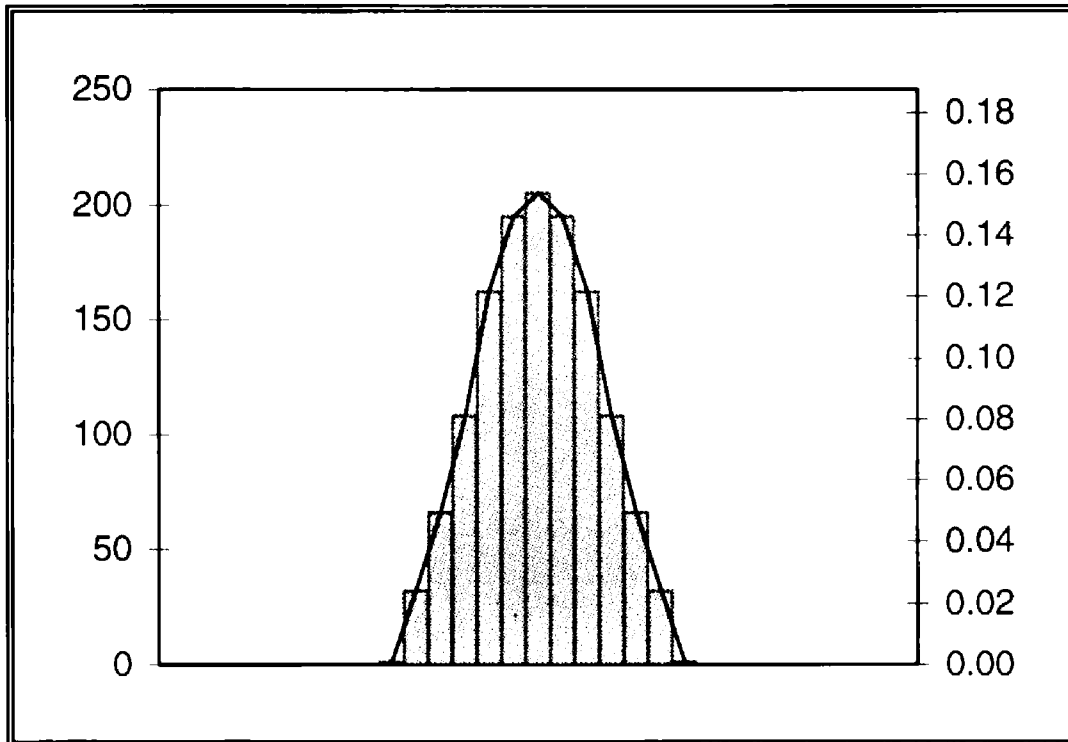


Figura 2-6. Histograma y curva de probabilidad de errores correspondientes a 3 medidas con un error máximo de ± 0.02

Si se hubieran tomado las mismas medidas del ejemplo anterior con un error posible más pequeño, mayor precisión, la curva de probabilidad sería similar a la de la figura 2-6. Esta curva muestra que hay un mayor porcentaje de valores con errores pequeños y menos medidas que contengan errores de gran tamaño. Para el caso contrario, lecturas con menor precisión, se produce un menor porcentaje de valores con errores pequeños y un menor porcentaje de errores grandes (figura 2-7).

Después de esto queda claro que la probabilidad, a través de la distribución normal, nos proporciona elementos para evaluar la

posibilidad de ocurrencia de los errores aleatorios y así analizar las medidas topográficas que ya se han hecho, a fin de comprar los resultados con los requisitos de especificación o para establecer los procedimientos y especificaciones destinadas a obtener los resultados deseados (preanálisis).

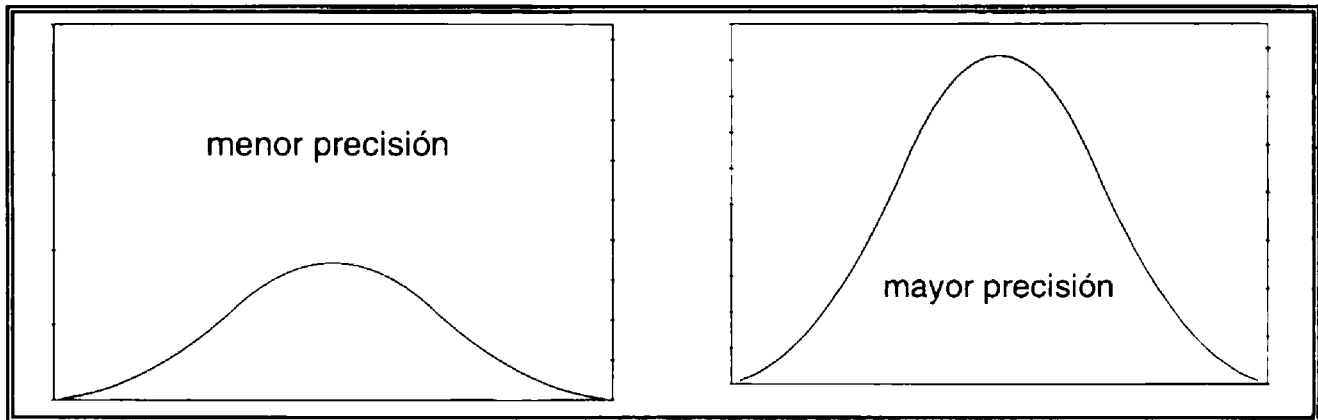


Figura 2-7. Diferentes precisiones

La aplicación de las diversas ecuaciones de la probabilidad debe efectuarse con criterio y precaución, ya que dichas ecuaciones se plantean en base a la consideración de un número infinito de errores, mientras que en Topografía se realizan solamente un número finito y reducido de medidas.

2.3.5.2 Ley de probabilidad

Partiendo del análisis de los datos de la sección anterior y de las curvas de las figuras 2-5, 2-6 y 2-7, se pueden establecer las leyes generales de la probabilidad:

- 1) Los errores pequeños ocurren con mayor frecuencia que los grandes; es decir, son más probables.

- 2) Los errores grandes ocurren con poca frecuencia y son, por lo tanto, menos probables; en el caso de los errores de distribución normal, los anormalmente grandes pueden ser equivocaciones en lugar de errores.
- 3) Los errores positivos y negativos de la misma magnitud, ocurren con igual frecuencia es decir, son igualmente probables.

2.3.5.3 Distribución normal

De todas las distribuciones de probabilidad existentes, la más importante, es la distribución normal. Esta distribución tiene gran aplicación en la ciencia, la tecnología y la industria; se usa como modelo básico para todas las medidas físicas, incluyendo por su puesto las mediciones topográficas.

La función de densidad de la distribución normal está dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left\{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}} \quad (2-1)$$

para $-\infty < x < \infty$, donde:

σ = desviación estándar.

π = 3.141592654.

e = 2.718281828.

μ = media.

Las cantidades μ y σ son los parámetros de la distribución y serán discutidas en detalle en las secciones 2.3.5.4 y 2.3.5.5.

La función de distribución de la distribución normal está dada por:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} du \quad (2-2)$$

Estas dos funciones se presentan gráficamente en la figura 2-8. Es claro, de la figura 2-8a, que la distribución normal es simétrica con respecto a μ , los puntos de inflexión se localizan en $x=\mu-\sigma$ y $x=\mu+\sigma$. La densidad máxima de la función ocurre cuando $x=\mu$.

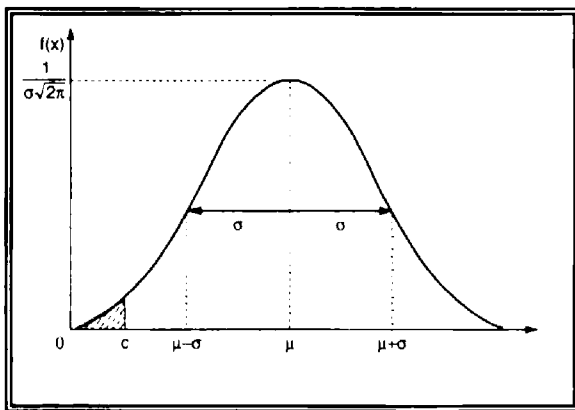


Figura2-8a. Distribución normal.
Función de densidad

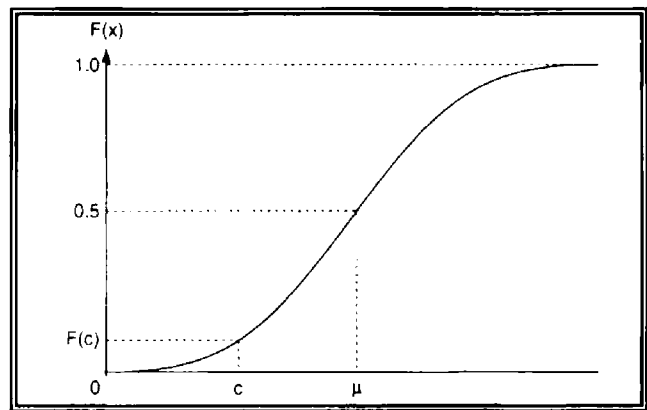


Figura2-8b. Distribución normal.
Función de distribución

Si x es una variable aleatoria con distribución normal, o cercana a ella, la probabilidad de que x sea menor o igual que c , se representa por el área achurada en la figura 2-8a y por la ordenada, $F(c)$, en la figura 2-8b.

Se dice que una variable aleatoria z tiene una distribución normal estándar si su función de densidad es:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\left\{-\frac{z^2}{2}\right\}} \quad (2-3)$$

para $-\infty < z < \infty$.

Esta función se obtiene de la función de densidad de la distribución normal, y proporciona una forma rápida de evaluar las probabilidades asociadas con cualquier conjunto de datos con una distribución normal. Ya que la función de distribución normal no puede integrarse directamente, se presenta el problema de tener que evaluar las probabilidades para valores específicos de μ y σ . Afortunadamente, el problema se limita en primer lugar a transformar la variable normal aleatoria x en la variable normal estándar z y después evaluar la probabilidad de z .

La transformación, conocida como estandarización, está dada por:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \quad (2-4)$$

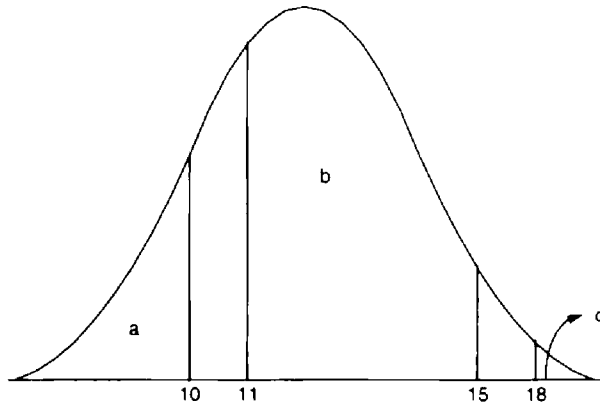
La función de probabilidad de la distribución normal estándar es:

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{\left\{-\frac{u^2}{2}\right\}} du \quad (2-5)$$

para $-\infty < z < \infty$.

Así los valores de probabilidad asociados a z , $\phi(z)$, se pueden interpolar de tablas.

EJEMPLO



x	f(x)	F(x)
4	0.0001	0.0000
5	0.0004	0.0002
6	0.0022	0.0013
7	0.0088	0.0062
8	0.0270	0.0228
9	0.0648	0.0668
10	0.1210	0.1587
11	0.1760	0.3085
12	0.1995	0.5000
13	0.1760	0.6915
14	0.1210	0.8413
15	0.0648	0.9332
16	0.0270	0.9772
17	0.0088	0.9938
18	0.0022	0.9987
19	0.0004	0.9998

Sea x una variable aleatoria con distribución normal con parámetros $\mu=12$ y $\sigma=2$, su función de densidad es:

$$f(x) = 0.19947e^{\{-0.1250(x-12)^2\}}$$

y su función de distribución:

$$F(x) = 0.19947 \int_{-\infty}^x e^{\{-0.1250(u-12)^2\}} du$$

Evaluar la probabilidad de que:

- x sea menor o igual a 10.
- x esté entre 11 y 15.

c) x sea mayor que 16.

a) la probabilidad de que x sea menor o igual a 10 es
 $P[x \leq (10)]$:

Obteniendo $P[x \leq 10]$ de la tabla

$$F(10)=0.1587$$

b) la probabilidad de que x esté entre 11 y 15 es $P[11 \leq x < 15]$:

$$F(15)-F(11)=0.9332-0.3085=0.6247$$

c) la probabilidad de que x sea mayor a 16 es:

$$P[x > 16]=P[16 \leq x < \infty]$$

$$F(\infty)-F(16)=1.0000-0.9772=0.0228$$

Resolviendo el ejemplo anterior con la distribución normal estándar z :

$$z = \frac{x - 12}{2}$$

a) la probabilidad de que z sea menor o igual a 10:

$$P[x \leq 10] = P\left[\frac{x - \mu}{\sigma} \leq \frac{10 - 12}{2}\right] = P[z \leq -1] = \phi(-1)$$

$$\phi(-1) = 0.1587$$

b) la probabilidad de que x esté entre 11 y 15:

$$P[11x \leq 15] = P\left[\frac{10-11}{2} \leq \frac{x-\mu}{\sigma} \leq \frac{10-15}{2}\right] =$$

$$P[-0.5 \leq z \leq 1.5] = \phi(1.5) - \phi(-0.5)$$

$$= 0.9332 - 0.3085 = 0.6247$$

c) la probabilidad de que x sea mayor a 16:

$$P[x > 16] = P\left[\frac{x-\mu}{\sigma} > \frac{10-16}{2}\right] =$$

$$P[2 \leq z \leq \infty] = \phi(\infty) - \phi(2)$$

$$P[2 \leq z \leq \infty] = 1.0000 - 0.9772 = 0.0228$$

2.3.5.4 El valor más probable

Tomando la variable aleatoria x distribuida en forma discreta, se tienen los siguientes valores posibles $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$. La función de probabilidad de x estará dada por $P(x_i)$, $i=1, 2, \dots, n$. La suma pesada de todos los valores posibles, donde los pesos son las probabilidades correspondientes, se llama esperanza matemática o valor esperado de x , representada por $E[x]$:

$$E[x] = \sum_{i=1}^n x_i P(x_i) \quad (2-6)$$

$E[x]$ es también la media de x , comúnmente representada por μ como se empleó en la sección anterior.

$$E[x] = \mu \quad (2-7)$$

Con el valor de $E[x]$, o μ , se localiza el centroide de la distribución de probabilidad, por lo que se le llama también el valor más probable, su valor puede ser positivo, negativo o cero.

El error detectable de cualquier medición en particular es el grado en que se desvía o aparta del promedio la cantidad. Este error, o desviación suele recibir el nombre de residuo.

2.3.5.5 Medidas de precisión

Haciendo referencia nuevamente a las figuras 2-5, 2-6 y 2-7, aunque las curvas tienen forma un poco diferente entre sí, el área bajo la curva es la misma. Existen algunas diferencias significativas en cuanto a la dispersión de sus errores, es decir, difieren sus amplitudes de abscisas. La magnitud de la dispersión es un índice de la disgregación de las medidas. La desviación estándar, que a menudo se le llama "error estándar", y la varianza, son términos estadísticos que se emplean para expresar la precisión de grupos de medidas. La ecuación que da el valor numérico de la varianza es:

$$\sigma^2 = E[(x - \mu)^2] \quad (2-8)$$

Desarrollando el binomio y después de alguna manipulación algebraica se llega a la expresión:

$$\sigma^2 = E[x^2] - \mu^2 \quad (2-9)$$

La desviación estándar, σ , es igual a la raíz cuadrada de la varianza.

2.3.5.5.1 Interpretación de la desviación estándar

Bajo la suposición que la distribución normal es el modelo de probabilidad aceptado para las medidas topográficas, se puede representar las medidas de x como una variable aleatoria con la función de densidad dada en la fórmula (2-1).

Si se toma la media μ igual a cero, la ecuación (2-1) se reduce a la forma:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\}} \quad (2-10)$$

De esta forma, la distribución normal es el modelo de probabilidad para la componente de error aleatoria de una medida topográfica. Esta función se muestra en la figura 2-9.

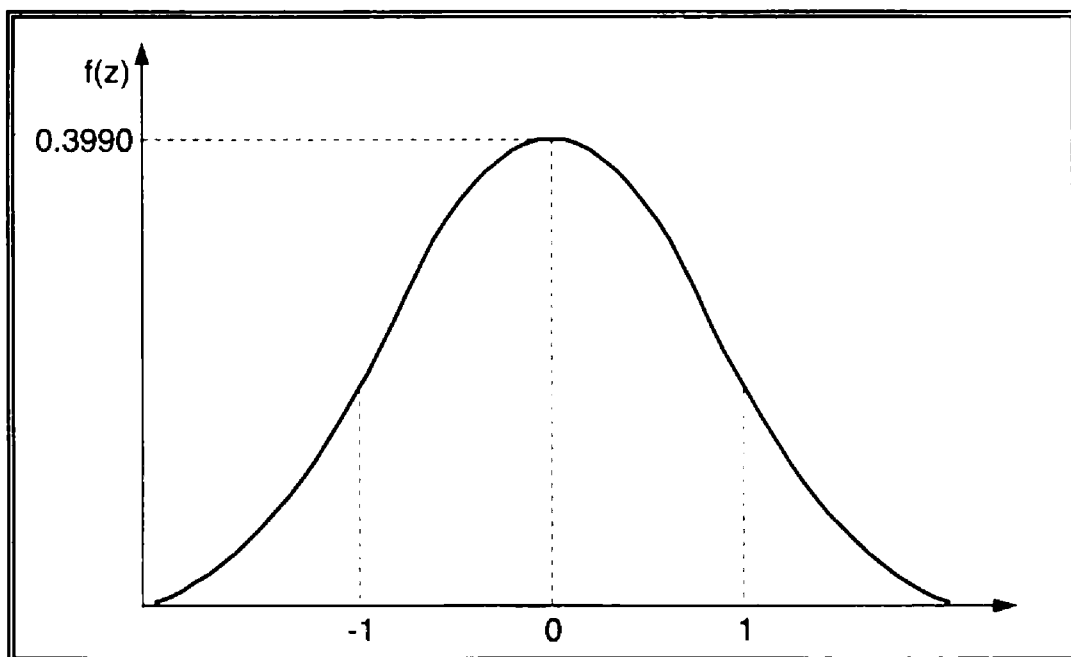


Figura 2-9. Distribución normal estándar

La precisión de una medida, como se mencionó anteriormente, es el grado de cercanía en un conjunto de mediciones o la capacidad de repetir medidas de una misma cantidad. De acuerdo con lo anterior, la tendencia de la distribución de probabilidad de una medida, o su componente de error aleatorio, es un indicador de la precisión de las medidas. Una tendencia pequeña indica alta precisión; una tendencia grande indica lo contrario. Para ilustrar lo anterior en la figura 2-10 se presenta un ejemplo.

Para propósitos de análisis, se requiere fijar una medida de la precisión de la medida. Una medida lógica de la precisión es la desviación estándar. Por ejemplo en la figura 2-10 se tiene que $\sigma_1 < \sigma_2$, donde σ_1 es la desviación estándar de una medida altamente precisa y σ_2 la desviación estándar de una medida con baja precisión.

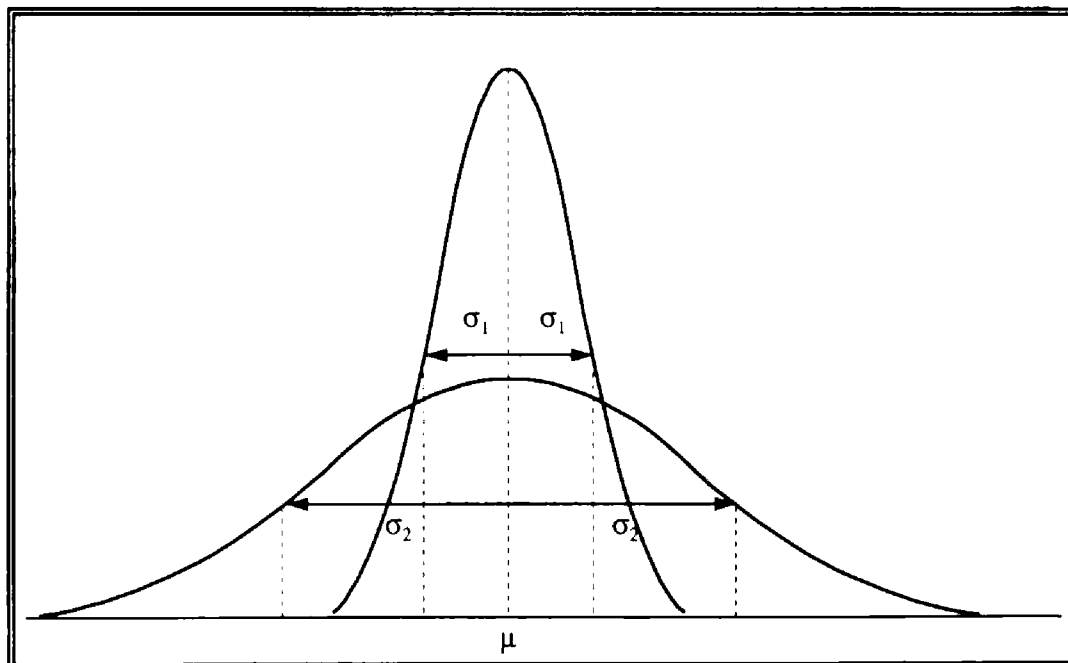
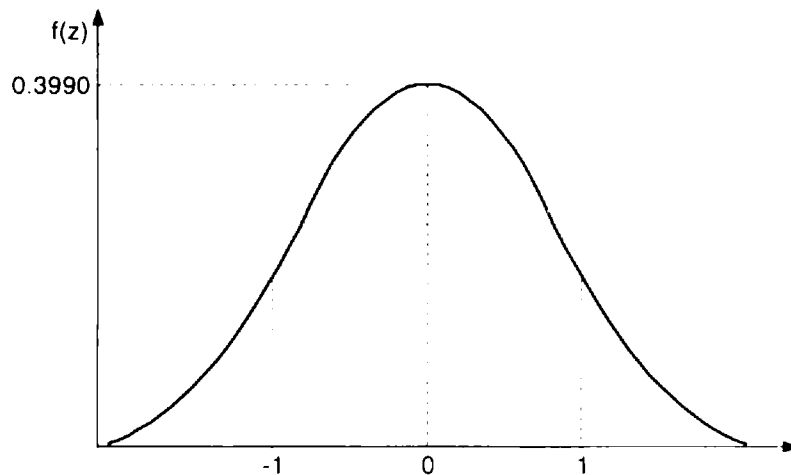


Figura 2-10. Alta y baja precisión

Aplicando la ecuación (2-2), la probabilidad de que una medida x este entre $\mu - \sigma$ y $\mu + \sigma$ está dada por:



(2-11)

Para evaluar esta probabilidad, es mejor estandarizar x de acuerdo con la ecuación (2-4) y tomar los valores de $\phi(x)$ de una tabla, así tenemos:

$$\begin{aligned}
 P[\mu - \sigma < x < \mu + \sigma] &= P\left[\frac{(\mu - \sigma) - \mu}{\sigma} < z < \frac{(\mu + \sigma) - \mu}{\sigma}\right] \\
 &= P[-1 < z < 1] \\
 &= \phi(1) - \phi(-1) \\
 &= 0.8413 - 0.1587 \\
 &= 0.6826
 \end{aligned}
 \tag{2-12}$$

Lo anterior significa que el área achurada en la figura 2-11 es el 0.6826 del área total bajo la función de densidad.

Multiplicando K por la desviación estándar, es otra forma de obtener una medida de precisión. La probabilidad de que una medida este entre $-K\sigma$ y $K\sigma$ es:

$$P[\mu - K\sigma < x < \mu + K\sigma] = \frac{1}{2\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mu - K\sigma}^{\mu + K\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \quad (2-13)$$

Nuevamente, estandarizando x , se tiene:

$$P[\mu - K\sigma < x < \mu + K\sigma] = P[-K < z < K] = \phi(K) - \phi(-K) \quad (2-14)$$

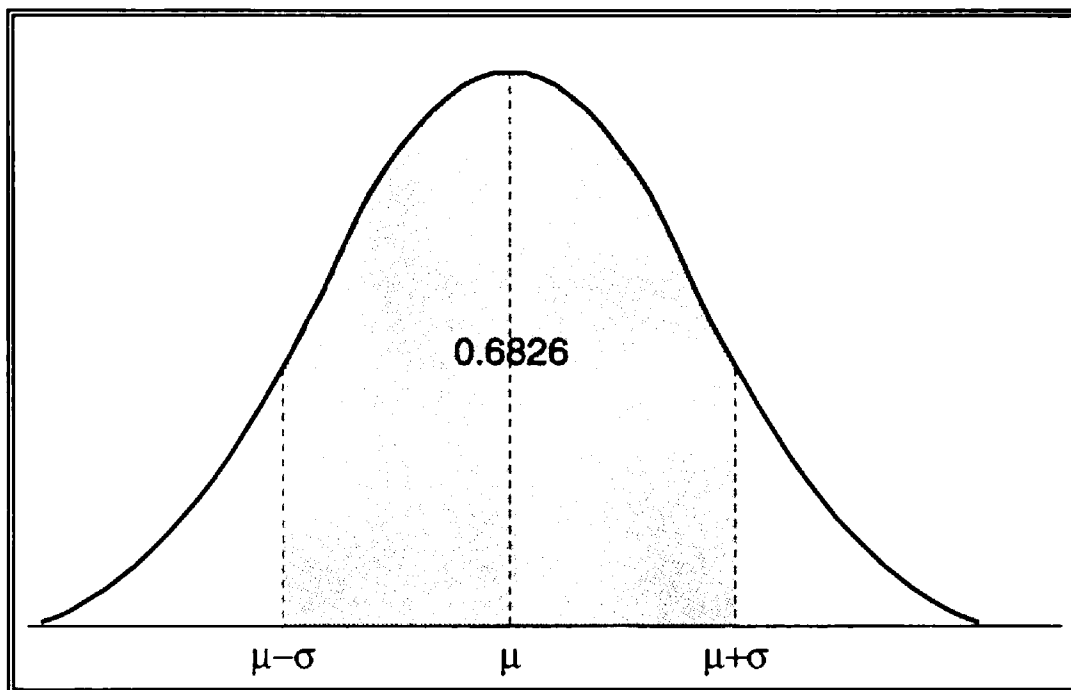


Figura 2-11. 68.26% de confianza

En función de la simetría de la distribución se tiene:

$$P[\mu - K\sigma < x < \mu + K\sigma] = 2\phi(K) - 1 \quad (2-15)$$

Con lo anterior se determinan los límites dentro de los cuales debe esperarse que caigan el $(2\phi(K) - 1)100\%$ de las medidas.

Otra interpretación es que una medida adicional tendrá el $(2\phi(K) - 1)100\%$ de probabilidad de caer dentro de los límites establecidos. Una tercera deducción es que el valor real o verdadero tiene el $(2\phi(K) - 1)100\%$ de probabilidades de caer dentro de los límites establecidos.

2.3.5.6 Los errores al 50, 90 y 95%

Haciendo los valores de $K=0.6748, 1.645$ y 1.960 se obtendrán las siguientes cantidades, representadas en la figura 2-12.

Tomando $K=0.6748, \pm 0.6748\sigma$, se obtiene la cantidad llamada error probable. Este término es obsoleto y tiende a desaparecer, un término más apropiado es 50% de incertidumbre, ya que la probabilidad de $K=0.674$ es precisamente el 50%.

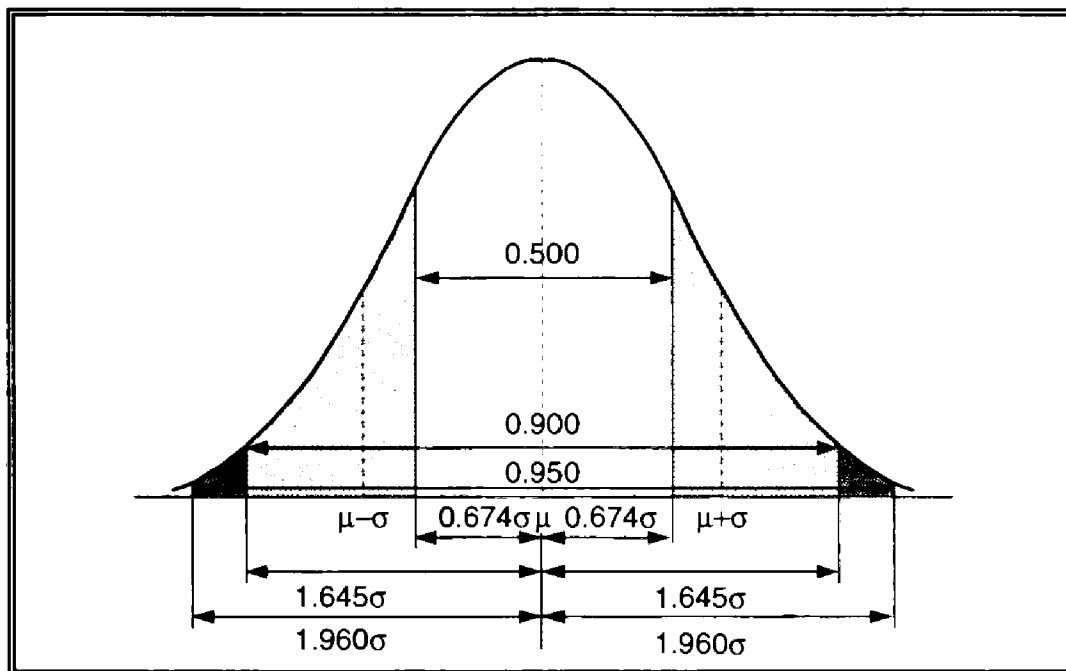


Figura 2-12. Errores al 50, 90 y 95%

Así para $K=1.645$ se tendrá el 90% de incertidumbre, $\pm 1.645\sigma$, por último para $K=1.960$, $\pm 1.960\sigma$, se obtiene el 95% de incertidumbre.

K	$\phi(K)$	$P[\mu - k\sigma < x < [\mu - k\sigma]$
0.6748	0.7500	0.5000
1.0000	0.8413	0.6826
1.6450	0.9500	0.9000
1.9600	0.9750	0.9500
2.0000	0.9772	0.9544
2.5755	0.9950	0.9900
3.0000	0.9987	0.9974

EJEMPLO

Calcular la media, la desviación estándar y los errores al 50, 90 y 95% de incertidumbre, del siguiente conjunto de mediciones.

1000.57				1000.39	*	
1000.39	*			1000.48	*	+
1000.49	*	+		1000.32		
1000.46	*	+		1000.47	*	+
1000.47	*	+		1000.55		

$$\mu = 1000.46 \text{ m}$$

$$\sigma = \pm 0.07 \text{ m}$$

$$E_{50} = \pm 0.05 \text{ m}$$

$$E_{90} = \pm 0.12 \text{ m}$$

$$E_{95} = \pm 0.14 \text{ m}$$

La longitud más probable es 1000.46 m

La desviación estándar ± 0.07 m

El 68% de los valores estarán comprendidos entre 1000.39 y 1000.53 (*)

La mitad de las medidas caerán entre 1000.41 y 1000.51 (+)
90% de las medidas no contienen errores mayores a +0.12 m y por lo tanto su valor estará entre 1000.34 y 1000.58 (|). El 95% de los valores está entre 1000.32 y 1000.60.

2.3.5.7 Elipses de error, Error Circular Probable (CEP) y 2DRMS

Al combinarse dos determinaciones independientes, producto de procesos de medición, y graficarse los errores de dichas determinaciones, la distribución de los errores generará un sólido como el mostrado en la figura 2-13.

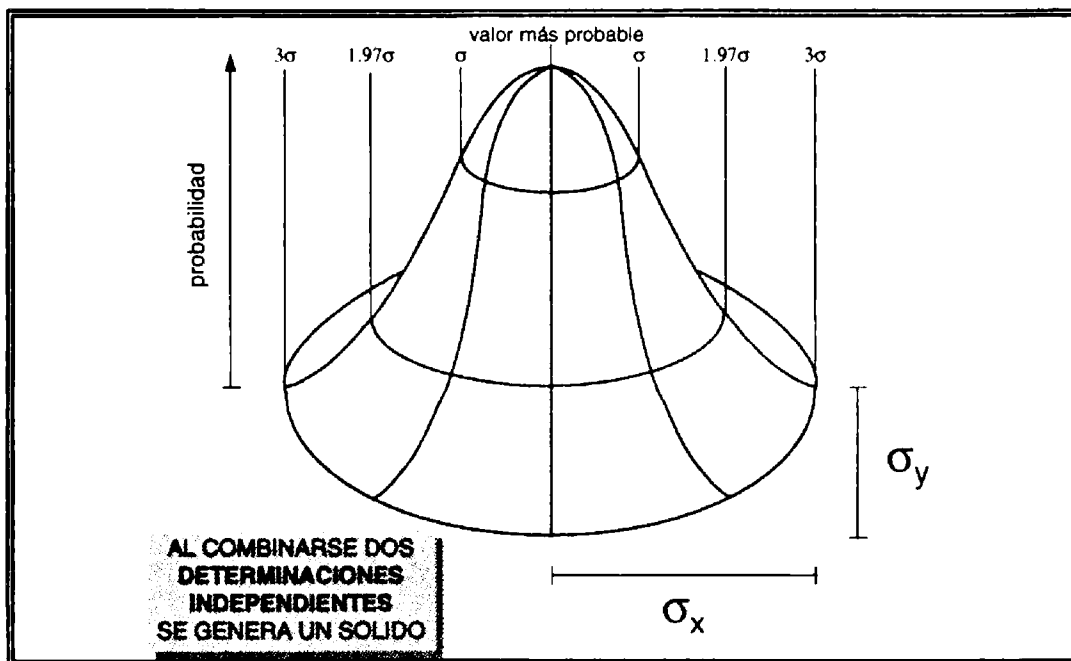


Figura 2-13. Sólido de distribución de errores

Por regla general los valores de σ_x y σ_y serán diferentes, con lo que si se corta el sólido con un plano tangente a él, se obtendrán elipses

(figura 2-14). La orientación del semieje mayor de la elipse, así como sus semiejes estarán dados en función de:

$$\tan(2t) = \frac{2q_{xy}}{q_{yy} - q_{xx}} \quad (2-16)$$

$$a = S_0 (q_{xx} \sen^2 t + 2q_{xy} \cos t \sen t + q_{yy} \cos^2 t)^{1/2} \quad (2-17)$$

$$b = S_0 (q_{xx} \cos^2 t - 2q_{xy} \cos t \sen t + q_{yy} \sen^2 t)^{1/2} \quad (2-18)$$

Donde:

t: ángulo de orientación del semieje mayor.

a: semieje mayor.

b: semieje menor.

q_{xx} : Varianza de la coordenada x.

q_{yy} : Varianza de la coordenada y.

q_{xy} : Covarianza de xy.

S_0 : Varianza de peso unitario.

De la ecuación (2-16) se ve fácilmente que la orientación de la elipse de error será directamente proporcional a la covarianza, o dicho de otra forma al grado de dependencia que exista entre las dos variables que se están correlacionando.

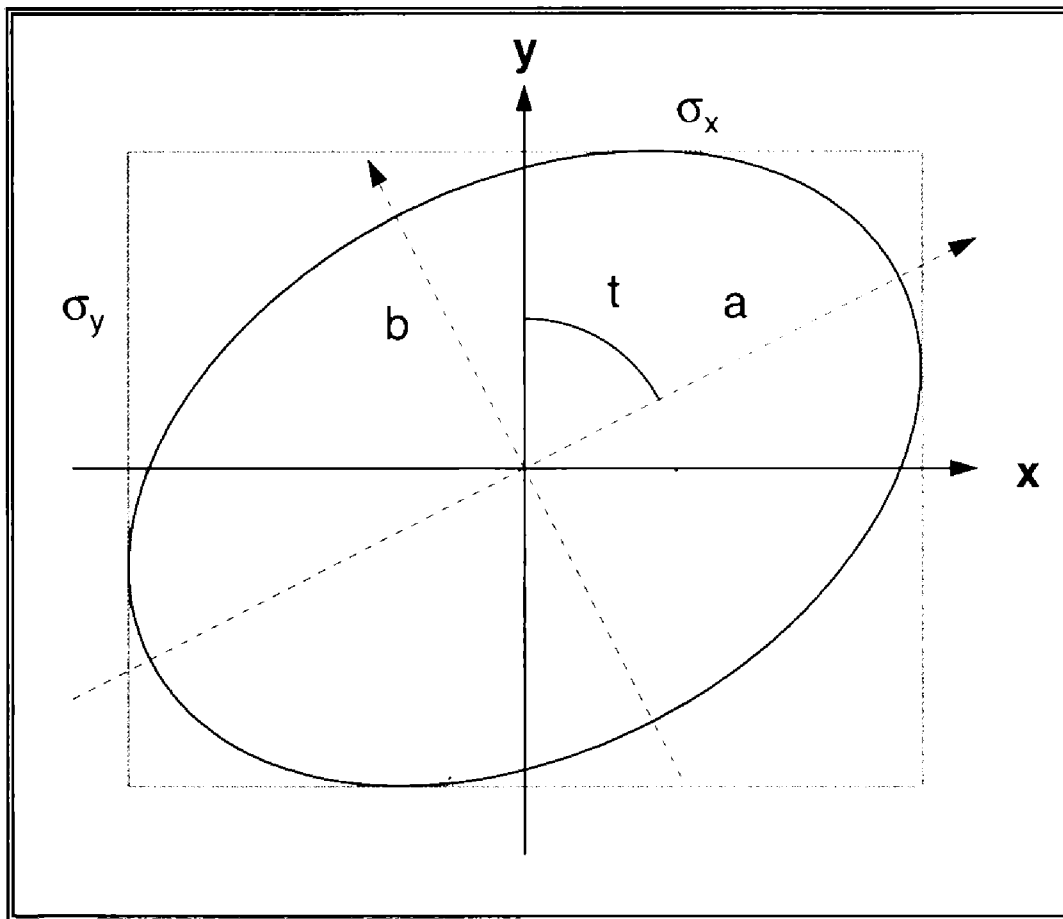


Figura 2-14. Elipse de error

En virtud de que el trabajar con elipses de error puede dificultar un poco la representación gráfica de los errores, así como el análisis de los resultados al incorporar mediciones adicionales, se desarrolló un concepto, el cual es independiente de la correlación de las observaciones que se están analizando. Dicho concepto es el Error Circular Probable o CEP por sus siglas en inglés, el cual es muy frecuentemente empleado para definir la calidad de un posicionamiento sobre la superficie terrestre. El CEP es el radio de un círculo en el que se tiene un 50% de probabilidad de que se encuentre el valor verdadero y se calcula por medio de la relación:

$$\text{CEP} = 0.59(\sigma_{\phi} + \sigma_{\lambda}) \quad (2-19)$$

Al igual que la desviación estándar, el CEP se puede calcular a diferentes niveles de confianza; por ejemplo al 95%:

$$\text{CEP}_{95} = 2.08 \cdot \text{CEP} \quad (2-20)$$

o al 99%:

$$\text{CEP}_{99} = 2.58 \cdot \text{CEP} \quad (2-21)$$

Otra forma de representar la confianza en un posicionamiento es por medio del DRMS el cual se determina por medio de:

$$\text{DRMS} = \left(\sigma_{\phi}^2 + \sigma_{\lambda}^2 \right)^{1/2} \quad (2-22)$$

El cual también es el radio de un círculo el cual tiene entre 63.2 y el 68.3% de probabilidad de contener al valor verdadero. Adicionalmente se puede determinar el 2DRMS, el cual es igual a:

$$2\text{DRMS} = 2 \cdot \text{DRMS} \quad (2-23)$$

y se tiene entre 95.4 y 98.2% de probabilidad de contener al valor verdadero.

2.3.6 Propagación de errores

En esta sección no se pretende dar completamente la propagación de los errores, simplemente dar las bases de ella.

En la Topografía, como en muchas áreas de la ciencia y la ingeniería, las cantidades que se miden directamente en el campo así como las que se usan para calcular otras cantidades están

afectadas de errores. En el último caso, las cantidades se expresan como una función matemática de las medidas de campo. Si las medidas de campo tienen errores, es inevitable que las cantidades calculadas también los contengan. La evaluación de los errores en las cantidades calculadas como una función de los errores en las medidas se llama propagación de los errores.

Supóngase que X es una cantidad medida y Y es una nueva cantidad, que se calcula en función de X con la expresión:

$$Y = aX + b \quad (2-24)$$

la cual representa una línea recta, mientras que los coeficientes a y b se asumen conocidos y libres de error.

Para propósitos de análisis, es útil aplicar el concepto de valor verdadero y definir el error de una medida como la diferencia del valor medido menos el valor verdadero. Si X_v representa el valor verdadero de X , y dX el error, tenemos:

$$X = X_v + dX$$

y por lo tanto:

$$Y_v = aX_v + b$$

de lo anterior:

$$\begin{aligned} Y &= a(X_v + dx) + b \\ &= aX_v + adX + b \end{aligned}$$

finalmente:

$$Y = Y_v + adX$$

despejando Y_v , se obtiene

$$dY = adX$$

derivando la ecuación (2-24) con respecto a X :

$$\frac{\partial Y}{\partial X} = a$$

así tenemos que:

$$dY = \frac{\partial Y}{\partial X} dX \quad (2-25)$$

lo que representa la derivada total de la ecuación (2-24).

Hasta aquí se consideró el caso de una variable calculada en función de un sólo valor medido. Generalizando la ecuación (2-25) para más de una variable involucrada en la función, se aplicarán derivadas parciales para obtener la derivada total de la función. Específicamente, si los errores en X_1, X_2, \dots, X_n se representan por las diferenciales dX_1, dX_2, \dots, dX_n respectivamente, entonces el error en Y se puede expresar como:

$$dY^2 = \left[\frac{\partial Y}{\partial X_1} \right]^2 dX_1^2 + \left[\frac{\partial Y}{\partial X_2} \right]^2 dX_2^2 + \dots + \left[\frac{\partial Y}{\partial X_n} \right]^2 dX_n^2 \quad (2-26)$$

en la cual las derivadas parciales $\left[\frac{\partial Y}{\partial X_1} \right], \left[\frac{\partial Y}{\partial X_2} \right], \dots, \left[\frac{\partial Y}{\partial X_n} \right]$ estarán evaluadas con los valores numéricos (medidos) de X_1, X_2, \dots, X_n .

3. MEDICIÓN ELECTRÓNICA DE DISTANCIAS

Una de las operaciones básicas de la Topografía es la medición de distancias. En Topografía, la distancia entre dos puntos significa su distancia horizontal, la cual se puede determinar con diferentes precisiones en función del instrumental y la metodología aplicada. En la tabla 3-1 se resumen varios métodos aplicables a la medición de distancias y sus precisiones.

MÉTODO	PRECISIÓN
A pasos	1/50 a 1/100
Estadía	1/150 a 1/750
Estadía invar	1/1000 a 1/2500
Cadeneo ordinario	1/1000 a 1/5000
Cadeneo de precisión	1/5000 a 1/10000
Medición electrónica	1/20000

Tabla 3-1. Precisiones

3.1 INTRODUCCIÓN

Uno de los principales adelantos para la Topografía, ha sido el desarrollo de la medición electrónica de distancias, EDM (siglas que inglés significan Electronic Distance Measurement), mediante instrumentos especiales que emplean la energía radiante electromagnética que viajar de un extremo al otro de una línea, y regresar al primero, determinándose la distancias en función del tiempo de viaje de la señal, derivado de la diferencia de fase entre la señal emitida y la recibida, y la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas.

El primer instrumento EDM fue presentado en 1948 por el físico Erik Bergstrand. Su dispositivo llamado Geodimeter (Geodímetro en español), acrónimo de las palabras inglesas **geodetic distance meter**, fue resultado de ciertos intentos para mejorar los métodos para la medición de la velocidad de la luz. El instrumento transmitía radiación visible y era capaz de medir en la noche con alta precisión distancias hasta de 40 km. En 1957 apareció el segundo aparato EDM, el Telurómetro, diseñado por el Dr. T. L. Wadley en Sudáfrica, el cual transmitía microondas no visible y era capaz de medir distancias de 80 km o más, de día o de noche.

Inmediatamente se reconoció el gran valor potencial de estos modelos de distanciómetros electrónicos en el campo de la Topografía. Sin embargo, los primeros distanciómetros eran costosos, pesados, voluminosos y por consecuencia, no muy portátiles para los trabajos de campo, además, el procedimiento de medición era tardado y las operaciones matemáticas para obtener la distancia a partir de los valores observados resultaban difíciles y laboriosos.

Las principales ventajas de la distanciometría electrónica son la rapidez y la precisión con la que se puede medir las distancias.

Con el equipo moderno EDM, los valores de las distancias aparecen en forma digital, algunos aparatos adicionalmente a la distancia inclinada, son capaces de reducir la distancia al horizonte y el desnivel entre los dos puntos.

3.2 PRINCIPIO DE FUNCIONAMIENTO DE LOS INSTRUMENTOS EDM

Todos los instrumentos de medición EDM se basan en el mismo principio de funcionamiento. La señal modulada es transmitida continuamente desde un extremo de la línea a medir y es reflejada o retransmitida de regreso en el otro extremo. Con la diferencia de fase entre la referencia (transmitida) y la señal modulada que retorna, se determina la distancia en el instrumento transmisor (figura 3-1).

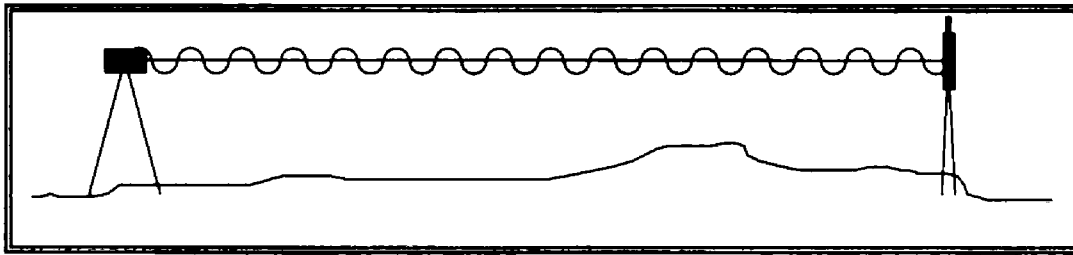


Figura 3-1. Distanciometría electrónica

Si un número entero m de media longitud de onda está contenido en una distancia la diferencia de fase es cero. En todos los casos diferentes la diferencia de fase se representa por una fracción U de media longitud de onda y se representa en el instrumento en unidades de longitud.

La distancia S entre el transmisor y el reflector es igual a:

$$S = m \frac{\lambda}{2} + U \quad (3-1)$$

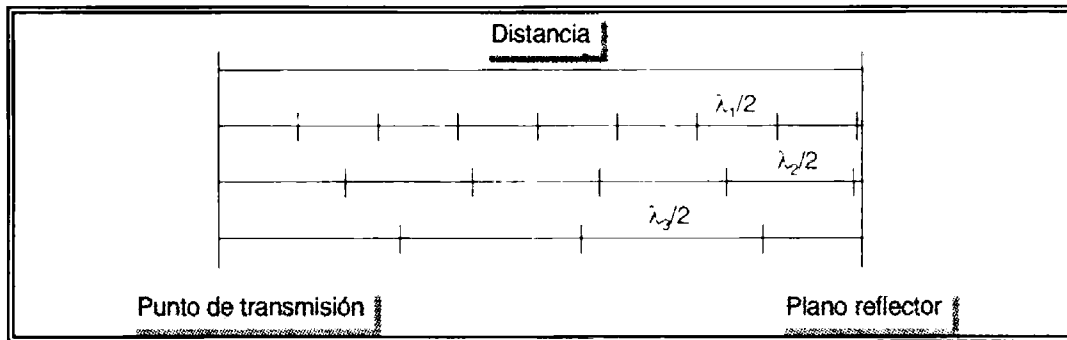


Figura 3-2. Determinación de la diferencia de fase

Para encontrar el número m , la medición debe repetirse con dos o más longitudes de onda diferentes (figura 3-2).

La longitud de onda de medición λ es una función de la frecuencia de modulación f y de la velocidad de propagación v de las ondas electromagnéticas.

$$\lambda = \frac{v}{f} \quad (3-2)$$

En el vacío, la velocidad de propagación v es constante para todas las ondas electromagnéticas e igual a $c=299\,792.458$ km/s. En la atmósfera v siempre es menor a c y puede calcularse a partir de:

$$v = \frac{c}{n} \quad (3-3)$$

donde n es el índice de refracción del aire, el cual es función de la densidad del aire y la longitud de onda portadora. El valor de n va desde $n=1$ en el vacío hasta $n=1.0003$ en condiciones atmosféricas normales. El valor de n puede determinarse en función de observaciones meteorológicas de temperatura seca y húmeda del aire, así como presión barométrica a lo largo de la

medida. Por lo tanto el valor de la señal modulada es desconocido durante las mediciones a menos que se conozca n y entonces:

$$\lambda = \frac{c}{nf} \quad (3-4)$$

La frecuencia de modulación f puede ser estabilizada y por lo general se conoce con un alto grado de precisión. El fabricante da generalmente el valor de λ o f para condiciones atmosféricas específicas, y por lo tanto para un cierto valor de n así:

$$\lambda_1 = \frac{c}{n_1 f} \quad (3-5)$$

de donde la distancia registrada por el EDM es igual a:

$$S_1 = m \frac{\lambda_1}{2} + U_1$$

Si durante la medición $n=n_2 \neq n_1$, el valor correcto de λ resulta:

$$\lambda_2 = \frac{c}{n_2 f} \quad (3-6)$$

y la distancia real es:

$$S_2 = m \frac{\lambda_2}{2} + U_2 \quad (3-7)$$

De las ecuaciones (3-5) y (3-6), se puede establecer:

$$\lambda_2 = \lambda_1 \frac{n_1}{n_2} \quad (3-8)$$

Finalmente, la distancia corregida puede calcularse como:

$$S_2 = m \frac{\lambda_1 n_1}{2n_2} + U \frac{n_1}{n_2} = S_1 \frac{n_1}{n_2} \quad (3-9)$$

La ecuación (3-9) proporciona la fórmula básica para corregir la distancia medida de acuerdo a las condiciones atmosféricas reales.

Como los centros electrónicos de los instrumentos EDM generalmente no coinciden exactamente con el centro geométrico de la estación, se debe calcular una corrección Z_0 y añadirse a la distancia calculada. La distancia final S_0 se calcula como:

$$S_0 = S_1 \frac{n_1}{n_2} + Z_0 + \Delta S \quad (3-10)$$

donde:

S_1 = Distancia medida.

n_1 = Índice de refracción de la calibración en el laboratorio.

n_2 = Índice de refracción durante la medición.

Z_0 = Corrección cero.

ΔS = Conjunto de reducciones geométricas.

3.2.1 Determinación de las correcciones al EDM

El índice de refracción n_0 para la radiación visible y casi infrarroja en el aire seco a 0°C de temperatura, 1013.25 milibares (mb) de presión y 0.03% de bióxido de carbono, puede calcularse a partir de la fórmula de Barrell y Sears:

$$n_0 = 1 + \left[287.6040 + \frac{4.8864}{\lambda_0^2} + \frac{0.0680}{\lambda_0^4} \right] \times 10^{-6} \quad (3-11)$$

donde λ es la longitud de onda de la radiación portadora en micras (μm).

Si la temperatura t , la presión barométrica p y la humedad del aire difieren de las condiciones normales, entonces el índice de refracción se calcula de:

$$n - 1 = \frac{0.269578(n_0 - 1)p}{273.15 + t} - \frac{11.27e}{273.15 + t} \times 10^{-6} \quad (3-12)$$

donde:

e : presión parcial del vapor de agua en mb.

t : temperatura en °C.

p : presión en mb.

El valor de e se determina en función de la diferencia de temperatura del bulbo seco t_s y húmedo t_h , empleando la fórmula:

$$e = E - 0.000662p(t_s - t_h) \quad (3-13)$$

donde E es la presión del vapor de agua saturado en milibares, determinada a partir de:

$$E = 6.1078 \exp \left\{ \frac{17.269 t_h}{237.3 + t_h} \right\} \quad (3-14)$$

En la tabla 3-2 se dan valores para E , incluyendo cambios por 1°C .

t_h	-10°C	0°C	10°C	20°C	30°C
$E \text{ (mb)}$	2.86	6.11	12.28	23.38	42.42
$E/1^\circ \text{C}$	0.33	0.62	1.11	1.91	3.13

Tabla 3-2. Presión del vapor de agua saturado

De la tabla anterior se puede ver que la humedad tiene muy poca influencia sobre las mediciones electroópticas. En condiciones extremas como en la temperatura $t=30^\circ\text{C}$ y humedad del 100% es decir, para $t_h=t_s$, se tiene que $e=E=42.4 \text{ mb}$. Si en estas condiciones no se toma en cuenta la influencia de e , el error en el cálculo de n será solamente de 1.6 partes por millón (ppm). Por lo tanto, el segundo término de la ecuación (3-12) se omite generalmente para instrumentos electroópticos, quedando:

$$n - 1 = \frac{0.269578(n_0 - 1)p}{273.15 + t} \quad (3-15)$$

Sin embargo, la influencia de e se debe considerar para trabajos de precisión y sobre distancias largas.

El índice de refracción para la parte del espectro electromagnético que contiene a las microondas, puede calcularse a partir de la fórmula de Essen y Froome, la cual puede escribirse como:

$$n - 1 = \left[\frac{77.624p}{273.15 + t} + \left(\frac{371895.6}{(273.15 + t)^2} - \frac{12.924}{273.15 + t} \right) e \right] \times 10^{-6} \quad (3-16)$$

El cálculo a partir de las ecuaciones (3-12) o (3-15) y (3-16) es necesario en mediciones de distancias de alta precisión. Los nomogramas proporcionados por el fabricante dan correcciones de la distancia de forma menos precisa que las obtenidas por el método riguroso. Algunos instrumentos EDM tiene sensores meteorológicos y/o sistemas de corrección automáticos propios que sólo requieren que el observador introduzca en el instrumento los resultados de las observaciones meteorológicas. Sin embargo, debe reconocerse que un sistema completamente automatizado de corrección, da resultados precisos solamente cuando las condiciones atmosféricas son las mismas a lo largo de la línea medida, que en la estación donde se encuentra el instrumento. En otros casos, siempre serán necesarios cálculos manuales o correcciones adicionales.

Como se mencionó anteriormente, el centro electrónico de los instrumentos EDM no coinciden generalmente con el centro de la estación sobre la cual se instala el instrumento. La distancia interna recorrida por las ondas electromagnéticas es generalmente más larga que la distancia entre el punto de llegada de la señal y el centro de la estación. Los constructores de instrumentos EDM proveen siempre información sobre el valor de la corrección cero (Z_0). La mayoría de los nuevos instrumentos están diseñados de tal forma que Z_0 sea igual a cero. Se ha constatado sin embargo, que el valor de la corrección puede cambiar con el uso del instrumento. El cambio es generalmente pequeño en los instrumentos electroópticos, algunos milímetros, pero puede llegar a varios centímetros en los equipos de microondas. Por lo

tanto, Z_0 debe controlarse frecuentemente midiendo varias distancias sobre una base de calibración. Se recomienda distancias entre 50 y 500 m para los aparatos electroópticos y entre 200 y 1 000 m para los de microondas. Si no se disponen de distancias conocidas, el valor de Z_0 puede determinarse mediante el método de distancias subdivididas. El método requiere de una línea recta en un área plana con unos puntos marcados sobre el terreno (figura 3-3). Se miden todas las combinaciones de distancias posibles y el valor de Z_0 se determina usando el método de mínimos cuadrados. Por su puesto, las distancias medidas deberán corregirse por índice de refracción, pendiente, etcétera antes de calcular Z_0 .

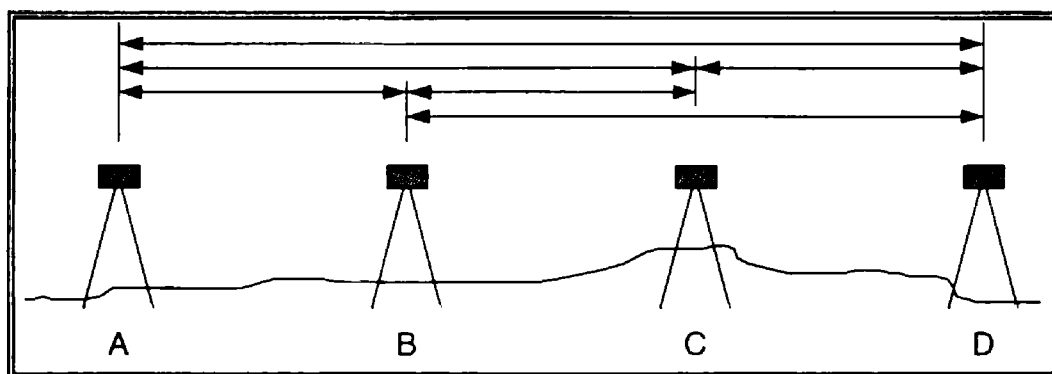


Figura 3-3. Método de distancias subdivididas

EJEMPLO

AB	50.000	AC	99.950	CD	50.000
BC	50.000	AD	149.950	BD	99.950

Las ecuaciones de observación son:

$$\begin{array}{rcl}
 X_1 & & = 50.000 \\
 & X_2 & = 50.000 \\
 & & X_3 = 50.000
 \end{array}$$

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 &= 99.950 \\ X_1 + X_2 + X_3 &= 149.90 \\ X_2 + X_3 &= 99.95 \end{aligned}$$

de lo anterior se tiene:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 50.000 \\ 50.000 \\ 50.000 \\ 99.950 \\ 149.900 \\ 99.950 \end{bmatrix}$$

resolviendo el sistema con:

$$X = (A^T A)^{-1} A^T L$$

se tiene:

$$A^T A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (A^T A)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.50 & -0.25 & 0.00 \\ -0.25 & 0.50 & -0.25 \\ 0.00 & -0.25 & 0.00 \end{bmatrix}$$

$$A^T L = \begin{bmatrix} 299.850 \\ 399.800 \\ 299.850 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 49.975 \\ 49.975 \\ 49.975 \end{bmatrix}$$

finalmente:

$$Z_0 = \begin{bmatrix} -0.025 \\ -0.025 \\ -0.025 \end{bmatrix}$$

3.3 CLASIFICACIÓN DE LOS DISTANCIÓMETROS

Los sistemas de clasificación más convenientes para los instrumentos EDM son el que considera la longitud de onda de la energía electromagnética transmitida y el que atiende al alcance operativo. En el primero existen tres categorías.

- 1) Electroópticas.
- 2) Microondas.
- 3) Ondas largas.

los cuales se tratarán en detalle más adelante.

La clasificación de los instrumentos EDM por su alcance es más bien subjetiva, pero en general se consideran tres divisiones.

- 1) Corto alcance.
- 2) Mediano alcance.
- 3) Largo alcance.

El grupo de instrumentos de corto alcance comprende los dispositivos cuya máxima capacidad no excede de los 5 km. La mayor parte de los equipos de esta clase son del tipo electroópticos. Este grupo es el más usado en la Topografía.

Los equipos de mediano alcance son los que tiene un rango de medición hasta 100 km. Algunos instrumentos son electroópticos y otros de microondas.

Los distanciómetros de largo alcance pueden medir líneas de más de 100 km. Aunque la mayoría de estos equipos trabajan con transmisión de ondas largas, algunos emplean microondas.

3.3.1 Distanciómetros electroópticos

La señal portadora radiada por los instrumentos EDM consiste en luz visible o radiación infrarroja invisible. En los primeros modelos de estos distanciómetros se emplearon lámparas de tuxteno o de mercurio como fuente de luz. Su corto alcance de trabajo, especialmente de día, se debía principalmente a la excesiva difusión de la luz incoherente de estas lámparas en la atmósfera. La luz coherente producida por los aparatos de rayos láser ha eliminado notablemente esta limitación y ha aumentado el alcance en la medición durante el día.

Recientemente se han desarrollado distanciómetros electroópticos de corto alcance en los que se emplea radiación infrarroja como señal portadora. Su alcance está limitada a unos cuantos cientos de metros por las limitaciones de la potencia de la señal portadora que produce la radiación infrarroja, generalmente una lámpara de arseniuro de galio (GaAlAs). Cabe mencionar que la mayoría de los trabajos topográficos se pueden realizar satisfactoriamente con este tipo de distanciómetro.

MODELO	FABRICANTE	ALCANCE (m)	PRECISIÓN	
			$\pm a$ (mm)	$\pm b$ ppm
600	Geodimeter	5000	5	1
710	Geodimeter	3500	5	1
12A	Geodimeter	2000	5	5
8	Geodimeter	60000	5	1
14A	Geodimeter	8000	5	3
110	Geodimeter	2100	5	3
112	Geodimeter	3100	5	5
4400	Geodimeter	1600	6	-
DI3	Leica	600	5	5
DI20	Leica	7000	5	1
DI2000	Leica	2800	3	2
DI1600	Leica	3500	3	2
TC2002	Leica	3500	1	1
MA 100	Tellurometer	1000	1.5	1
CD-6	Tellurometer	1500	5	5
HP 3820A	Hewlet-Packard	1600	7	10
Eldi-1	Carl-Zeiss	2500	5	2
Eldi-3	Carl-Zeiss	700	5	2
Elta-14	Carl-Zeiss	800	10	-
Elta-3	Carl-Zeiss	1200	5	2
DM80	Cubic	1600	5	10
DM 501	Kern	1600	5	5
ME3000	Kern	2500	0.2	1
ME5000	Kern	8000	0.2	0.2
GTS-4 ^a	Topcon	3100	2	2
RED 1	Sokkia	2000	5	5

Tabla 3-1. Distanciómetros electroópticos

MODELO	FABRICANTE	ALCANCE (m)	PRECISIÓN	
			$\pm a$ (mm)	$\pm b$ ppm
RED 2	Sokia	2600	5	5
RED 2L	Sokia	6400	5	3
SET2B/2C	Sokia	3100	3	2
DTM-300	Nikon	1100	5	3
C-100	Nikon	800	5	5
PTS-V5	Pentax	2500	3	3
PTS-V2/V2c	Pentax	3100	2	2

Tabla 3-1. Distanciómetros electroópticos (cont.)

Las ventajas principales de estos aparatos consisten en que son pequeños, portátiles, fáciles de operar y tal vez la mayor de ellos es que la intensidad de las ondas portadoras puede modularse directamente, simplificando en gran medida el equipo.

En la tabla 3-1 se dan algunos nombres y características de los instrumentos electroópticos más empleados en la actualidad.

3.3.2 Distanciómetros de microondas

La señal de medición empleada por los dispositivos de medición con base en microondas consistente en una frecuencia modulada superpuesta a la onda portadora. Al igual que los equipos electroópticos, el equipo de microondas trabaja según el principio del desfaseamiento y utiliza frecuencias variables para resolver la ambigüedad del número de ondas completas que hay en la distancia. El alcance de los distanciómetros de microondas es relativamente grande, pudiendo trabajar en la oscuridad, en la niebla o bajo la lluvia ligera. Pero sin embargo las medidas que se

hacen en tales condiciones adversas tienen un alcance más limitado.

Un sistema completo de microondas está formado por dos unidades portátiles idénticas. Cada una contiene todos los componentes necesarios para efectuar mediciones; transmisor, receptor, antenas, circuitos y dispositivos interconstruidos para comunicación. Las unidades se centran mediante plomadas mecánicas u ópticas sobre los extremos de la línea que se va a medir, funcionando uno de los instrumentos como "maestro" y el otro como "remoto". Cabe aclarar que cualquiera de los dos puede funcionar como remoto o maestro, cambiando simplemente la posición de un interruptor.

MODELO	FABRICANTE	ALCANCE (km)	PRECISIÓN	
			$\pm a$ (mm)	$\pm b$ ppm
MRA-5	Tellurometer	50	15	3
CA-1000	Tellurometer	30	15	5
MRA-6	Tellurometer	50	10	3
SIAL MD 60	Siemens-Albis	50	10	3
Electrotape	Cubic	50	10	3
100 C	Microfix	60	15	3

Tabla 3-2. Instrumentos de microondas

La medición de distancias con equipos de microondas requiere de un operador en cada extremo de la línea para tomar un conjunto de lecturas mientras opera el aparato en el modo maestro. Como ambas unidades contienen calibración de longitud de onda con estabilización de temperatura, la práctica de tomar dos medidas da por resultado que estas sean independientes y por consiguiente una valiosa verificación de la distancia. Los

operadores que pueden no estar a la vista uno del otro, coordinan su trabajo comunicándose por medio del radioteléfono incorporado.

En la tabla 3-2 se presenta los nombres y algunos datos técnicos de los instrumentos de microondas más empleados.

3.3.3 Distanciómetros de ondas largas

El equipo que emplea ondas largas de radio puede medir distancias desde aproximadamente 100 km. hasta 8 000 km. Se utilizan principalmente en la navegación marítima, para proporcionar control de posición a las fotografías aéreas y levantamientos magnetométricos, en trabajos de oceanografía y hidrografía, en trabajos especiales para el dragado de puertos, tendido de cables, colocación de plataformas y tubería marina.

INSTRUMENTOS	ALCANCE (km)
DECCA	500
HI-FIX	200
LAMBDA	750
LORAN	2 000
OMEGA	8 000
RAYDIST	200

Tabla 3-3. Distanciómetros de ondas largas

En general, el equipo de onda larga emplea dos técnicas diferentes en la medición, el método hiperbólico (una frecuencia) o el método de dos frecuencias. En el primer método, dos aparatos transmiten señales en la misma frecuencia desde los

extremos de una línea base. Un receptor de orientación múltiple colocado en cada estación de posición desconocida compara las diferencias de fase de las señales de llegada. Los lugares geométricos de los puntos de igual diferencia de fase, originan una serie de hipérbolas en cuyos focos están las estaciones de la línea base. La transmisión a la estación exploradora, o de orientación múltiple, procedente de otra línea base proporciona otra serie de hipérbolas y la intersección de estas se convierte en puntos de posición conocida.

En el método de dos frecuencias, se transmiten dos señales de diferente frecuencia desde una estación base y transmitidas desde una estación exploradora. Los ángulos de fase de las señales retransmitidas se comparan en la estación de exploración y en los puntos base para establecer una serie de círculos concéntricos intersecantes que tienen sus centros en la base a fin de fijar puntos de posición conocida.

En la tabla 3-3 se da una lista de algunos distanciómetros de ondas largas empleados en la actualidad. Cabe mencionar que la precisión en cualquiera de los dos procedimientos, es función de los ángulos de intersección entre las hipérbolas o las circunferencias.

3.4 ERRORES EN LA MEDICIÓN CON DISTANCIÓMETROS

Las fuentes de error en los trabajos con equipo EDM pueden ser personales, naturales o instrumentales.

Entre los errores personales se tiene la lectura incorrecta, el centrado impropio sobre la estación, la evaluación incorrecta de

los factores meteorológicos y de la altura del instrumento entre otros.

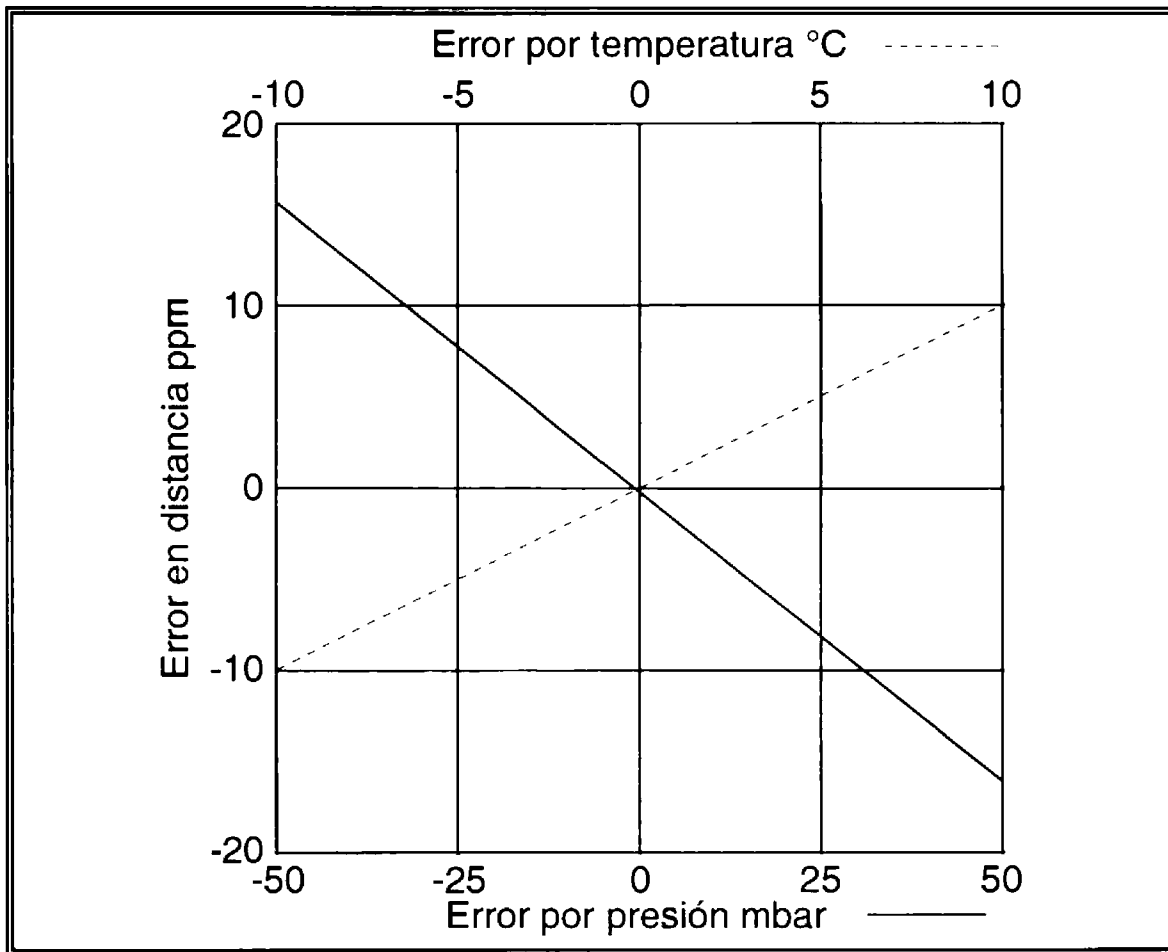


Figura 3-4. Error en distancia por temperatura y presión

Los errores naturales que afectan las mediciones EDM principalmente provienen de las variaciones atmosféricas de temperatura, presión y humedad, que afectan directamente al índice de refracción y modifican la longitud de onda de la radiación transmitida. En la figura 3-4 se representa gráficamente la magnitud del error que se tiene en la medición electrónica de distancias debidas a los efectos de temperatura y presión atmosférica. Nótese que un cambio en 5°C produce un error en la

distancia de 5 ppm y una diferencia de 50 mb, produce un error de -15 ppm.

En cuanto a los errores instrumentales, en la sección 2.3 se estableció que la ecuación de la distancia S_0 es (3-9) y (3-10):

$$S_0 = U_1 \frac{n_1}{n_2} + m \frac{c}{2n_2 f} + Z_0 + \Delta S \quad (3-17)$$

La varianza de la distancia S_0 puede obtenerse de la derivada total de la ecuación anterior aplicando la regla fundamental de la propagación de los errores (2-24), se obtiene:

$$\sigma_{S_0}^2 = \sigma_U^2 + \left[\frac{m}{2nf} \right]^2 \sigma_c^2 + \left[\frac{mc}{2nf^2} \right]^2 \sigma_f^2 + \left[\frac{mc}{2n^2 f} \right]^2 \sigma_n^2 + \sigma_{Z_0}^2 + \sigma_{\Delta S}^2 \quad (3-18)$$

La ecuación (3-18) puede simplificarse con la aproximación:

$$2S = m\lambda = \frac{mc}{nf} \quad (3-19)$$

$$\sigma_{S_0}^2 = \sigma_U^2 + S^2 \left[\left[\frac{\sigma_c}{c} \right]^2 + \left[\frac{\sigma_f}{f} \right]^2 + \left[\frac{\sigma_n}{n} \right]^2 \right] + \sigma_{Z_0}^2 + \sigma_{\Delta S}^2$$

En las ecuaciones anteriores, σ_U representa la desviación estándar de todo el valor de $U_1 \left[\frac{n_1}{n_2} \right]$. Dado que U_1 corresponde generalmente a una distancia muy corta, la influencia de los errores en n_1 y n_2 sobre la precisión de U_2 puede despreciarse.

La precisión de los EDM se da en la bibliografía especializada por la fórmula general:

$$\sigma_{S_0}^2 = a^2 + b^2 S^2 \quad (3-20)$$

o en una forma simplificada:

$$\sigma_{S_0} = \pm(a + bS) \quad (3-21)$$

La ecuación (3-19) puede reducirse a la forma anterior sustituyendo:

$$\sigma_U^2 + \sigma_{Z_0}^2 = a \quad (3-22a)$$

$$\left[\frac{\sigma_c}{c} \right]^2 + \left[\frac{\sigma_f}{f} \right]^2 + \left[\frac{\sigma_n}{n} \right]^2 = b \quad (3-22b)$$

donde:

σ_c : error de la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas en el vacío.

σ_f : error de la frecuencia de modulación.

σ_n : error del índice de refracción.

σ_U : error de la determinación de diferencia de fase.

σ_{Z_0} : error de la corrección cero.

El error $\sigma_{\Delta S}$ de las reducciones geométricas no está incluido en las ecuaciones (3-20) o (3-21) y será tratado en el inciso correspondiente.

Ahora se ve claramente, porque las precisiones de las tablas 3-1 y 3-2, se da en dos partes; la primera el valor de a como una constante y la segunda el de b proporcional a la distancia medida.

Discutiendo por separado cada una de las fuentes de error en los instrumentos EDM, tenemos que el valor aceptado de c en 1957 es igual a 299 792.5 km/s, con una desviación estándar de $\sigma_c=0.4$ km/s. Trabajos recientes han confirmado el valor de c (299 792.458) y dan una desviación estándar 0.001 km/s. Esto corresponde a un error relativo de 0.003 ppm. El error es despreciable para las aplicaciones en levantamientos topográficos, en todo caso su influencia es de naturaleza constante introduciendo un cambio de escala constante en la determinación absoluta de la distancia.

En cuanto a la frecuencia de oscilación tenemos que esta se mide en hertzio (Hz). Para alcanzar, por ejemplo, una longitud de onda modulada de 10 m, debe producirse oscilaciones de la señal con una frecuencia de alrededor de 30 MHz [ecuación (3-2)].

La frecuencia de modulación resultante es función de la forma y el tamaño del cristal de cuarzo empleado, así como de los cambios en la temperatura ambiente y puede calibrarse con una precisión de 0.1 ppm y estabilizarse durante el uso del instrumento EDM dentro de unos pocos Hz si se mantiene a una temperatura constante. Dependiendo del dispositivo empleado para minimizar los efectos de la temperatura se logrará la precisión de la frecuencia; la mayoría de los EDM de corto alcance emplean osciladores de cristal con compensación de temperatura (TCXO por sus siglas en inglés) logrando precisiones de ± 1 ppm en un rango de temperatura de 0 a 50°C. Si no se controla la temperatura, habrá una deriva de la frecuencia de hasta 10 ppm o

más. La mayoría de los instrumentos EDM tienen un calentador interno y requieren de un periodo de calentamiento. Aún con la fuente de calor la frecuencia puede variar por envejecimiento de los cristales de cuarzo, pudiendo llegar a 1ppm por año para los EDM basados en TCXO.

Algunos instrumentos a microondas muestran variaciones, alrededor de 50 MHz por año que, para una frecuencia de modulación de 10 MHz produciría un error de 5 ppm. Es por lo tanto recomendable que la frecuencia sea controlada al menos una vez al año, preferentemente una vez al mes, si el equipo se va a emplear en condiciones adversas.

Los métodos de estabilización de frecuencia y de calibración difieren de un equipo EDM a otro, por lo que se recomienda consultar el manual de usuario, o al fabricante sobre la metodología aplicable para la calibración de frecuencia de sus instrumentos.

La influencia de los errores σ_p , σ_t y σ_e , en la medición de la presión barométrica p , la temperatura t y la presión de vapor de agua e puede calcularse aplicando la ley de propagación de errores a las ecuaciones (3-12) y (3-16). Obteniéndose para mediciones electroópticas:

$$\sigma_n^2 = \left[\frac{0.269579(n_0 - 1)}{(273.15 + t)^2} p \right]^2 \sigma_t^2 + \left[\frac{0.269578(n_0 - 1)}{273.15 + t} \right]^2 \sigma_p^2 \quad (3-23)$$

En condiciones normales, un error de 1°C produce un error de 1 ppm y 1 mb produce un error de 0.3 ppm en n . Como se mencionó anteriormente, la influencia de la presión del vapor de

agua puede despreciarse en las mediciones hechas con equipos EDM electroópticos.

La propagación de errores en mediciones a microondas da:

$$\begin{aligned} \sigma_n^2 = & \left[\frac{77.624}{273.15+t} \times 10^{-6} \right]^2 \sigma_p^2 \\ & + \left[\begin{aligned} & -\frac{77.624p}{(273.15+t)^2} \times 10^{-6} + \frac{12.924e}{(273.15+t)^2} \times 10^{-6} \\ & -\frac{743791.2e}{(273.15+t)^3} \times 10^{-6} \end{aligned} \right]^2 \sigma_t^2 \\ & + \left[\left(\frac{371895.6}{(273.15+t)^2} - \frac{12.92}{273.15+t} \right) \times 10^{-6} \right]^2 \sigma_e^2 \end{aligned} \quad (3-24)$$

Esta fórmula en condiciones normales para un error de 1°C produce un error de 2 ppm, un error de 1 mb en p produce un error de 0.3 ppm en n y un error de 1 mb en la presión parcial de vapor de agua produce un error de 4.6 ppm.

La influencia de los errores en la determinación de e es muy crítica en la medición a base de microondas. El valor de σ_e puede calcularse aplicando la regla de propagación de los errores a la ecuación (3-13) obteniéndose:

$$\sigma_e^2 = \sigma_E^2 + (-0.000662p\sigma_{\Delta t})^2 + (-0.000662\Delta t\sigma_p)^2 \quad (3-25)$$

Resumiendo, los errores en mediciones meteorológicas producen los siguientes errores en las distancias determinadas en condiciones normales:

- 1) Un error de 1 C en temperatura produce un error de 1 ppm para instrumentos electroópticos y 2 ppm para los EDM a base de microondas.
- 2) Un error de 1 mb en la presión barométrica produce un error de 0.3 ppm.
- 3) Un error de 0.5 en $(t_h - t_s)$ y un error de 1 C en t producen un error de hasta 10 ppm en las mediciones a base de microondas.

En la práctica, las condiciones meteorológicas son medidas solamente en los extremos de la distancia medida, en ocasiones en un sólo extremo. En algunos casos, particularmente en terrenos accidentados, la temperatura media a lo largo de la línea medida puede diferir en varias unidades de los valores promedio observados en los extremos de la línea.

Los levantamientos en zonas urbanas, donde la radiación térmica en las áreas pavimentadas y de los edificios pueden cambiar drásticamente desde un punto de la línea hasta otro, requieren de atención especial en la determinación de los datos meteorológicos. Por otra parte los termómetros, barómetros y psicómetros deben ser de buena calidad y calibrarse periódicamente.

Por último, el error en la diferencia de fase puede determinarse con una resolución de 1/1 000 o mejor, de la longitud de onda medidora. En base a que los instrumentos modernos se construyen con el centro electrónico muy cercano o sobre el centro geométrico del instrumento el error $\sigma_U \approx 0$, entonces de la ecuación (3-22a) se tiene que:

$$\sigma_U = a \quad (3-26)$$

3.5 REDUCCIÓN DE DISTANCIAS AL HORIZONTE

Todos los instrumentos EDM, excepto ocasiones excepcionales, miden distancias inclinadas. Lógicamente las distancias inclinadas deben reducirse al horizonte después de ser corregidas por factores instrumentales y ambientales.

En las operaciones de campo se miden y se registran las alturas del equipo h_e del equipo EDM y h_r del reflector sobre los puntos de estación, esta información se empleará en la nivelación trigonométrica la cual se verá en detalle en el capítulo 9, la distancia cenital z o la altura a y la distancia inclinada S , figura 3-5. En base a estos elementos se tiene:

$$d = S \cos a \quad (3-27)$$

o

$$d = S \sin z \quad (3-28)$$

La contribución al error por la reducción al horizonte se determina aplicando la fórmula de propagación de errores, resultando:

$$\sigma_d^2 = (\cos a)^2 \sigma_S^2 + (S \sin a)^2 \sigma_a^2 \quad (3-29)$$

ó

$$\sigma_d^2 = (\sin z)^2 \sigma_S^2 + (S \cos z)^2 \sigma_a^2 \quad (3-30)$$

donde:

σ_a : desviación estándar de la altura en radianes.

σ_z : desviación estándar de la distancia cenital en radianes.

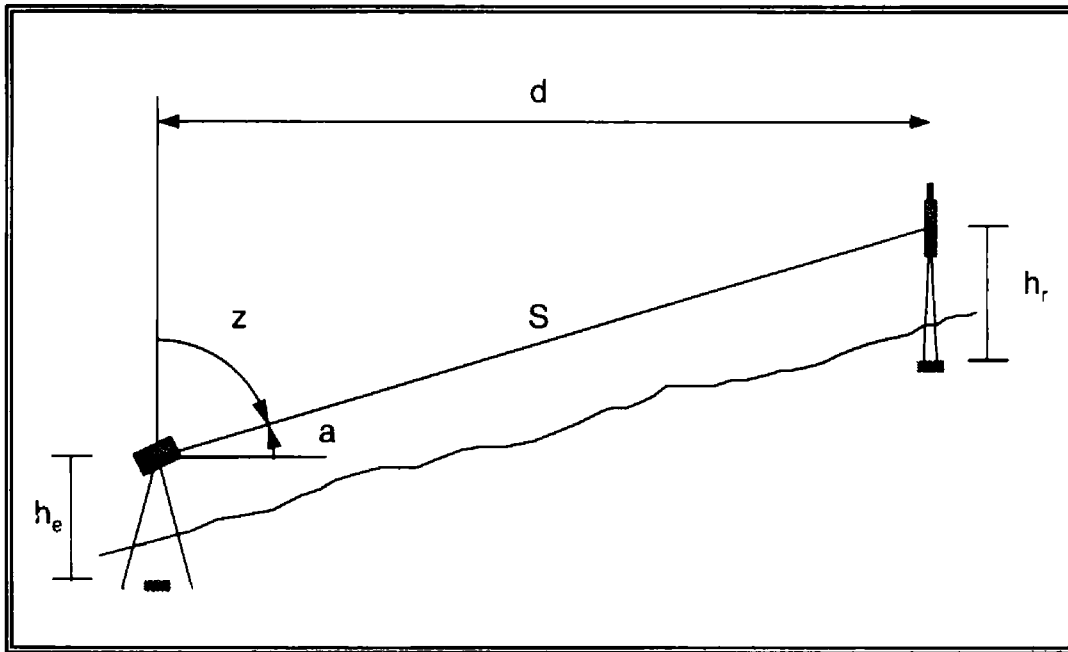


Figura 3-5. Reducción de distancias al horizonte

4. EL GONIÓMETRO

El goniómetro es el instrumento topográfico considerado universal, ya que lo mismo se utiliza para medir ángulos horizontales o verticales, como para alinear, nivelar o para la reducción de distancias. Han sido grandes las innovaciones introducidas en el diseño de este instrumento, aunque los principios básicos se siguen conservando. A continuación se detallan las características básicas de este aparato.

4.1 CARACTERÍSTICAS

El diseño básico de un goniómetro se da en la figura 4-1, en la que se aprecian las partes fundamentales que lo constituyen, teniendo mayor o menor variación en función del tipo, calidad y época a la que pertenecen.

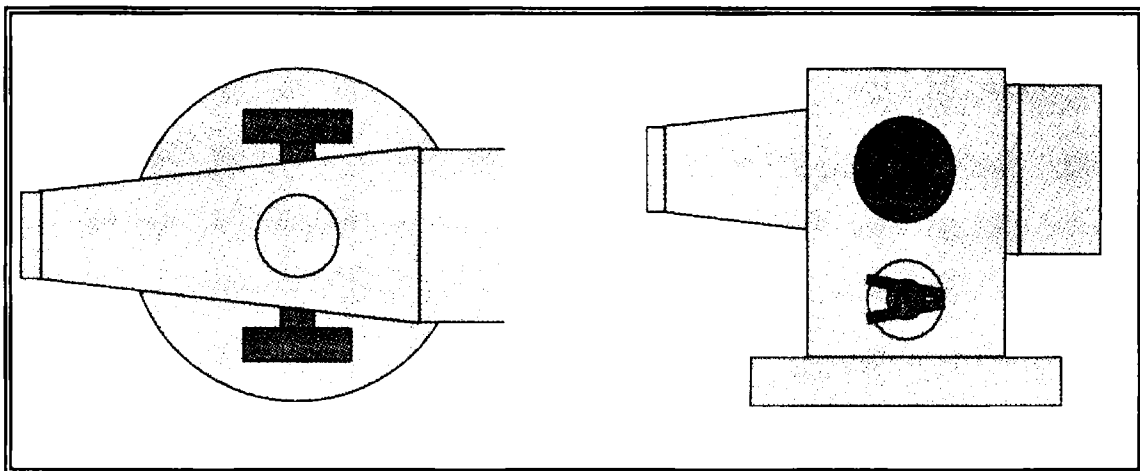


Figura 4-1. Goniómetro

Aún cuando todos los componentes del aparato son importantes, a continuación se describen en particular algunas de sus partes, así como sus características principales que, dicho sea de paso, resultan comunes a casi todos los instrumentos topográficos.

4.1.1 Nivel tubular de burbuja

Es un tubo curvo de vidrio llamado frasco de nivel, sellado en ambos extremos, que contiene un líquido sensible y una burbuja de aire alargada. El líquido, es alcohol sintético purificado, al cual ha desplazado el uso de la mezcla de alcohol y éter. En la superficie externa del tubo existen marcas divisorias, uniformemente espaciadas, para controlar la burbuja. Normalmente, estas divisiones son de 2 mm (línea parisiense o pars).

Se conoce como directriz del nivel a la línea tangente a la superficie superior del frasco en su punto medio.

La sensibilidad del nivel, la establece el radio de curvatura del frasco. A mayor radio, corresponde una mayor sensibilidad y esta a su vez produce una mayor precisión, aunque con ello se requiere mayor tiempo para su centrado. Este parámetro se expresa de dos formas:

- 1) Por el ángulo en segundos sexagesimales subtendidos por un pars.
- 2) Por el radio de curvatura del frasco.

Mediante un sistema óptico se logra una burbuja del tipo de coincidencia, en el cual la burbuja se centra haciendo coincidir los dos extremos opuestos de la burbuja, hasta formar una curva continua (figura 4-2).

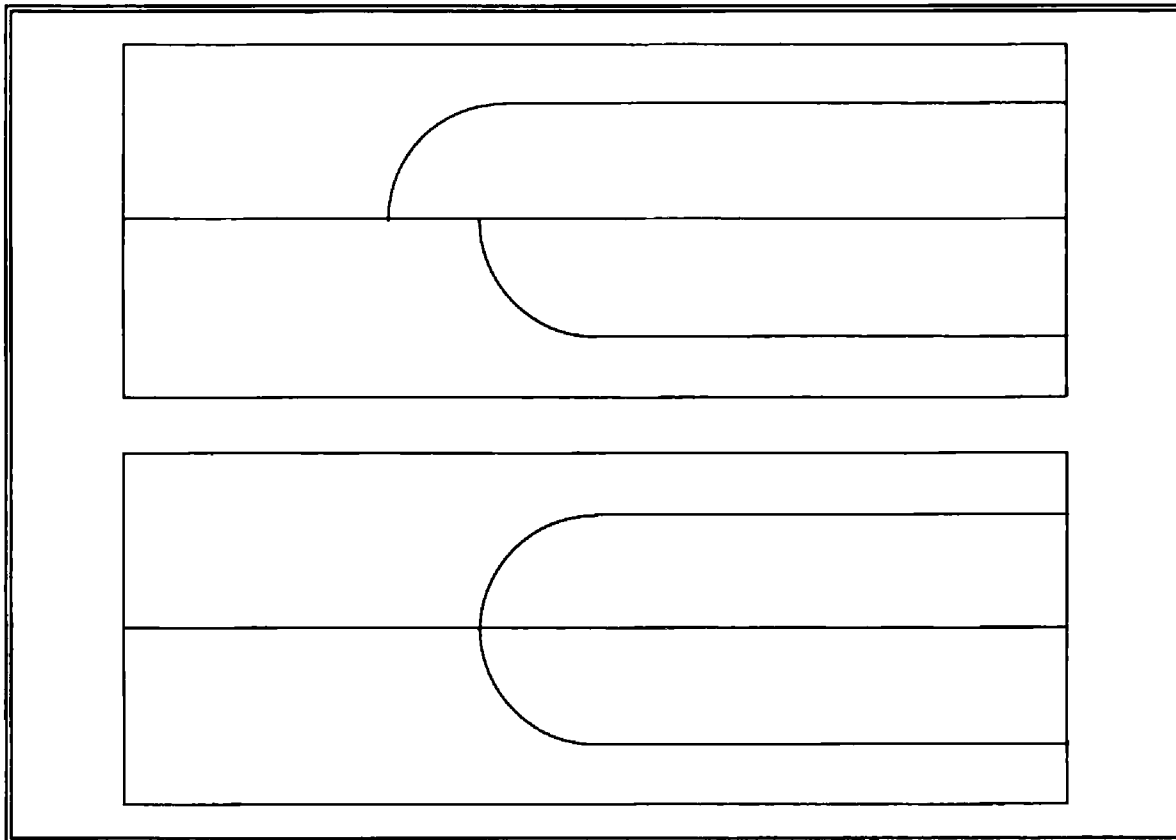


Figura 4-2. Nivel de coincidencia

Una burbuja normal se puede centrar con una precisión de alrededor del 10% de su sensibilidad y la de coincidencia, con una aproximación de 2.5% de precisión.

La sensibilidad del nivel y/o su radio de curvatura se puede determinar aplicándose el siguiente método:

- a) Colóquese el goniómetro a unos 50 metros de un estadal perfectamente vertical.
- b) Efectúese una lectura con la burbuja perfectamente centrada.

c) Inclínese el goniómetro ligeramente haciendo una nueva lectura sobre el estadal, midiéndose el desplazamiento de la burbuja. Así de la figura 4-3, se tiene que:

$$\frac{b}{R} = \frac{h}{D} \quad (4-1)$$

$$R = b \frac{D}{h} \quad (4-2)$$

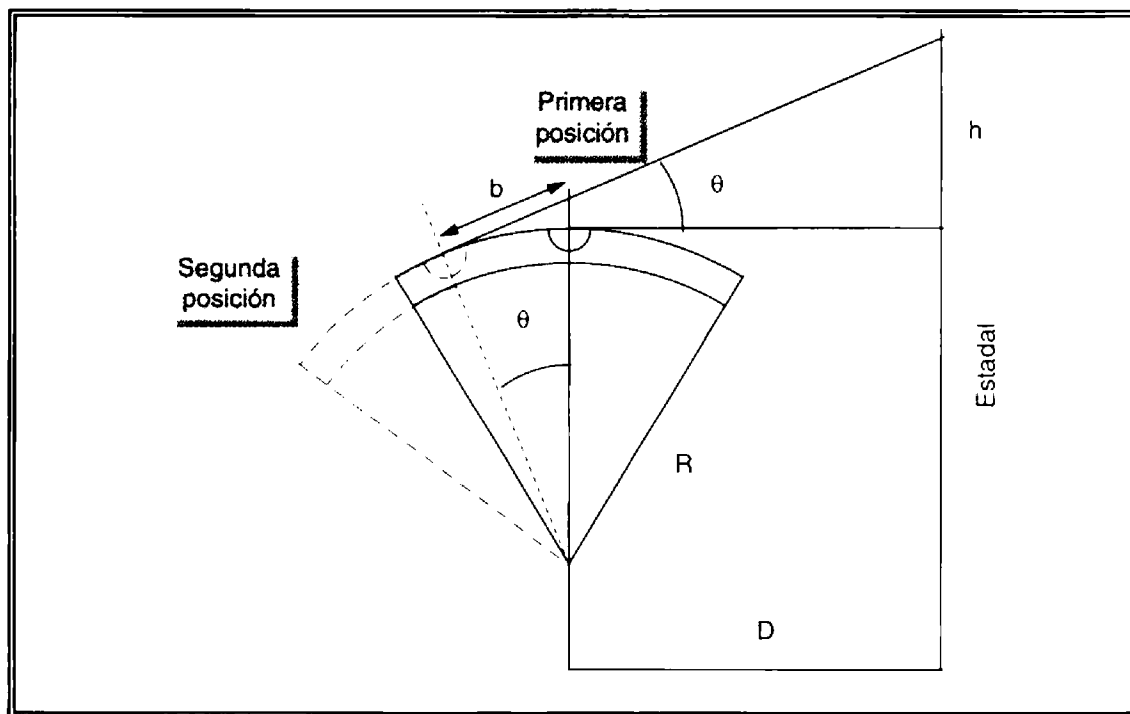


Figura 4-3. Sensibilidad del nivel

$$\theta'' = \frac{b}{R} 206264.8 \quad (4-3)$$

Sustituyendo la ecuación (4-2) en (4-3):

$$\theta'' = \frac{h}{bD} 206264.8 \quad (4-4)$$

$$\theta'' = \frac{h}{D} 206264.8 \quad (4-5)$$

Tomando por n el número de divisiones recorridas por la burbuja:

$$\varepsilon'' = \frac{\theta''}{n} = \frac{h}{D} 206264.8 \quad (4-6)$$

El ángulo ε indica la rotación angular en segundos de arco, que se produce cuando la burbuja se desplaza de una línea a la siguiente.

Como se indicó generalmente una división del frasco es igual a 2 mm, evaluando la fórmula (4-3) se obtiene la tabla 4-1.

ε''	1	5	10	20	30
R (m)	412.53	82.50	41.25	20.63	13.75

Tabla 4-1. Radio de curvatura del nivel tubular

4.1.2 Anteojo

Es un tubo metálico que consta fundamentalmente de cuatro partes (figura 4-4):

- a) Objetivo.
- b) Lente de enfoque.
- c) Retícula.
- d) Ocular.

El objetivo es una lente compuesta, cuyo eje óptico es coincidente con el eje de simetría del tubo y con pérdida mínima de luz por reflexión y aberración.

La lente de enfoque está montada en el interior del tubo y está provista de movimiento deslizante. Su función es hacer que la luz que incide al objetivo esté a foco en el plano de la retícula.

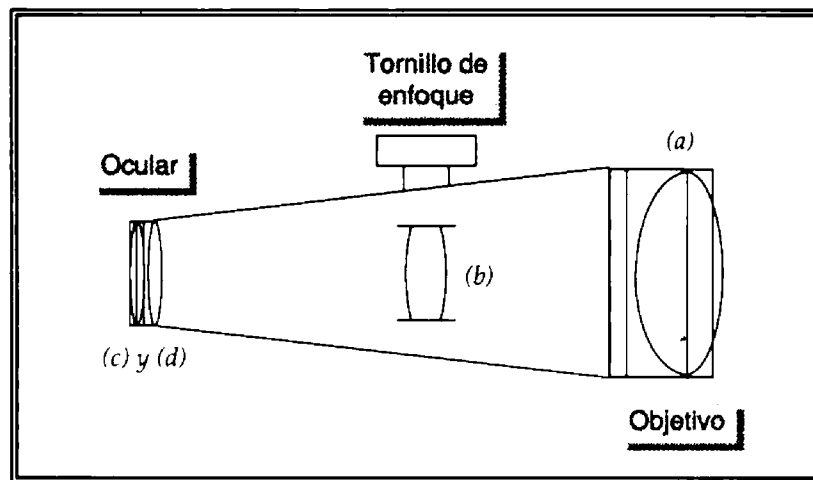


Figura 4-4. Telescopio

La retícula es un vidrio plano en el cual se proyectan las imágenes. Tiene líneas diametrales grabadas en cruz, una de las cuales debe ser horizontal y la otra vertical, incluyendo algunos, dos líneas cortas y equidistantes del hilo horizontal, las que se conocen como hilos estadimétricos. Originalmente, los hilos se construían de tela de araña, filamentos de platino o de vidrio estirado. En la mayoría de los instrumentos modernos son líneas grabadas sobre el vidrio con filamentos de metal oscuro incrustado en las rayas. Algunos tipos de retículo se presentan en la figura 4-5.

El ocular es un microscopio cuya finalidad es amplificar la imagen proyectada en la retícula. Puede constar de dos o cuatro lentes

para imagen invertida o directa. Tiene su propio mecanismo de enfoque para adaptarla a la capacidad visual del observador.

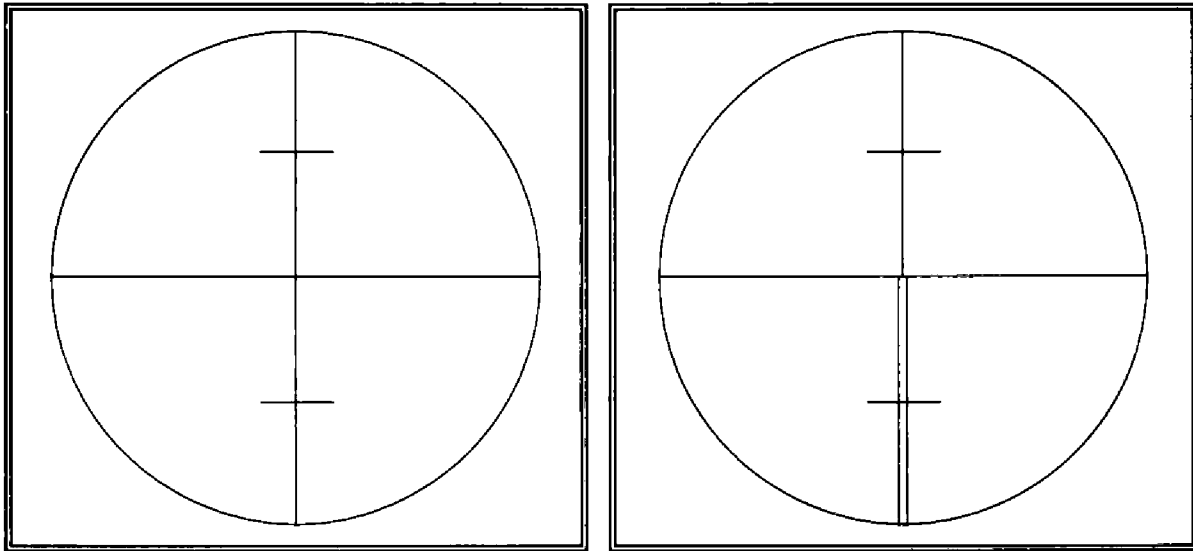


Figura 4-5. Retículas

Durante la observación con un telescopio topográfico es muy importante que la imagen se forme con absoluta nitidez en la retícula mediante el enfoque adecuado. Para comprobar que este se realice correctamente, el observador puede mover la cabeza en sentido horizontal o vertical, y si nota que los hilos parecen moverse con respecto a la imagen existirá un mal enfoque, fenómeno conocido como paralaje, lo que hace imposible que la observación sea de buena calidad, ya que la imagen se forma adelante o atrás de la retícula. Para reducir este efecto, se puede seguir el siguiente procedimiento:

- 1) Observar el cielo con el anteojo, ajustando el enfoque de ocular hasta que los hilos de la retícula se vean con la mayor nitidez posible.
- 2) Observar un objeto distante, enfocando el anteojo hasta lograr la mayor claridad de definición.

- 3) Probar si existe paralaje, y de ser así repetir el proceso nuevamente.

Con objeto de comprender mejor como pueden incidir en el logro de una correcta operación del equipo, a continuación se describen brevemente algunos conceptos fundamentales de la óptica del anteojo.

Poder de resolución, es la capacidad de una lente para descubrir detalles y se expresa en segundos de arco, según el ángulo entre dos puntos lo suficientemente separados para distinguirlos como objetos independientes y no como un punto difuso. El poder de resolución está en función de la abertura efectiva del objetivo y es independiente del poder amplificador del sistema óptico. Su valor se determina aproximadamente con la relación:

$$R'' = \frac{14}{D} \quad (4-7)$$

donde:

R: ángulo de resolución en segundos de arco

D: abertura de la lente

El poder de resolución teórico del ojo humano es de 60'' y por lo tanto la relación de resolución/poder de amplificación debe llevarse a este límite; es decir, si se tiene una lente con un poder de resolución de 3'', debe de amplificarse 20 veces para obtener 60''. Sin embargo, normalmente se usa un mayor poder de amplificación debido a las variaciones en la visión de los observadores.

Amplificación, es la razón entre el tamaño aparente de un objeto visto a través del anteojo, al mismo objeto visto sin ayuda óptica.

Aún cuando la amplificación debe ser mayor que $60/R$, hay un límite más allá del cual se demerita la resolución, por lo que esta nunca debe ser mayor de 2 a 3 veces $60/R$. Aún cuando el objetivo permita la resolución necesaria, existen otros inconvenientes resultantes de una gran amplificación, ya que se puede reducir el campo visual y con ello resultar más notorios los efectos de la reverberación atmosférica.

Definición, se entiende como el resultado general que se logra con el uso de un anteojo. A mayor definición, mayor claridad de visión y por lo tanto, mejor precisión en las punterías.

Los parámetros descritos pueden ser de utilidad para establecer un buen criterio, el cual permita la selección adecuada del equipo, en función de las necesidades reales a satisfacer.

El instrumento siempre estará diseñado para mantener el equilibrio entre los diferentes parámetros citados. Por ejemplo, el tránsito de 1' reúne las siguientes características:

Amplificación	18 a 28X
Campo visual	1° a 1° 30'
Resolución	4" a 5"
Enfoque mínimo	1.5 a 2.1 m
Sensibilidad de niveles	
alidada	0" a 100" / 2 mm
del anteojo	30" a 60" / 2 mm
Peso	5 a 7.5 kg

A continuación, se listan algunas de las características sobresalientes de los goniómetros modernos:

- 1) El instrumento en su totalidad es más robusto, compacto, protegido y ligero que sus antecesores.
- 2) Los anteojos son más cortos y robustos, además cuentan con sensores electrónicos, para la determinación de los ángulos.
- 3) Se montan sobre una base nivelante especial de tres tornillos, que tiene integrada una plomada óptica, los cuales además permiten intercambiar accesorios sin sacar la base nivelante de su centro.
- 4) La lectura se realiza sobre pantallas, eliminándose la incertidumbre en las lecturas.
- 5) La lectura del círculo vertical se relaciona con mayor precisión a la gravedad, mediante un compensador automático.
- 6) El acoplamiento al trípode se hace mediante un sistema tornillo-tuerca de 5/8 de pulgada (1.6 cm).

4.2 CLASIFICACIÓN DE LOS GONIÓMETROS

Entre las posibles clasificaciones de los goniómetros, se pueden hacer dos distinciones:

- a) La primera por cuanto a la precisión que se puede lograr, y
- b) La segunda por cuando al funcionamiento de su círculo horizontal.

En el primer caso se puede intentar su clasificación en cuatro categorías:

- 1) Goniómetros pequeños, en los que las lecturas se hacen mediante vernier y con la ayuda de una lupa; sus círculos son metálicos, el horizontal es de 6 a 8 cm de diámetro y el vertical de 5 a 7 cm; la lectura se estima al minuto. Se usan principalmente en construcción y levantamientos sencillos de poca precisión.
- 2) Goniómetros de ingeniería, en los cuales las lecturas se hacen mediante un micrómetro o una escala óptica, sobre un círculo de cristal y la estimación es de 10" a 20".
- 3) Goniómetro de precisión, en los que las lecturas se realizan por medio de micrómetro óptico en el que se logran estimaciones de 1" o menos, y cuyos círculos son de cristal de 10 a 13 cm en el horizontal y de 7 a 9 cm en el vertical, así como por medio de sensores electrónicos. Se utilizan en trabajos topográficos de alta precisión, así como en levantamientos geodésicos de mediana precisión.
- 4) Goniómetros de alta precisión, son similares en cuanto al diseño de los descritos en el punto anterior, aunque introducen mejores características de amplificación, resolución, etc.; las lecturas obtenidas directamente son al segundo, apreciándose la fracción de este.

Se emplean en trabajos de astronomía de posición, así como en levantamientos geodésicos de primer orden.

Los círculos de lectura mencionados anteriormente, se describen brevemente a continuación:

- i) Vernier: Es un dispositivo mecánico bastante simple que permite una precisión aceptable de lectura. Consiste básicamente en sobreponer dos escalas con diferentes graduaciones y la lectura se hace en donde coinciden las escalas.

Si la unidad del círculo principal es c y la del vernier es v con n unidades, se tiene:

$$(n - 1)c = nv \quad (4-8)$$

lo que permite una desviación estándar de alrededor de media unidad del vernier.

- ii) Escala óptica: Simplemente se sobrepone una escala auxiliar al círculo principal, permitiendo hacer la lectura directamente con el índice de dicha escala.

- iii) Micrómetro óptico: Por medio de un sistema de prismas, las partes diametralmente opuestas de los círculos se sobreponen ópticamente, de manera que las imágenes se pueden mover con la ayuda de un micrómetro, lo que equivale a tener un promedio de las lecturas.

- iv) Sensores electrónicos: A mediados de los ochentas, se introdujo en México un sistema de medición angular que consiste en la combinación óptica-electrónica, en la que se tiene un círculo con trazos sensibles. Es un sistema de medición dinámico en función del tiempo que capta todos los trazos del círculo, eliminando posibles errores de

excentricidad. Normalmente la salida se da en forma digital en una pantalla.

Por lo que toca al funcionamiento del círculo horizontal, los goniómetros se pueden clasificar en:

- 1) Repetidores.
- 2) Direccionales.

4.2.1 Goniómetros repetidores

Consisten en un mecanismo de doble eje acimutal o de un tornillo fijador de repetición. Tiene la particularidad de que su círculo horizontal puede fijarse indistintamente a la base o a la alidada. De igual manera que el goniómetro común, este diseño permite repetir un ángulo cualquier número de veces y acumularlo directamente en el círculo. Algunos instrumentos de este tipo son el Theo 020a y el T1, de escala óptica el primero y micrómetro óptico el segundo.

El círculo vertical funciona de manera similar al horizontal, para la referencia del plano horizontal se tiene un nivel de índice, normalmente del tipo de coincidencia, o bien un sistema de compensación automática.

4.2.1.1 Medición angular

La medición de un ángulo, con un goniómetro repetidor, se realiza accionando tanto el tornillo general, como el particular, así como los respectivos tornillos tangenciales. Una vez verificado el

estado del instrumento, centrado y nivelado en la estación, se procede de la siguiente manera:

- a) Aflojar los tornillos de ambos movimientos, general y particular.
- b) Aproximar la lectura a cero (o al origen deseado) y fijar el movimiento particular, afinando la lectura a cero, con el tornillo tangencial respectivo, efectuando giros en el sentido de las manecillas del reloj.
- c) Dirigir la visual al punto origen con el movimiento general, fijándolo una vez hecha la puntería.
- d) Hacer la puntería en el vértice de cierre utilizando el movimiento particular, desde luego se deberá afinar la puntería con el tornillo tangencial.
- e) Realizar la lectura del ángulo en esa posición.

Ahora bien, si se desea medir el ángulo por repeticiones, se deberá seguir el método descrito para la primera lectura, conservándola al regreso de la visual al origen, para repetir el procedimiento indicado, lo que irá sumando el ángulo tantas veces como se repita. Es importante tener presente, que si la suma excede los 360° , se deberá tomar nota de ello, para que cuando se efectúe el promedio, este hecho sea tomado en cuenta.

Se sugiere la conveniencia de repetir un número par de veces el ángulo, intercambiando el círculo vertical a la izquierda y a la derecha, para disminuir los errores instrumentales.

La medición del ángulo vertical o cenital, es una operación sumamente sencilla, desde el punto de vista geométrico, ya que el

origen se tiene ya sea en el horizonte o en el cenit, y el círculo graduado de 0° a 360° o de 45° a 135° , se lleva al origen mediante un nivel de índice o un sistema de compensación automática, de manera que la medición consiste en que, una vez centrado y nivelado el aparato, se dirija la visual al punto deseado y se efectúe la lectura correspondiente. Algunos comentarios adicionales, sobre la determinación de ángulos verticales se hacen en la sección de goniómetros direccionales.

4.2.2 Goniómetros direccionales

En este tipo de goniómetros no se cuenta con doble movimiento horizontal, sino que su eje acimutal es sencillo. Esto significa que más que medir ángulos, se miden direcciones y por medio de las diferencias de dos lecturas, se obtiene el ángulo. Dentro del equipo de precisión estos son los más usuales, y como ejemplo se pueden mencionar el Kern DKM2-A, el T1 y T3 de Leica, el Th2 de Zeiss, el Theo 010a de Luft o el SET2 de Sokkia. Generalmente las lecturas del valor angular son por medio de un micrómetro óptico, lo que reduce el error de excentricidad del círculo. Al igual que en los goniómetros repetidores el plano de referencia para la medida de los ángulos verticales, se logra a través de un nivel de índice del tipo de burbuja o mediante un sistema de compensación automática.

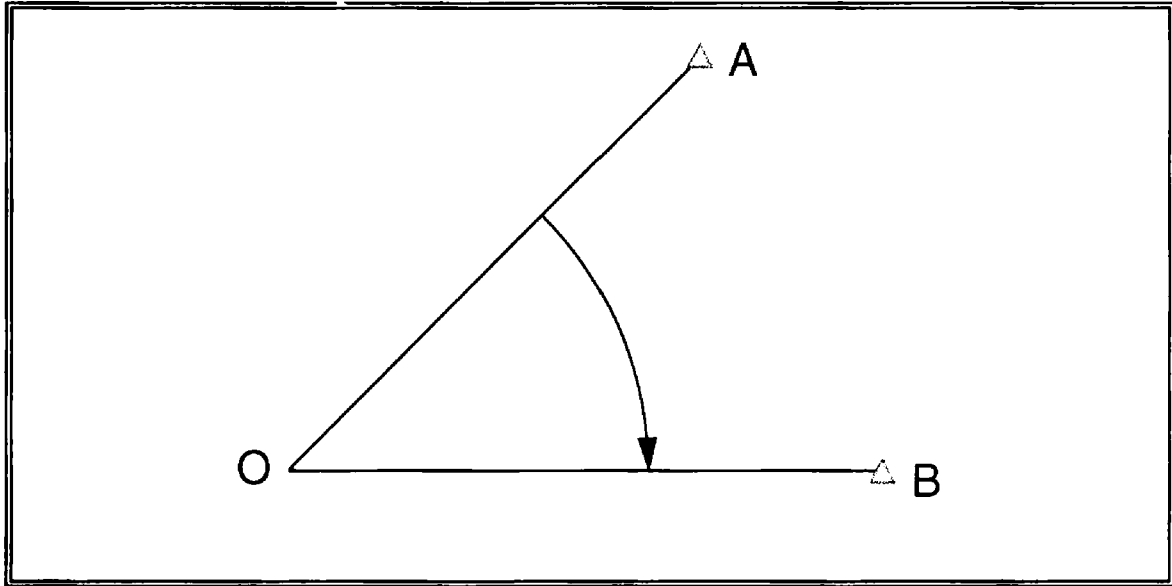


Figura 4-5. Medición angular

4.2.2.1 Medición de ángulos

Según se mencionó anteriormente, la medida de un ángulo resulta de la diferencia de dos direcciones, que no son más que lecturas del círculo horizontal tomadas en estaciones sucesivas. Aún cuando el goniómetro de direcciones sólo tiene movimiento horizontal, es posible cambiar el origen de las lecturas, mediante un tornillo selector. Con objeto de minimizar los errores por graduación, las lecturas se deben distribuir alrededor del círculo, para ello se recomienda incrementar el origen de lectura según la relación $180^\circ/n$, donde n es el número de series que se van a realizar. Se entiende por serie a la medida de un ángulo en las dos posiciones del círculo vertical (I, izquierda o D derecha). Por ejemplo, si se quiere medir el ángulo AOB, presentado en la figura 4-5, el procedimiento es el siguiente:

- i) Se dirige la visual OA con el círculo a la izquierda, eligiendo un origen; por ejemplo, $0^\circ 00' 10.0''$.

- ii) Se gira el anteojo para visar **B** y se efectúa la lectura; por ejemplo, $35^{\circ} 10' 15.0''$.
- iii) Se invierte el telescopio y se gira acimutalmente hasta ver nuevamente **B**, pero ahora con el círculo vertical a la derecha; por ejemplo, $215^{\circ} 10' 20.0''$.
- iv) Se observa nuevamente hacia **A** para cerrar la serie; por ejemplo, $180^{\circ} 00' 10.0''$.

El ángulo **AOB** resulta del promedio de las diferencias medidas, con la ventaja de que este método elimina el error de colimación horizontal. Identificando convenientemente las lecturas de esta serie se tendrá lo reflejado en el siguiente cuadro.

Serie	PC	PO	Dirección	Diferencia	Promedio
	I	A	0° 00' 10.0''		
	I	B	35 10 15.0	35 10 05.0	
	D	B	215 10 20.0		35 10 07.5
	D	A	180 00 10.0	35 10 10.0	

En cuanto al ángulo vertical o cenital, hay que tener en cuenta que existen goniómetros con el círculo vertical graduado de 0° a 360° y otros de 45° a 135° con el círculo a la derecha y de 135° a 45° con el círculo a la izquierda, por lo que se tendrá:

1er. caso

$$z = 180^{\circ} + (I - D) / 2 \quad (4-9)$$

$$v = (D - I) / 2 - 90^{\circ} \quad (4-10)$$

2o. caso

$$z = 90^\circ + D - I \quad (4-11)$$

$$v = I - D \quad (4-12)$$

En lo que toca a la forma de hacer la lectura, tanto en el círculo horizontal como en el vertical, se deberá realizar de acuerdo a las características de cada marca y modelo de instrumento.

Cuando se utilice un goniómetro con nivel de índice, se deberá de hacer la coincidencia de la burbuja cada vez que se lea un ángulo vertical o cenital.

4.3 MANIPULACIÓN Y CENTRADO

Esta clase de instrumentos requieren de algunos cuidados especiales, ya que desde que son sacados de su estuche deberán seguirse procedimientos adecuados para evitar desajustes. Al sacarlo, se tomará de las asideras que para ello tiene, o de no ser así, del soporte del antejo. Atornillarlo firmemente al trípode, que a su vez ha de estar adecuadamente emplazado. Nunca deben forzarse los movimientos. Antes de iniciar cualquier trabajo con el goniómetro, es necesario revisar sus ajustes. Las condiciones fundamentales que deberá cumplir son los siguientes:

- a) La línea de colimación debe ser paralela al eje horizontal.
- b) El eje horizontal debe ser perpendicular al eje vertical.
- c) El eje vertical deber ser realmente vertical.

Adicionalmente, debe verificarse el buen funcionamiento de la plomada óptica.

Para efectuar la revisión y las correcciones procedentes, se recomienda seguir las instrucciones dadas por el fabricante de cada marca y modelo instrumental, que normalmente están suficientemente documentadas en los manuales de los equipos.

Una vez comprobado el buen funcionamiento instrumental, el centrarlo se logra por medio de un procedimiento de tanteos, en el cual se logra la nivelación aproximada con el nivel esférico, después se verifica con la plomada óptica el centrado, desplazando hacia los lados el instrumento hasta centrarlo con precisión. A continuación se realiza una nivelación más exacta empleando el nivel de la alidada, visando nuevamente a través de la plomada óptica, para corregir posibles desviaciones. El proceso se repite cíclicamente hasta lograr el centrado y nivelación simultáneamente. Una vez logrado, se está en posibilidad de medir ángulos de acuerdo a los procedimientos descritos. Al terminarse las operaciones, el instrumento se deberá limpiar con un lienzo suave, guardándolo cuidadosamente en su estuche, cuidando que no quede ningún movimiento forzado y comprobando que tenga el absorbente de humedad en buenas condiciones, ya que esta puede causar serios daños al instrumento.

4.4 FUENTES DE ERROR EN LA MEDICIÓN DE ÁNGULOS

Cuando se mide un ángulo, las fuentes de error se pueden clasificar de tres diferentes maneras:

- 1) Errores instrumentales.
- 2) Errores naturales.
- 3) Errores personales.

Adicionalmente se pueden considerar las equivocaciones, las cuales se presentan por descuido en la operación del instrumento, o por una mala comprensión del problema geométrico que se pretende atacar.

4.4.1 Errores instrumentales

Aún cuando se hayan efectuado todas las posibles correcciones al equipo, y estas hayan sido realizadas con todo cuidado, siempre quedarán algunos errores residuales, los más conocidos son:

Error de colimación horizontal, el cual es causado por la falta de perpendicularidad entre la línea de colimación y el eje de alturas.

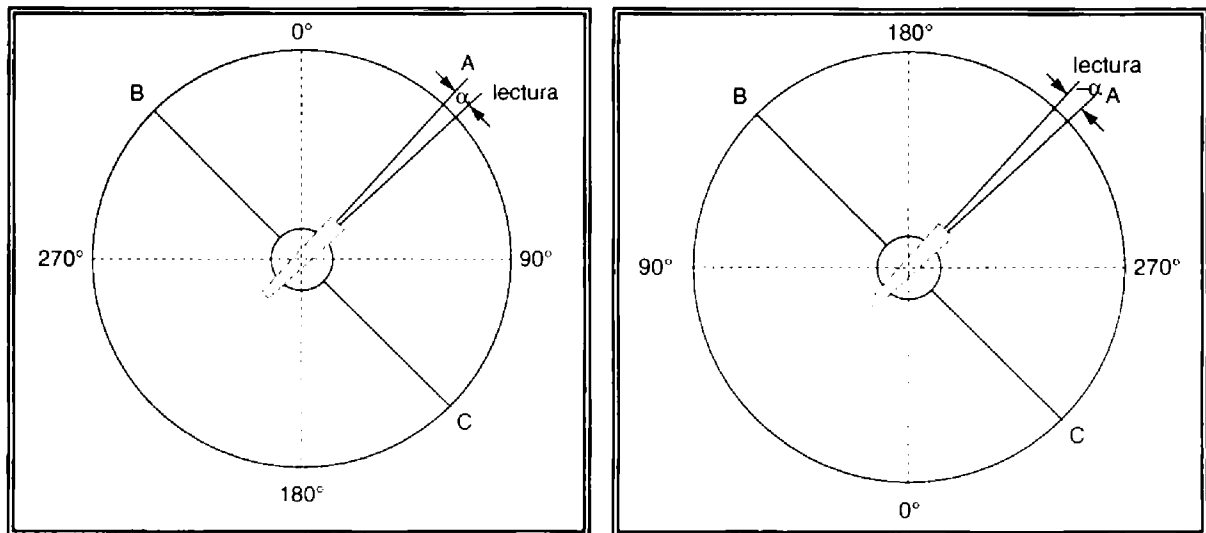


Figura 4-6. Error de colimación horizontal

Supóngase que se tiene un error de colimación positivo de magnitud α (figura 4-6). Si se invierte el aparato para quedar con el círculo a la derecha, el error será $-\alpha$. Como consecuencia, el error de colimación se eliminará de las observaciones en ambas posiciones del círculo, ya que al promediar las lecturas se tendrá:

$$\alpha - \alpha = 0$$

Error de colimación vertical, se produce ya sea por la desviación del hilo horizontal de la retícula o por un error del nivel de índice. Tiene el mismo efecto que si el cero de la graduación del círculo vertical se desviara cierto ángulo α con respecto al cenit.

Si se tiene un círculo vertical graduado de 0° a 360° , con un error de colimación vertical de α en la posición del anteojo con el círculo a la izquierda (figura 4-7), al invertirse y visarse el mismo punto, el error de colimación será $-\alpha$.

Las dos distancias cenitales medidas serán:

$$z_1 = z - \alpha \quad (4-13)$$

y

$$z_0 = 360^\circ - z + \alpha \quad (4-14)$$

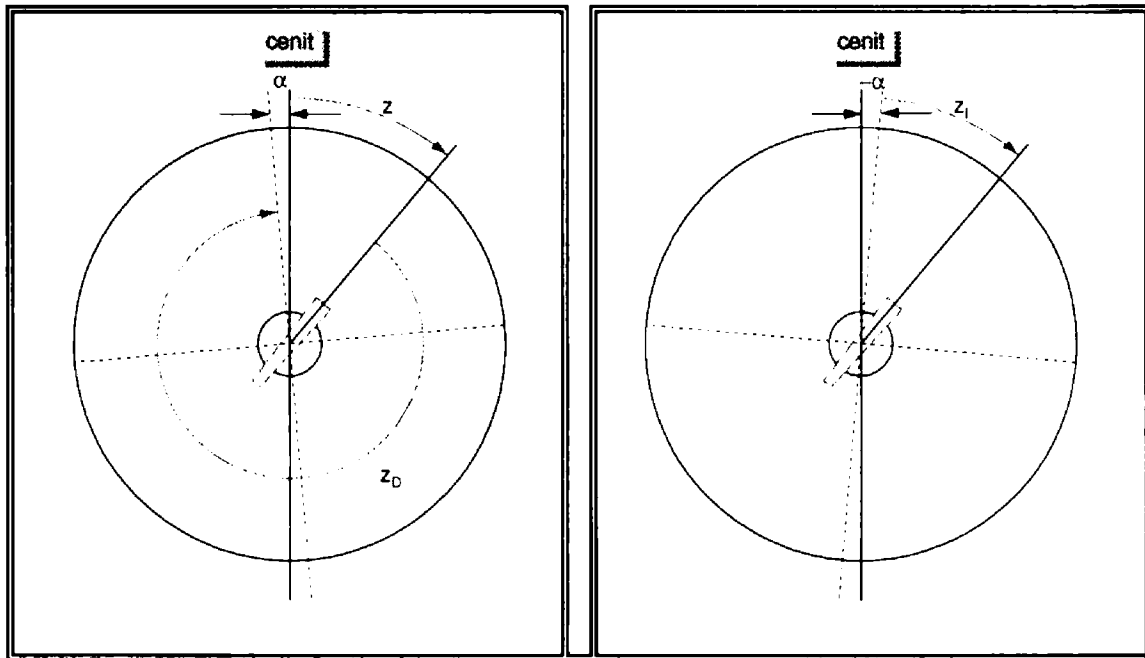


Figura 4-7. Error de colimación vertical

En función de las expresiones (4-13) y (4-14) se tendrá que la distancia cenital promedio sin error de colimación será:

$$z = 180^\circ - (z_d - z_i) / 2 \quad (4-15)$$

Error de excentricidad, el cual se debe a la falta de coincidencia del centro del círculo horizontal con el eje vertical del aparato.

Supóngase que el círculo de la Figura 4-8 con centro O, la distancia OC, representa el error de excentricidad.

El instrumento gira alrededor del punto C y por lo tanto, el ángulo real entre dos puntos dados A y B, será realmente α , mientras que el obtenido por la medición será β .

La diferencia:

$$\theta = \alpha - \beta$$

representa el error debido a la excentricidad OC.

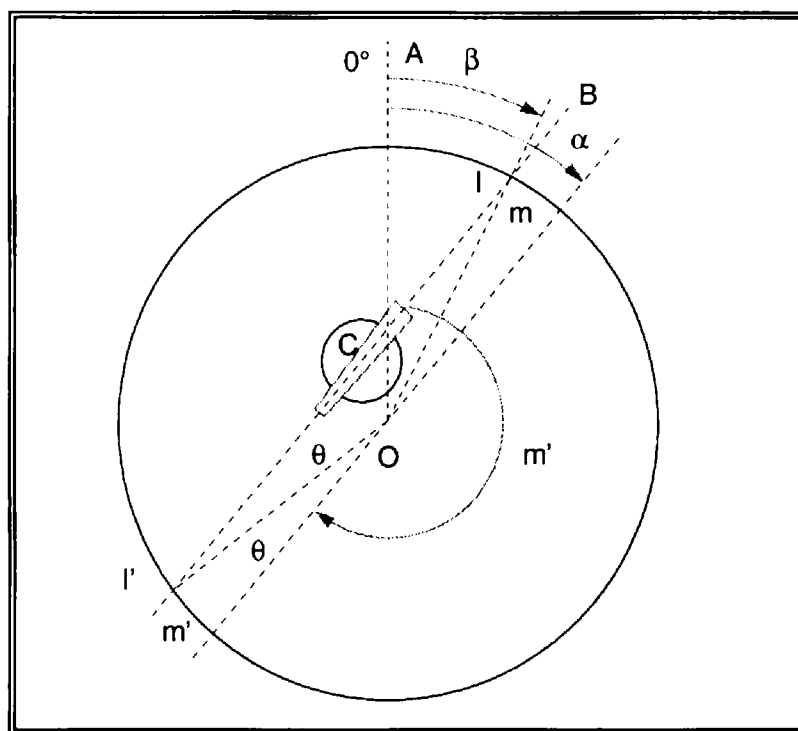


Figura 4-8. Error de excentricidad

Si el cero de la graduación del círculo horizontal coincide con la visual hacia A, el ángulo β será la lectura m que se hace directamente en dicho círculo y:

$$\alpha = \theta + m$$

Si es posible leer un índice l' , diametralmente opuesto a l y se la lectura de dicho índice es m' , entonces:

$$\alpha' = \alpha + 180^\circ = m' - \theta \quad (4-16)$$

sumando las dos últimas expresiones y despejando α :

$$\alpha = (m + m' - 180^\circ) / 2 \quad (4-17)$$

con lo cual se elimina el error de excentricidad. Aquí se ve claro que cuando se utilizan el micrómetro óptico, o sensores electrónicos diametralmente opuestos, este error se elimina automáticamente, en virtud de que el promedio se está haciendo en la misma lectura.

Error de graduación de los círculos, el cual se debe a errores inherentes al proceso de fabricación de los círculos, la única manera de minimizarlo es promediando lecturas en diferentes sectores de los círculos.

Error de lectura, este error se presenta en los goniómetros debido a la calidad de la óptica, el tamaño más pequeño de la división de la escala, así como a la habilidad del observador. Típicamente este valor estará en el rango de $\pm 1''$ a $\pm 10''$, pudiendo llegar a $\pm 1'$ para los instrumentos de vernier. Este error es aleatorio y sus efectos sobre un ángulo dependen del método de medición así como del número de determinaciones que se hagan.

Cuando un ángulo horizontal se mide por el método de repeticiones, el error de lectura existe solamente en la lectura inicial y final, ya que en las determinaciones intermedias no se hace ninguna lectura. Para este procedimiento el ángulo estará dado por:

$$\alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}{n} \quad (4-18)$$

Aplicando la ecuación (2-26) a la ecuación anterior se tiene que la desviación estándar del ángulo promedio debido solamente a lectura es:

$$\sigma_{\alpha_i} = \frac{\sqrt{\sigma_0^2 + \sigma_f^2}}{n} \quad (4-19)$$

donde σ_0 es el error estimado al llevar a cero la lectura inicial y σ_f es el error estimado en la lectura final. Es importante destacar que el número de repeticiones debe ser un número par.

Asumiendo que la habilidad del operador para colocar en cero y hacer la lectura es la misma, lo cual es muy razonable, la ecuación (4-19) se convierte en:

$$\sigma_{\alpha_i} = \frac{\sigma_l \sqrt{2}}{n} \quad (4-20)$$

Cuando el ángulo se determina por el método de direcciones, el ángulo es la diferencia entre dos lecturas, con lo que la desviación estándar será:

$$\sigma_{\alpha_i} = \sqrt{\sigma_i^2 + \sigma_f^2} \quad (4-21)$$

En caso de que se hagan n series, la ecuación (4-21) se convierte es:

$$\sigma_{\alpha_i} = \frac{\sqrt{(\sigma_{i1}^2 + \sigma_{f1}^2) + (\sigma_{i2}^2 + \sigma_{f2}^2) + \dots + (\sigma_{in}^2 + \sigma_{fn}^2)}}{n} \quad (4-22)$$

Donde los subíndices i indica atrás y f adelante, mientras que n es el número de series realizadas. Asumiendo nuevamente, que la habilidad del operador es la misma indistintamente de la dirección de la visual, σ_{α_i} la ecuación (4-22) se simplifica quedando:

$$\sigma_{\alpha_i} = \frac{\sigma_i \sqrt{2}}{\sqrt{n}} \quad (4-23)$$

Aquí es importante remarcar, que debido a la necesidad de lecturas adicionales en el método de direcciones, se produce un error mayor que el obtenido por el método de repeticiones.

Error de puntería, el cual se genera por varios factores, incluyendo la calidad de la óptica del telescopio, el tamaño de las punterías, la habilidad del observador para visar la mira, así como las condiciones ambientales al momento de la observación. Este error también es de tipo aleatorio, y estará presente indistintamente del equipo de medición empleado o de la metodología de trabajo. Ya que cada repetición del ángulo consiste de dos punterías, el error se puede estimar por medio de:

$$\sigma_{\alpha_p} = \frac{\sqrt{2\sigma_{p1}^2 + 2\sigma_{p2}^2 + \dots + 2\sigma_{pn}^2}}{n} \quad (4-24)$$

Considerando la habilidad de operador, igual que en los casos anteriores, se llega a:

$$\sigma_{\alpha_p} = \frac{\sigma_p \sqrt{2}}{\sqrt{n}} \quad (4-25)$$

En el caso de los goniómetros integrados en las Estaciones Totales, el error de lectura combinado con el de puntería, están dados por la norma DIN18723, el cual proporciona una estimación de este valor en función del promedio de dos direcciones medidas. Así, el valor DIN, en función de una lectura está dado por:

$$\sigma_{\text{DIN}} = \frac{\sigma_{\alpha_{ip}} \sqrt{2}}{2} = \frac{\sigma_{\alpha_{ip}}}{\sqrt{2}} \quad (4-26)$$

Usando esta ecuación, la expresión para estimar el error en una medición de una dirección debido a lectura y puntería con un goniómetro digital es:

$$\sigma_{\alpha_{ip}} = \sigma_{\text{DIN}} \sqrt{2} \quad (4-27)$$

Usando un procedimiento similar al de la ecuación (4-25), el error estimado en un ángulo medido n veces el error es:

$$\sigma_{\alpha_{ip}} = \frac{\sigma_{ip} \sqrt{2}}{\sqrt{n}} \quad (4-28)$$

Sustituyendo la ecuación (4-27) en (4-28) se obtiene:

$$\sigma_{\alpha_{ip}} = \frac{2\sigma_{\text{DIN}}}{\sqrt{n}} \quad (4-29)$$

Error por centrado de la puntería, el cual se puede atribuir a las condiciones ambientales, a la plomada óptica, así como a las características ópticas de ella, al nivel de burbuja, a la habilidad del operador, entre otros factores. Cuando el centrado de las

punterías se hace con cuidado, este error puede estar en rango de ± 0.0003 mm a ± 0.003 mm de la estación. Aunque algunos de los factores mencionados pueden considerarse como sistemáticos para un ángulo en particular, el error de centrado de la mira puede aparecer como un error aleatorio en el ajuste de redes que involucra muchas estaciones.

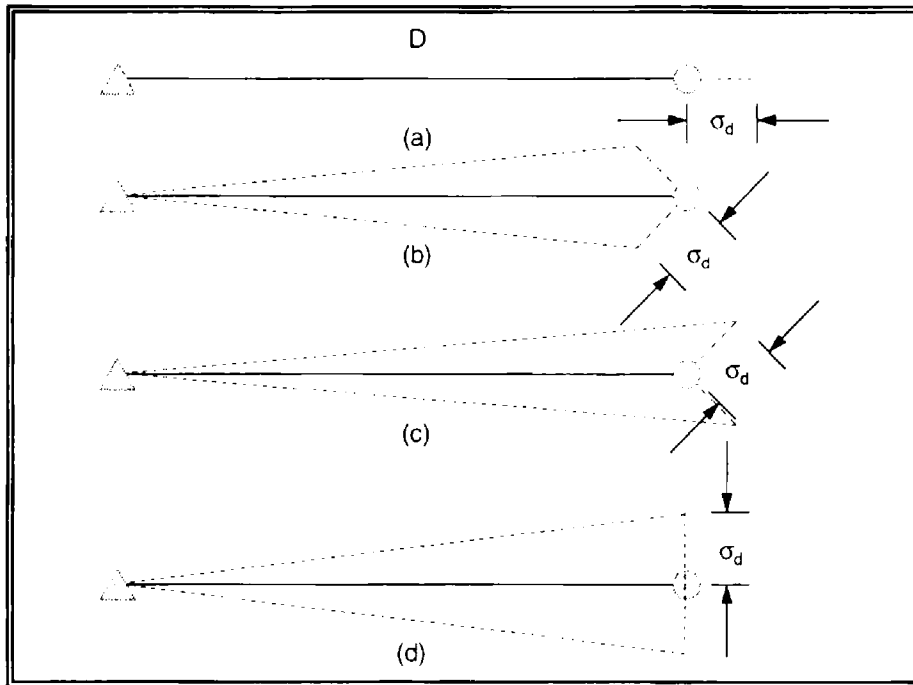


Figura 4-9. Posibles posiciones de la mira

La estimación del efecto de este error en un ángulo puede hacerse analizando su contribución en una dirección. Como se muestra en la figura 4-9, el error angular debido al centrado de la mira, depende de la posición de esta. Si la mira se encuentra sobre la visual, pero fuera del punto, como se muestra en la figura 4-9a, no hay ningún efecto sobre la dirección. Sin embargo, si la mira se mueve fuera de la visual, el error se incrementa hasta un valor máximo cuando el desplazamiento sea perpendicular a la dirección, como se ilustra en la figura 4-9d, con lo que el error por falta de centrado de la mira será:

$$e = \frac{\pm \sigma_d}{D} \quad (4-30)$$

Donde e es la incertidumbre en la dirección debido al descentrado de la mira, σ_d el error por centrado y D la distancia entre el goniómetro y la mira. Ya que un ángulo está definido por la medición de dos direcciones (figura 4-10):

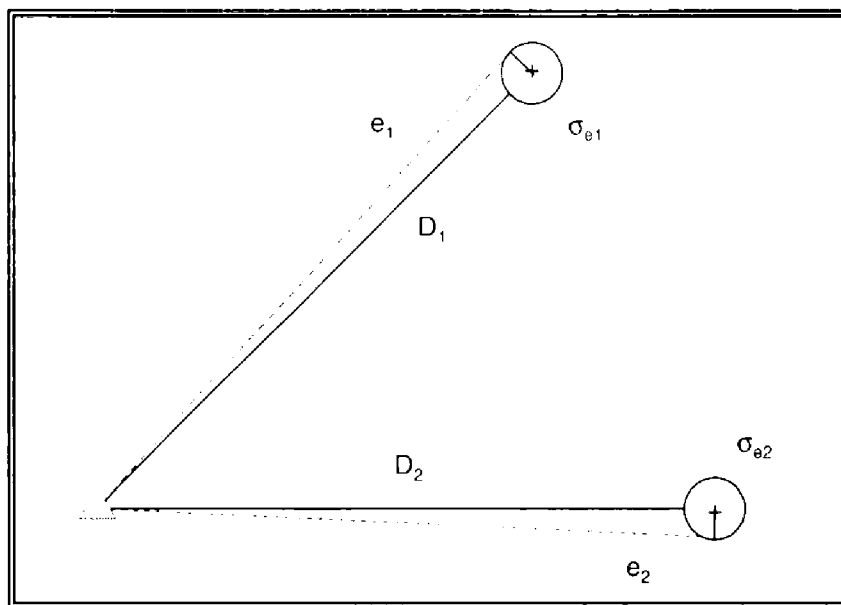


Figura 4-10. Error angular debido al centrado de la mira

Asumiendo una vez más que la habilidad del operador para centrar la mira sobre los puntos visados es la misma para todos los casos e independiente de la dirección de la visual, se tiene que la ecuación (4-31) expresada en segundos de arcos es:

$$\sigma_{\alpha_m} = \frac{\sqrt{D_1^2 + D_2^2}}{D_1 D_2} \sigma_m \rho \quad (4-31)$$

Nótese que ya que el error por centrado de la mira se presenta en cada punto y su tamaño no se reduce al hacer múltiples punterías. Lo anterior implica que el error por centrado de la mira sea uno de los más significativos en la medición de ángulos. En la ecuación (4-32) $\rho=206\ 264.8''/\text{rad}$.

Error por centrado del instrumento, el cual depende de la calidad del instrumento y del estado del ajuste de su plomada óptica, la calidad del trípode, y una vez más, de la habilidad del operador. El error puede compensarse como se ilustra en la Figura 4-11a, o maximizarse cuando el error ocurre en la misma dirección de la bisectriz del ángulo (figuras 4-11b y 4-11c). Para cualquier puesta de instrumento, el error será constante, sin embargo, ya que la localización del instrumento es aleatoria con respecto a la posición verdadera, aparecerá como un error aleatorio en el ajuste de una red que involucre muchas estaciones. De la figura 4-11, el ángulo α verdadero es:

$$\alpha = (P_2 + \epsilon_2) - (P_1 + \epsilon_1) = (P_2 - P_1) + (\epsilon_2 - \epsilon_1) \quad (4-32)$$

Donde P_1 y P_2 son las direcciones verdaderas y ϵ_1 y ϵ_2 son los errores producidos por la falta de centrado.

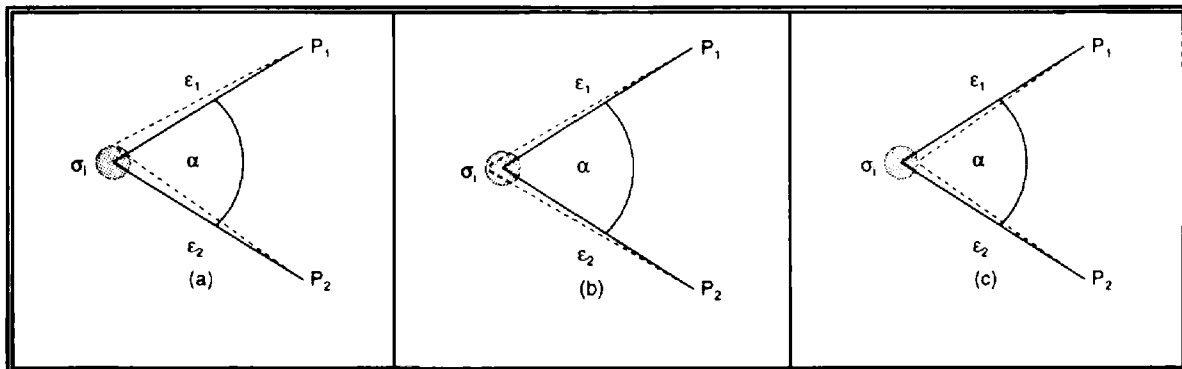


Figura 4-11. Error angular debido al centrado

En base a la ecuación (4-32) se puede plantear que el error inducido en el ángulo por el error en el centrado del instrumento será:

$$\varepsilon = \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \quad (4-33)$$

El análisis de la propagación de los errores se facilita al introducir un sistema de coordenadas cartesianas (x,y).

En la figura 4-12, se muestra un sistema cartesiano cuyo eje x pasa a través de la estación verdadera y el eje y coincide con el eje vertical del instrumento. De esa misma figura, se puede establecer que:

$$ih = ip - qr = ip \cos \alpha - sq \operatorname{sen} \alpha \quad (4-34)$$

Haciendo $sq=x$ e $iq=y$, la ecuación (4-34) se puede reescribir como:

$$ih = y \cos \alpha - x \operatorname{sen} \alpha \quad (4-35)$$

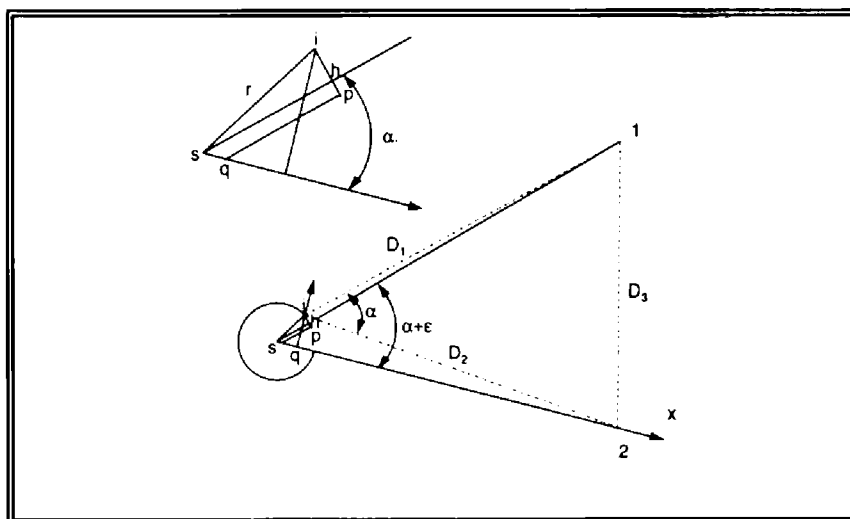


Figura 4-12. Análisis del error por centrado

Adicionalmente, se tiene:

$$\varepsilon_1 = \frac{ih}{D_1} = \frac{y \cos \alpha - x \operatorname{sen} \alpha}{D_1} \quad (4-36)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{y}{D_2} \quad (4-37)$$

Sustituyendo la ecuación (4-36) y (4-37) en la (4-33), el error inducido en un ángulo debido al centrado del instrumento es:

$$\varepsilon = \frac{y}{D_2} - \frac{y \cos \alpha - x \operatorname{sen} \alpha}{D_1} \quad (4-38)$$

reorganizando la ecuación anterior:

$$\varepsilon = \frac{D_1 y + D_2 x \operatorname{sen} \alpha - D_2 y \cos \alpha}{D_1 D_2} \quad (4-39)$$

Aplicando la fórmula de propagación de los errores, se tiene que las derivadas parciales son:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{D_2 \operatorname{sen} \alpha}{D_1 D_2} \quad (4-40)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = \frac{D_1 - D_2 \cos \alpha}{D_1 D_2} \quad (4-41)$$

Sustituyendo estas expresiones en (2-26):

$$\sigma_{\varepsilon}^2 = \left(\frac{D_2 \operatorname{sen} \alpha}{D_1 D_2} \right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{D_1 - D_2 \operatorname{cos} \alpha}{D_1 D_2} \right)^2 \sigma_y^2 \quad (4-42)$$

Debido a que el error es constante para cualquier puesta de aparato, el error en el ángulo no se reduce al hacer repeticiones del mismo. Asumiendo que los errores en x y y se pueden considerar como (figura 4-13):

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{\sigma_i}{\sqrt{2}} \quad (4-43)$$

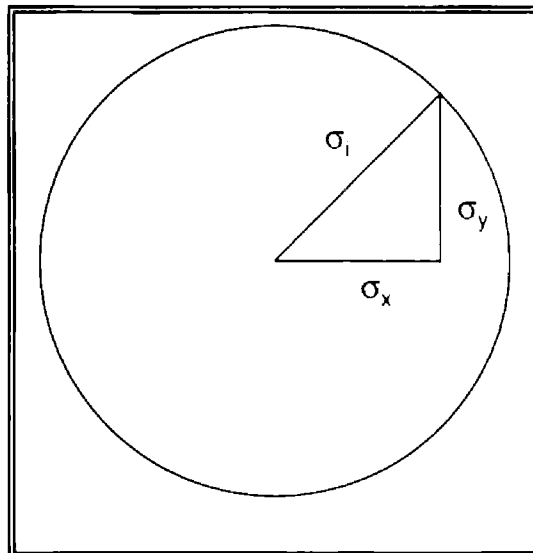


Figura 4-13. Error de centrado en una estación

Haciendo que $\sigma_{\varepsilon} = \sigma_{\alpha i}$, expandiendo los cuadrados y reagrupando términos en la ecuación (4-42) se tiene:

$$\sigma_{\alpha_i}^2 = \frac{D_1^2 + D_2^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) - 2D_1 D_2 \cos \alpha}{D_1^2 D_2^2} \frac{\sigma_i^2}{2} \quad (4-44)$$

Planteando de la ley de los cosenos que (Figura 4-12):

$$D_3^2 = D_1^2 + D_2^2 - 2D_1 D_2 \cos \alpha \quad (4-45)$$

La ecuación (4-43) se puede reescribir como:

$$\sigma_{\alpha_i} = \pm \frac{D_3}{D_1 D_2 \sqrt{2}} \sigma_i \rho \quad (4-46)$$

Error por nivelación del instrumento, el cual repercute directamente en una inclinación del eje horizontal, y por lo tanto, en la posición del círculo. Si la burbuja del nivel del goniómetro, permanece fuera del centro por la misma cantidad durante todo el proceso de medición del ángulo, el error resultante será sistemático. Sin embargo, ya que el operador del instrumento monitorea constantemente la posición de la burbuja, renivelando el instrumento cuando esta se sale de su posición, el error se convierte en aleatorio.

En la figura 4-14, ε representa el error angular de una visual debido a la imperfección del nivelado del instrumento localizado en la estación I. La visual IS está afectada por el ángulo vertical v . En la figura, IS es perpendicular al eje horizontal del instrumento. La cantidad en la que el instrumento está fuera de nivel es $f_d \mu$, donde f_d es el número de divisiones que está fuera del centro y μ la sensibilidad del nivel. De la figura se tiene:

$$SP = D \tan v \quad (4-47)$$

$$PP' = D\varepsilon \quad (4-48)$$

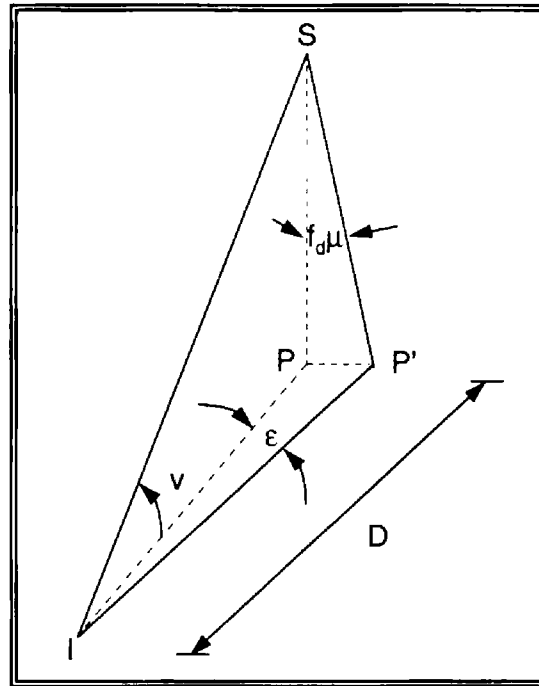


Figura 4-14. Efecto del error de nivelación

donde D es la componente horizontal de la distancia visada y el error angular ε está en radianes. Debido a que la magnitud del error por nivelación es pequeño, PP' puede aproximarse como un arco circular, y así:

$$PP' = f_d \mu (SP) \quad (4-49)$$

Sustituyendo (4-47) en (4-49) y su resultado en (4-48) se obtiene:

$$PP' = f_d \mu \tan v \quad (4-50)$$

$$\varepsilon = f_d \mu \tan v \quad (4-51)$$

Propagando el error en la determinación del ángulo, considerando n determinaciones del ángulo y v_1 el ángulo vertical de la visual a 1 y v_2 a 2, se tendrá:

$$\sigma_{oi} = \frac{\sqrt{(f_d \mu \tan v_1)^2 + (f_d \mu \tan v_2)^2}}{\sqrt{n}} \quad (4-52)$$

4.4.2 Errores naturales

Viento, el principal efecto que produce es la vibración instrumental. Cuando esto ocurra se deberá de suspender el trabajo si es necesario, a menos que se utilice la protección adecuada.

Refracción, se debe a las diferentes densidades en la densidad del aire por las que atraviesa la visual, lo que origina la desviación de la misma. Se recomienda no hacer visuales rasantes al piso o a construcciones, así como evitar trabajar a horas de mayor calor.

Cambios de temperatura en el instrumento, la cual ocasiona cambios dimensionales desiguales en el instrumento y por consecuencia errores en la operación. Para minimizar el efecto se recomienda proteger el equipo de los rayos directos del Sol.

Movimientos del trípode, se presentan si este se asienta sobre terreno blando o pantanoso. En caso de tener que trabajar en estas condiciones, se recomienda hacer observaciones rápidas, y en caso de que el tiempo de permanencia en la estación sea grande, hincar estacas para soportar el trípode.

4.4.3 Errores personales

Instrumento mal centrado, con propósito de minimizar su presencia, se recomienda verificar el centrado del mismo durante la operación.

Instrumento mal nivelado, se deberá de comprobar el estado de las burbujas a intervalos durante la operación, pero no se debe renivelar el instrumento en una serie, sino solamente antes o después de estas.

Enfoque inadecuado, el cual induce error de paralaje en el telescopio, por lo que se deberán de seguir el procedimiento descrito en este capítulo.

Error de lectura, para evitar su presencia solo se puede recomendar que el operador se familiarice con el instrumento antes de empezar el trabajo.

Uso incorrecto de los tornillos, al igual que en el caso anterior el operador se debe familiarizar con la operación del equipo.

4.4.4 Equivocaciones

Algunas equivocaciones comunes que hay que tratar de evitar son:

Dictar o anotar valores incorrectos, esto sólo se presenta en equipos que no cuentan con dispositivos de almacenamiento integrado, para tratar de evitarlo se sugiere que el anotador repita el valor que escribió.

Ubicación en puntos equivocados

5. POLIGONACIÓN

5.1 DEFINICIÓN Y APLICACIONES

La poligonación es un método de posicionamiento horizontal ampliamente empleado en la actualidad, sobre todo por la facilidad y alta precisión con la que se pueden medir distancias con los nuevos equipos electrónicos y la alta confiabilidad en la determinación de ángulos.

Este método consiste en la medición de una serie de líneas consecutivas cuyas longitudes y direcciones se determinan a través de la medición directa en campo. Hay básicamente tres tipos de poligonales:

- i) Cerrada.
- ii) Abierta geoméricamente pero cerrada analíticamente.
- iii) Abierta geométrica y analíticamente.

5.1.1 Poligonales cerradas

Las poligonales cerradas son aquellas que inician y terminan en un mismo punto, formando un polígono cerrado geométrica y analíticamente (figura 5-1).

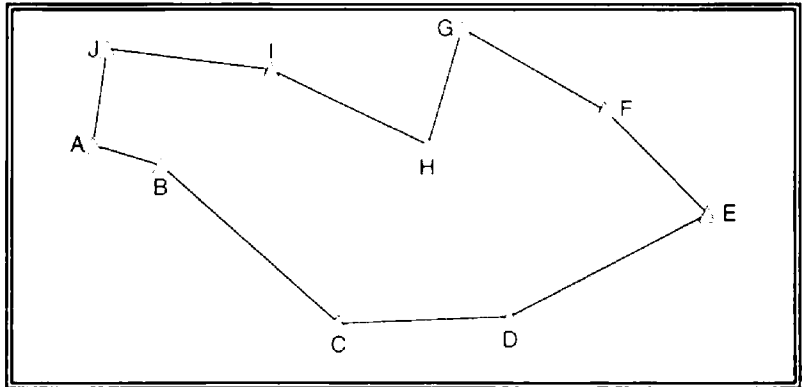


Figura 5-1. Poligonal cerrada

5.1.2 Poligonal abierta geoméricamente pero cerrada analíticamente

Inicia en un vértice que forma parte de un lado de control conocido, de igual o mayor precisión y termina en otro de las mismas características (figura 5-2).

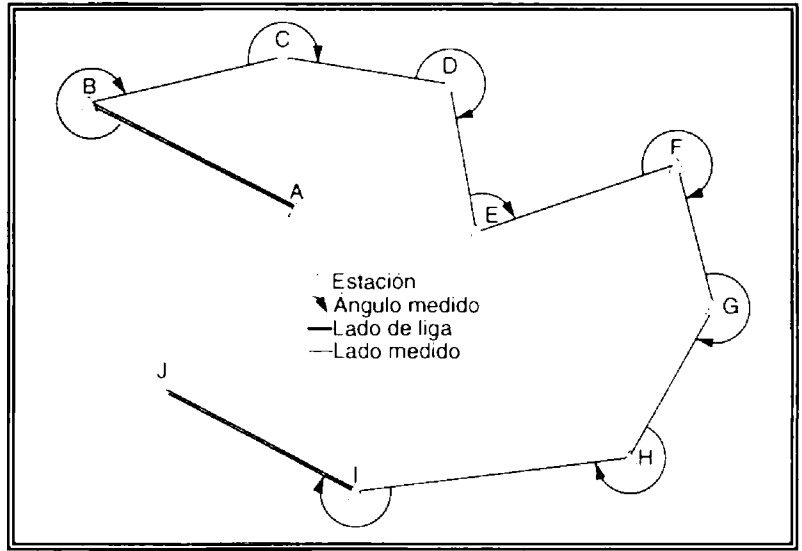


Figura 5-2. Poligonal abierta geométrica y analíticamente

5.1.3 Poligonal abierta geométrica y analíticamente

Es una serie de líneas sin puntos de control, por lo que no se recomienda en ningún caso, ya que no hay forma posible de comprobar su calidad, excepto el control acimutal a través de orientaciones astronómicas.

5.2 MÉTODOS DE OBSERVACIÓN

Siempre que sea posible se deberá ligar el nuevo levantamiento a otros ya existentes, de preferencia que formen parte de la Red Geodésica Nacional. Lo anterior, repercutirá directamente en un ahorro de recursos, ya que fácilmente se podrán integrar los trabajos a la cartografía existente.

5.2.1 Medición de distancias

Dependiendo de la calidad del trabajo, la determinación de las distancias se puede realizar por medio de cintas, estadía o equipo electromagnético. Este último, es el más empleado en la actualidad, dada la rapidez y alta precisión que permite.

5.2.2 Medición angular

Se recomienda realizar la determinación de ángulos, por medio de direcciones, repitiendo cada una de ellas en ambas posiciones del círculo. Para evitar posibles errores, se recomienda que siempre se gire el instrumento en el mismo sentido.

5.2.3 Causas de error y equivocaciones

Los errores que más comúnmente se cometen en los trabajos de poligonación, se deben a la incorrecta medición de distancias y ángulos, ya presentadas en los capítulos precedentes, así como a la mala planeación o ejecución de los trabajos.

Por lo que respecta a las equivocaciones más frecuentes, son ocupar vértices equivocados, orientar incorrectamente la poligonal o confundir el sentido en el que los ángulos fueron medidos.

5.3 ANTEPROYECTO

Antes de iniciar en campo cualquier levantamiento, es necesario definir con absoluta claridad el objetivo buscado, para que en función de este, se establezca la metodología a seguir, así como definir el equipo que se debe emplear. Una de las fases más importantes, es la de recopilación de la información existente para la elaboración del anteproyecto. Esta información podrá ser cartográfica, topográfica, climatológica, estadística o de cualquier otro tipo que sea requerida para lograr un anteproyecto realista y ejecutable. Se recomienda que siempre se cuente con un anteproyecto que permita optimizar los recursos, basado en el conocimiento a priori de lo que se va a ejecutar.

Una buena recopilación de información, en correlación con la clara definición del objetivo, permitirá establecer confiablemente el anteproyecto (planeación), lo que a su vez dará posibilidad de hacer la programación más adecuada de las necesidades de trabajo. En el documento del anteproyecto, se deberá plasmar,

además del trabajo mismo a ejecutar, todos los aspectos informativos que se consideren relevantes para servir de apoyo y que coadyuven a una mejor realización del mismo, como son vías de acceso a la zona, facilidad para conseguir en el sitio los materiales, suministros, alimentos, etc., grado de riesgo de la zona en la que se trabaja, probabilidad de lluvias o nevadas, entre otros aspectos.

En este punto ya se tendrá definida la metodología de trabajo, así como las normas y especificaciones para el cumplimiento de los objetivos, en base al equipo a utilizar y los recursos humanos, financieros y materiales requeridos, con buen grado de confiabilidad.

La siguiente etapa, será llevar a cabo el trabajo de campo, estableciéndose con ello el proyecto definitivo.

5.4 SELECCIÓN DE ESTACIONES

Una vez que se está en el área del levantamiento y siempre mediante el anteproyecto, se procederá a definir los sitios que ocuparán las estaciones (reconocimiento), basadas en la observación real y en los lineamientos que para ello se hayan establecido previamente, considerando siempre que una marca topográfica es el único testigo físico que queda del trabajo, después de la inversión de una gran cantidad de recursos humanos, técnicos, materiales y financieros.

Después de esta selección, algunos detalles del anteproyecto podrían haber cambiado dentro de los rangos permisibles, con lo que se tendrá el proyecto definitivo. Las estaciones se marcarán

de acuerdo a las necesidades, pudiéndose emplear pintura, estacas, clavos, varillas o placas empotradas en roca o pavimento, o monumentos construidos ex profeso para ello.

A todo este proceso continúan las mediciones, las cuales siempre se deberán de comprobar en campo, repitiéndose aquellas que rebasen las tolerancias y no cumplan con las especificaciones del proyecto.

Se sabe por ejemplo, que la condición de cierre angular para un polígono cerrado es para ángulos internos:

$$\text{suma de ángulos} = 180^\circ(n-2) \quad (5-1)$$

y para ángulos externos:

$$\text{suma de ángulos} = 180^\circ(n+2) \quad (5-2)$$

donde n es el número de ángulos medidos y que la tolerancia se da en función de la calidad deseada de los trabajos y no en función del equipo empleado como a menudo se piensa, ya que el equipo se selecciona para el trabajo y no el trabajo para el equipo.

Cabe reiterar que todo lo comprobable en campo se debe revisar para evitar al máximo posible, que los errores se detecten una vez que se ha dejado la zona de trabajo. Con el equipo moderno, las comprobaciones son cada vez más sencillas, ya que muchos de ellos cuentan con dispositivos electrónicos de procesamiento de datos integrados, que permiten con facilidad realizar las verificaciones pertinentes.

5.5 CÁLCULO DE POLIGONALES

5.5.1 Proyecciones ortogonales

En Topografía el método más usual para el cálculo de poligonales, se basa en el sistema de proyecciones ortogonales. Esto es, si se tiene un lado cualquiera de longitud l y acimut R (figura 5-3), las proyecciones del lado, sobre cada uno de los ejes serán:

$$X = l \operatorname{sen} R \quad (5-3)$$

$$Y = l \operatorname{cos} R \quad (5-4)$$

Por lo que si se conocen las coordenadas del origen, como en el caso de la figura 5-3, además de las proyecciones, se pueden calcular fácilmente las coordenadas del extremo de la línea. Siendo esto:

$$X_B = X_A + l \operatorname{sen} R \quad (5-5)$$

$$Y_B = Y_A + l \operatorname{cos} R \quad (5-6)$$

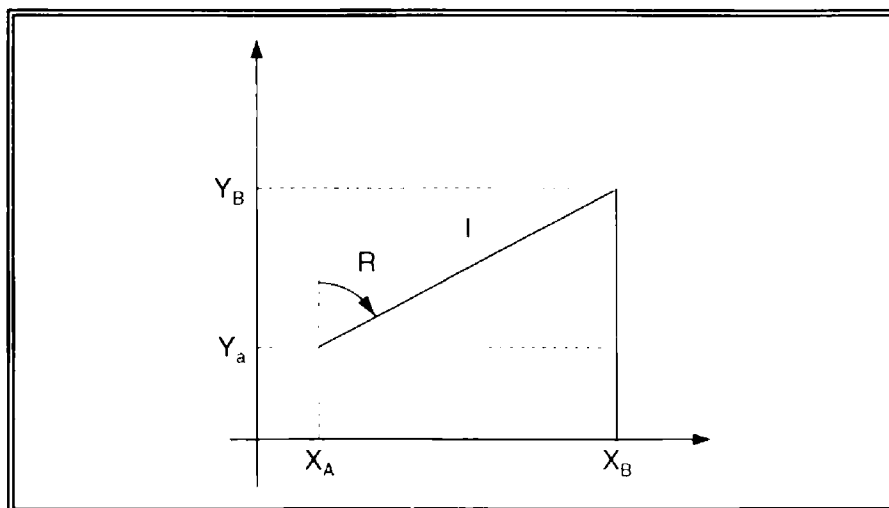


Figura 5-3. Proyecciones ortogonales

El cálculo de proyecciones ortogonales, no es más que la transformación de un sistema de coordenadas polares a cartesianas.

5.5.2 Condición de cierre

Un polígono cerrado analíticamente debe cumplir con dos condiciones de cierre:

- i) angular
- ii) lineal

Si es un polígono cerrado geoméricamente, la condición de cierre angular se establece por medio de las relaciones (5-1) o (5-2). En caso de que se trate de un polígono cerrado analíticamente, pero abierto geoméricamente, la condición de cierre estará dada por:

$$Az_f = Az_i + 180^\circ + \sum \angle \quad (5-7)$$

donde:

- Az_f : acimut final.
- Az_i : acimut inicial.
- \angle : ángulo.

Desde luego, restando 360° cada vez que se acumulen.

Evidentemente, dada la ocurrencia de errores en el levantamiento, en ninguno de los dos casos se cumplirá el cierre angular. A este respecto, una primera precaución deberá tomarse antes de abandonar la zona de trabajo, la cual consiste en verificar

y comparar el error de cierre angular contra el error máximo permisible (tolerancia), que a su vez se establecerá de acuerdo a los objetivos de calidad del levantamiento.

Si el error angular, está por debajo de la tolerancia, se puede dar por terminada la medición angular, ya que se efectuará una compensación para distribuir de alguna manera los errores acumulados, en caso contrario, se recomienda repetir esta actividad.

La condición de cierre lineal para un polígono cerrado, como el caso presentado en la figura 5-1, es que la suma algebraica, tanto de las proyecciones en el eje X como en el eje Y, iguallen a cero, ya que se está regresando al punto de partida. Esto es:

$$\sum P_X = 0 \quad (5-8)$$

$$\sum P_Y = 0 \quad (5-9)$$

A cualquier diferencia con respecto a esta condición, se le considera como error de cierre lineal. Debido a la presencia de errores, en la realidad se tiene:

$$\sum P_X = e_x \quad (5-10)$$

$$\sum P_Y = e_y \quad (5-11)$$

donde e_x y e_y son los errores respectivos en X y Y, que también se tendrán que distribuir de alguna manera, para evitar su acumulación en el algún punto.

En el caso de poligonales cerradas solo analíticamente (figura 5-2), las condiciones para cierre lineal se establecen con:

$$X_{fp} = X_i + \sum \Delta X \quad (5-12)$$

$$Y_{fp} = Y_i + \sum \Delta Y \quad (5-13)$$

donde X_{fp} y Y_{fp} son las coordenadas finales propagadas.

Las coordenadas fijas del punto final son X_f y Y_f , con lo que el error de cierre lineal será:

$$e_x = X_{fp} - X_f \quad (5-14)$$

$$e_y = Y_{fp} - Y_f \quad (5-15)$$

Tradicionalmente, la magnitud de estos errores no era determinada en campo, dado que es necesario llevar a cabo algunos cálculos, los cuales si no se dispone de cierto apoyo de dispositivos de cálculo, resultan bastante laboriosos. Esto podría originar la necesidad de regresar a la zona del levantamiento después de efectuado el proceso en gabinete, lo cual de ninguna forma es aconsejable.

En la actualidad, con la alta disponibilidad de pequeños dispositivos de cálculo, cómodamente portables en campo y que operan bajo cualquier condición, permiten no sólo la detección del error, sino ir mucho más allá en el cálculo. En el caso de las Estaciones Totales, el dispositivo de almacenamiento de datos, también cumple las funciones para verificar los cierres.

5.5.3 Métodos de compensación

5.5.3.1 Compensación angular

La compensación del error angular se puede efectuar por tres métodos:

- arbitrario.
- distribución lineal según el número de ángulos.
- ajuste riguroso por mínimos cuadrados.

5.5.3.1.1 Método arbitrario

Según este criterio, la distribución del error se hace de acuerdo al buen juicio del técnico que realizó el levantamiento, aplicando mayores correcciones a los ángulos en que sospeche que las operaciones y condiciones de observación fueron más deficientes. No es un método recomendable, ya que pueden darse diferentes soluciones, según la interpretación dada a dichas condiciones. Por ejemplo, las correcciones basadas en este criterio podrían ser:

EST	∠ OBS		CORR	∠ COOR	
A	87°	35'	-01'	87°	34'
B	96	45		96	45
C	74	28	-01	74	27
D	101	14		101	14
SUMA	360	02	-02	360	00

Pero también puede optarse por corregir en 1' los ángulos A y C, o cualquier otra combinación.

5.5.3.1.2 Distribución lineal

En este caso simplemente se distribuye el error angular, proporcionalmente al número de ángulos medidos, lo que equivale a darle igual confiabilidad a cada ángulo, en el caso anterior se tiene:

EST	∠ OBS		CORR	∠ COOR		
A	87°	35'	-30''	87°	34'	30''
B	96	45	-30	96	44	30
C	74	28	-30	74	27	30
D	101	14	-30	101	13	30
SUMA	360	02	-120	360	00	00

Aquí se presenta un problema de cifras significativas, ya que al ver los resultados se podrá pensar que las mediciones se apreciaron a los diez segundo, lo cual no es real. Lo que se aconseja en este caso es puntualizar la realidad para evitar confusiones.

5.5.3.1.3 Ajuste riguroso

Este es el método más recomendable, ya que de acuerdo a las leyes de la probabilidad y los métodos estadísticos, es el que distribuye los errores de manera más real al minimizar los cuadrados de los residuos (diferencia entre el valor real y el valor más probable). Una desventaja podría ser el hecho de requerir procedimientos operacionales mucho más complejos, sin embargo, esta dificultad puede superarse fácilmente si se cuenta con un una computadora y el soporte lógico para resolver el

problema. El tratamiento matemático de esta situación se presenta en la sección correspondiente de compensación lineal.

5.5.3.2 Compensación lineal

La compensación del error lineal se puede realizar por cualquiera de los siguientes métodos:

- a) Arbitrario.
- b) Tránsito.
- c) Brújula.
- d) Crandall.
- e) Ajuste riguroso por mínimos cuadrados.

5.5.3.2.1 Método arbitrario

Como en el caso análogo del error angular, este método tampoco se basa en reglas fijas ni ecuaciones, sino que el error se distribuye arbitrariamente de acuerdo a las condiciones que prevalecen en campo. No se aconseja más que en el caso en que se buscan soluciones aproximadas.

5.5.3.2.2 Método del tránsito

La distribución del error se basa en la relación que existe entre las proyecciones sobre los ejes y el error total de ellos, esto es:

$$\frac{cY_i}{e_y} = \frac{PY_i}{\sum |PY|} \quad (5-16)$$

$$\frac{cX_i}{e_x} = \frac{PX_i}{\sum |PX|} \quad (5-17)$$

donde:

cY_i : corrección en Y para el vértice i.

cX_i : corrección en X para el vértice i.

Su uso se recomienda, cuando se asume que los ángulos se miden con mayor precisión que las distancias, como es el caso de levantamientos con estadía, aunque tanto los ángulos como las distancias presuponen la misma precisión.

5.5.3.2.3 Método de la Brújula o de Bowditch

Este método de compensación, se basa en la relación entre el error total y la longitud de los lados:

$$\frac{cY_i}{e_y} = \frac{D_i}{\sum D} \quad (5-18)$$

$$\frac{cX_i}{e_x} = \frac{D_i}{\sum D} \quad (5-19)$$

en el que se asume que las mediciones angulares y lineares tienen relativamente la misma precisión. Generalmente, es empleado en levantamientos con tránsito de 1' y cinta de acero graduada al

milímetro, o con goniómetros de precisión y distanciómetros electrónicos.

5.5.3.2.4 Método de Crandall

En este método se ajustan primeramente los ángulos, distribuyendo el error en partes iguales entre los ángulos medidos. Se mantienen fijos estos y se lleva a cabo el ajuste lineal por un procedimiento de mínimos cuadrados, asignándose pesos a las observaciones. El procedimiento es más lento que los anteriores y su aplicación no es muy recomendable, ya que si se va a realizar un ajuste riguroso es preferible considerar todas las variables involucradas.

Este método fue ideado para ajustar poligonales en las que las mediciones angulares son más confiables que las lineales, como puede ser el caso de los levantamientos con estadía.

5.5.3.2.5 Método de mínimos cuadrados

Con este método es posible ajustar simultáneamente las mediciones angulares y lineales, sin importar la precisión relativa que estas tengan, ya que a cada observación se le puede asignar un peso propio. Este es el método más recomendable para todo tipo de trabajo topográfico, incluyendo por supuesto, el ajuste de poligonales. Una de las grandes ventajas, es que la solución dada es única e independiente de la combinación de datos que se haga, sobre todo en redes de poligonales. Otra ventaja es que resulta posible determinar la confiabilidad independiente de cada punto dentro del todo, que conforman las poligonales.

En esta sección se revisará el método de mínimos cuadrados con peso unitario, mientras que en la sección 10.3 se analizará el caso cuando el peso es diferente de uno. En esa misma sección se presentará la relación entre los pesos y los errores estándar.

El primer paso para realizar un ajuste por mínimos cuadrados, es la formación de las ecuaciones de observación, debiéndose escribir una por cada distancia, dirección o ángulo observado y acimut. Para ello se deben linearizar las ecuaciones que relacionan las incógnitas con las observables.

En el caso de las distancias, figura 5-4, la ecuación para las distancias será:

$$l_{ij} + v_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2} \quad (5-20)$$

donde:

l_{ij} : distancia medida entre las estaciones I y J.

v_{ij} : residuo de la medición.

x_i, y_i, z_i : valor más probable de las coordenadas de la estación I.

x_j, y_j, z_j : valor más probable de las coordenadas de la estación J.

La ecuación (5-20) es una función no lineal que involucra las variables $(x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j)$, la cual se puede escribir como:

$$F(x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j) = l_{ij} + v_{ij} \quad (5-21)$$

El proceso de linealización se lleva a cabo por medio del primer orden de una serie de Taylor, siendo esta:

$$F(x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j) = F(x_{i0}, y_{i0}, z_{i0}, x_{j0}, y_{j0}, z_{j0}) + \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_0 dx_i + \left(\frac{\partial F}{\partial y_i}\right)_0 dy_i + \left(\frac{\partial F}{\partial z_i}\right)_0 dz_i + \left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)_0 dx_j + \left(\frac{\partial F}{\partial y_j}\right)_0 dy_j + \left(\frac{\partial F}{\partial z_j}\right)_0 dz_j \quad (5-22)$$

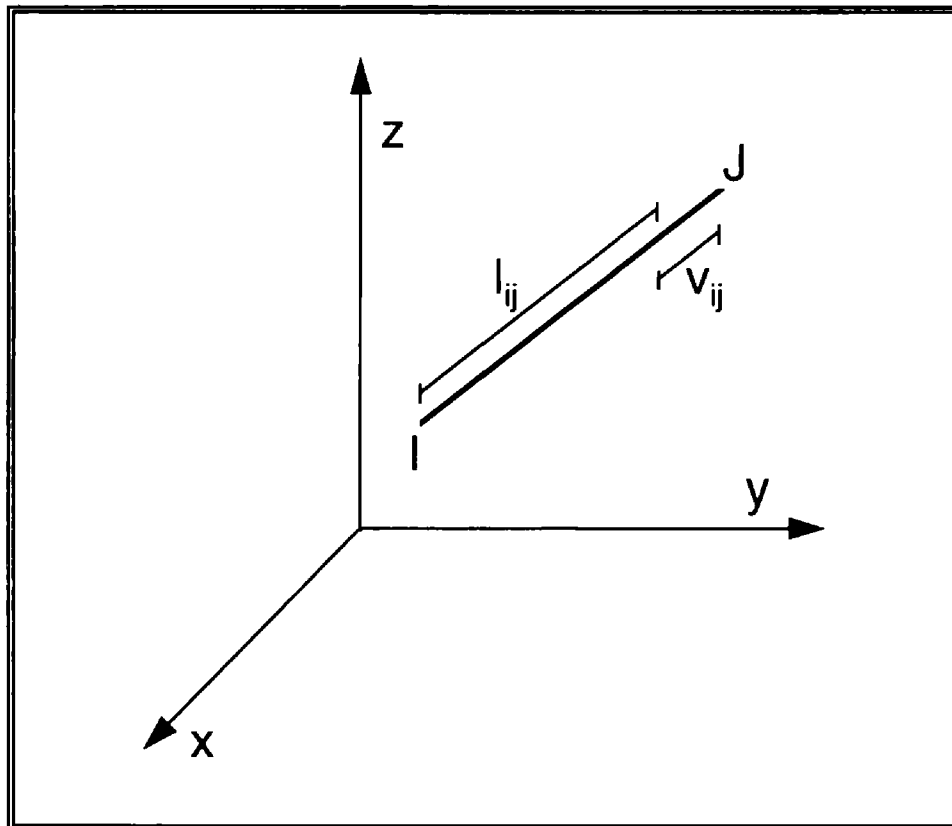


Figura 5-4. Medición de una distancia

En la ecuación anterior, los subíndices 0 indican los valores aproximados de la incógnitas para la evaluación de las derivadas parciales en dicho valor, mientras que dx_i , dy_i , dz_i , dx_j , dy_j y dz_j son las correcciones generadas de las aproximaciones, de tal forma que:

$$\begin{aligned}
 x_i &= x_{i0} + dx_i & x_j &= x_{j0} + dx_j \\
 y_i &= y_{i0} + dy_i & y_j &= y_{j0} + dy_j \\
 z_i &= z_{i0} + dz_i & z_j &= z_{j0} + dz_j
 \end{aligned}
 \tag{5-23}$$

Determinado la derivada parcial de (5-20) con respecto a x_i :

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \left[(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2 \right]^{-1/2} [2(x_j - x_i)(-1)]
 \tag{5-24}$$

Simplificando la ecuación (5-24) se obtiene:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{-x_j + x_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} = \frac{x_i - x_j}{IJ}
 \tag{5-25}$$

Empleando el mismo procedimiento, las otras derivadas parciales son:

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} = \frac{y_i - y_j}{IJ}
 \tag{5-26}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z_i} = \frac{z_i - z_j}{IJ}
 \tag{5-27}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{x_j - x_i}{IJ}
 \tag{5-28}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_j} = \frac{y_j - y_i}{IJ} \quad (5-29)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z_j} = \frac{z_j - z_i}{IJ} \quad (5-30)$$

Sustituyendo las ecuaciones (5-25) a la (5-30) en (5-22), se obtiene el prototipo de la ecuación linearizada de la distancia:

$$\begin{aligned} \frac{x_{i0} - x_{j0}}{IJ_0} dx_i + \frac{y_{i0} - y_{j0}}{IJ_0} dy_i + \frac{z_{i0} - z_{j0}}{IJ_0} dz_i + \frac{x_{j0} - x_{i0}}{IJ_0} dx_j + \\ \frac{y_{j0} - y_{i0}}{IJ_0} dy_j + \frac{z_{j0} - z_{i0}}{IJ_0} dz_j = k_{ij} + v_{l_{ij}} \end{aligned} \quad (5-31)$$

donde:

$$k_{ij} = l_{ij} - IJ_0$$

$$IJ_0 = F(x_{i0}, y_{i0}, z_{i0}, x_{j0}, y_{j0}, z_{j0}) = \sqrt{(x_{j0} - x_{i0})^2 + (y_{j0} - y_{i0})^2 + (z_{j0} - z_{i0})^2}$$

Cuando en la poligonal se cuenta con observaciones de acimut, la ecuación paramétrica tiene la forma:

$$\text{acimut} = \alpha + C \quad (5-32)$$

donde:

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{x_j - x_i}{y_j - y_i} \right) \quad (5-33)$$

y la constante C depende del cuadrante en el que se encuentra el punto J , como se muestra en la figura 5-5.

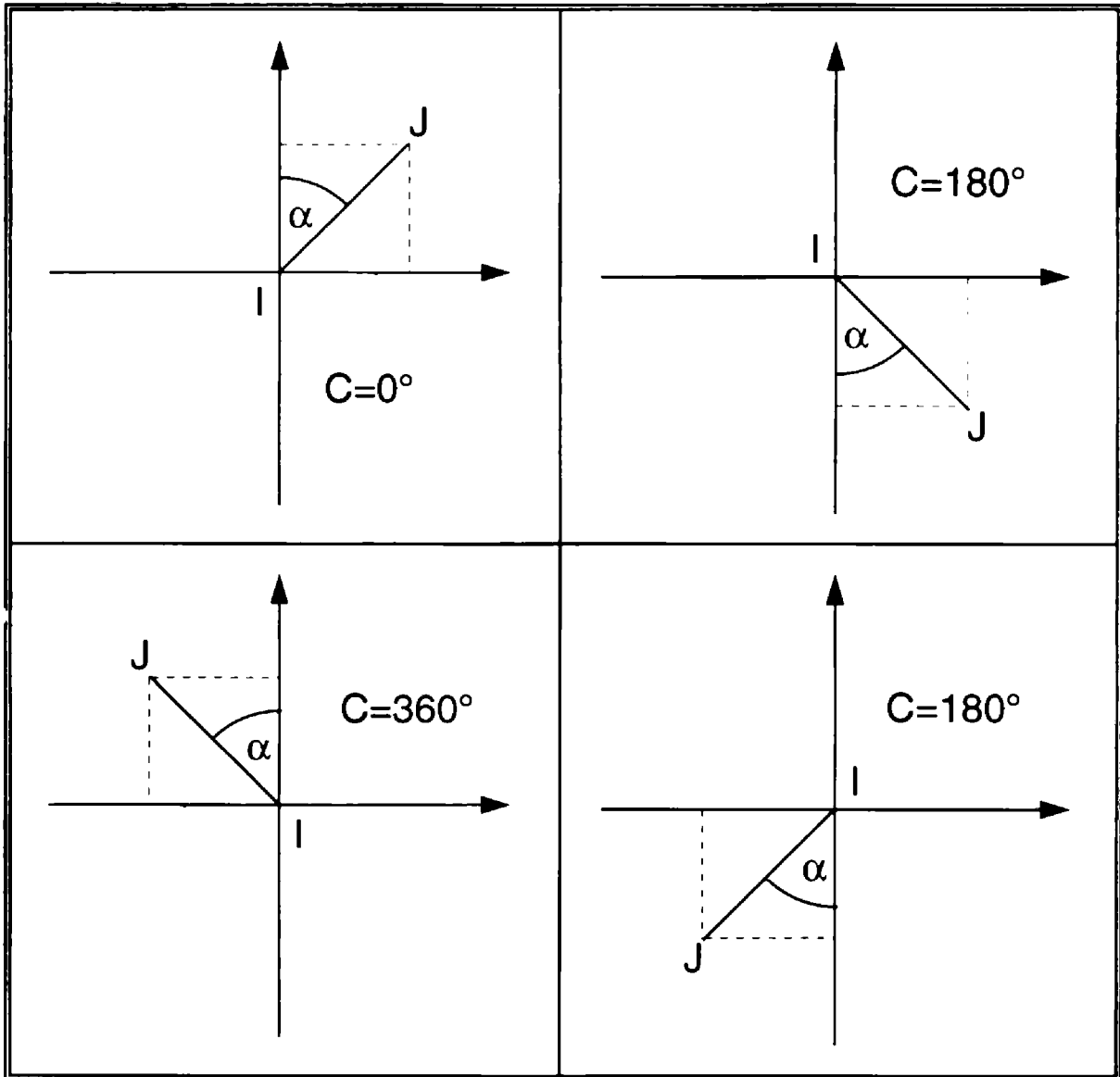


Figura 5-5. Relación entre el acimut y el ángulo calculado

Con base a la figura anterior, se puede construir la tabla 5-1, que relaciona el signo algebraico del ángulo calculado al valor de C y el valor del acimut.

Cuadrante	signo ($x_j - x_i$)	signo ($y_j - y_i$)	signo α	C	acimut
I	+	+	+	0°	α
II	+	-	-	180°	$\alpha + 180^\circ$
III	-	-	+	180°	$\alpha + 180^\circ$
IV	-	+	-	360°	$\alpha + 360^\circ$

Tabla 5-1. Relación entre cuadrante, C y acimut

La ecuación paramétrica del acimut medido de la línea IJ es:

$$\tan^{-1} \left(\frac{x_j - x_i}{y_j - y_i} \right) + C = Az_{ij} + v_{Az_{ij}} \quad (5-34)$$

en la cual:

Az_{ij} : es el acimut medido.

$v_{Az_{ij}}$: el residuo del acimut.

x_i, y_i : valor más probable de las coordenadas de la estación I.

x_j, y_j : valor más probable de las coordenadas de la estación J.

Es importante aclarar que el acimut solo es función de las coordenadas sobre el plano xy, ya que al considerarlo se forma un ángulo diedro, el cual es igual al proyectado sobre el plano.

Nuevamente la ecuación (5-34) es una función no lineal, pudiéndose escribir como:

$$F(x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j) = Az_{ij} + v_{Az_{ij}} \quad (5-35)$$

donde:

$$F(x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j) = \tan^{-1} \left(\frac{x_j - x_i}{y_j - y_i} \right) + C_i \quad (5-36)$$

Aplicando la ecuación (5-22) para linearizar la ecuación (5-36), las derivadas parciales serán:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_i} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x_j - x_i}{y_j - y_i} \right)^2} \frac{-1}{y_j - y_i} \\ \frac{\partial F}{\partial x_i} &= \frac{-1(y_j - y_i)}{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \\ \frac{\partial F}{\partial x_i} &= \frac{y_i - y_j}{D_{ij}^2} \end{aligned} \quad (5-37)$$

en la que D_{ij}^2 es la distancia ij proyectada sobre el plano xy .

Empleando un procedimiento similar, las otras derivadas parciales serán:

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} = \frac{x_j - x_i}{D_{ij}^2} \quad (5-38)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z_i} = 0 \quad (5-39)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{y_j - y_i}{D_{ij}^2} \quad (5-40)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_j} = \frac{x_i - x_j}{D_{ij}^2} \quad (5-41)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z_j} = 0 \quad (5-42)$$

Sustituyendo las ecuaciones (5-37) a (5-42) en (5-22), se obtiene la ecuación prototipo para acimut:

$$\frac{y_{i0} - y_{j0}}{D_{ij0}^2} dx_i + \frac{x_{j0} - x_{i0}}{D_{ij0}^2} dy_i + \frac{y_{j0} - y_{i0}}{D_{ij0}^2} dx_j + \frac{x_{i0} - x_{j0}}{D_{ij0}^2} dy_j = k_{Az_i} + v_{Az_i} \quad (5-43)$$

donde:

$$k_{Az_{ij}} = Az_{ij} - \tan^{-1} \left(\frac{x_{j0} - x_{i0}}{y_{j0} - y_{i0}} \right) + C_i$$

$$D_{ij0}^2 = (x_{j0} - x_{i0})^2 + (y_{j0} - y_{i0})^2$$

En el caso de que los ángulos hayan sido determinados por medio de direcciones la ecuación paramétrica está dada por (figura 5-6):

$$d_{ij} = \tan^{-1} \left(\frac{x_j - x_i}{y_j - y_i} \right) + \omega_i = d_{ij} + v_{d_{ij}} \quad (5-44)$$

De manera similar al caso del acimut, la dirección forma un ángulo diedro con el plano de la dirección de referencia del

goniómetro, por lo que no hay ningún efecto de la componente z.
En la ecuación (5-44):

d_{ij} : es la dirección medida.

v_{dij} : el residuo de la dirección.

x_i, y_i : valor más probable de las coordenadas de la estación I.

x_j, y_j : valor más probable de las coordenadas de la estación J.

ω_i : ángulo formado por la dirección de referencia del goniómetro con respecto al norte.

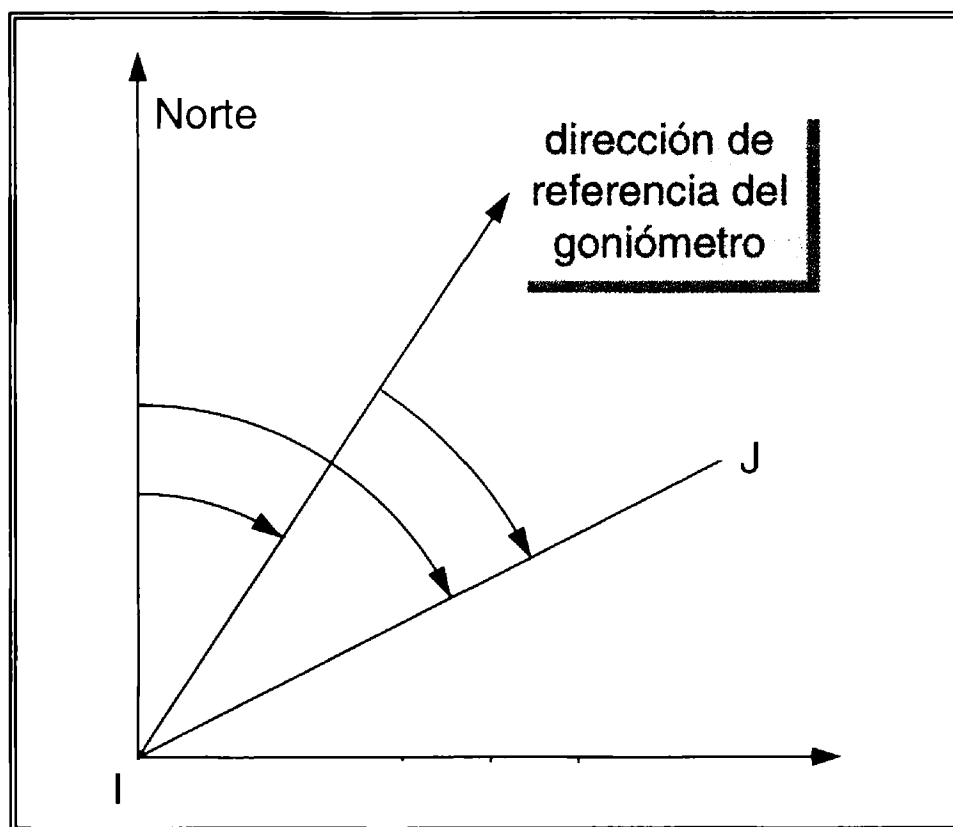


Figura 5-6. Geometría de la orientación de una dirección

La ecuación (5-44) se puede reescribir como:

$$F(x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j) = d_{ij} + v_{Az_{ij}} \quad (5-45)$$

donde:

$$F(x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j) = \tan^{-1} \left(\frac{x_j - x_i}{y_j - y_i} \right) + \omega_i \quad (5-46)$$

Aplicando la ecuación (5-22) para linearizar la ecuación (5-46), las derivadas parciales serán:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_i} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x_j - x_i}{y_j - y_i} \right)^2} \frac{-1}{y_j - y_i} \\ &= \frac{-1(y_j - y_i)}{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{y_i - y_j}{D_{ij}^2} \quad (5-47)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} = \frac{x_j - x_i}{D_{ij}^2} \quad (5-48)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z_i} = 0 \quad (5-49)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{y_j - y_i}{D_{ij}^2} \quad (5-50)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_j} = \frac{x_i - x_j}{D_{ij}^2} \quad (5-51)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z_j} = 0 \quad (5-52)$$

Sustituyendo las ecuaciones (5-47) a (5-52) en (5-22), se obtiene la ecuación prototipo para la dirección:

$$\frac{y_{i0} - y_{j0}}{D_{ij0}^2} dx_i + \frac{x_{j0} - x_{i0}}{D_{ij0}^2} dy_i + \frac{y_{j0} - y_{i0}}{D_{ij0}^2} dx_j + \frac{x_{i0} - x_{j0}}{D_{ij0}^2} dy_j = k_{d_i} + v_{d_i} \quad (5-53)$$

donde:

$$k_{d_i} = d_{ij} - \tan^{-1} \left(\frac{x_{j0} - x_{i0}}{y_{j0} - y_{i0}} \right) + \omega_i$$

$$D_{ij0}^2 = (x_{j0} - x_{i0})^2 + (y_{j0} - y_{i0})^2$$

En la figura 5-7 se muestra la geometría de una observación angular. Claramente se ve que la ecuación de observación de un ángulo se puede escribir como la diferencia de dos observaciones de acimut. Así para ángulos medidos a la derecha se tendrá:

$$\angle_{BIF} = Az_{if} - Az_{ib} = \tan^{-1} \left(\frac{x_f - x_i}{y_f - y_i} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{x_b - x_i}{y_b - y_i} \right) + Q_i = \beta_{bif} + v_{\beta_{bif}} \quad (5-54)$$

donde:

β_{bij} : es el ángulo medido.

$v_{\beta ij}$: el residuo del ángulo.

x_i, y_i : valor más probable de las coordenadas de la estación I.

x_f, y_f : valor más probable de las coordenadas de la estación F.

x_b, y_b : valor más probable de las coordenadas de la estación B.

Q_i : ángulo formado por la diferencia de los términos C_{if} y C_{ib} .

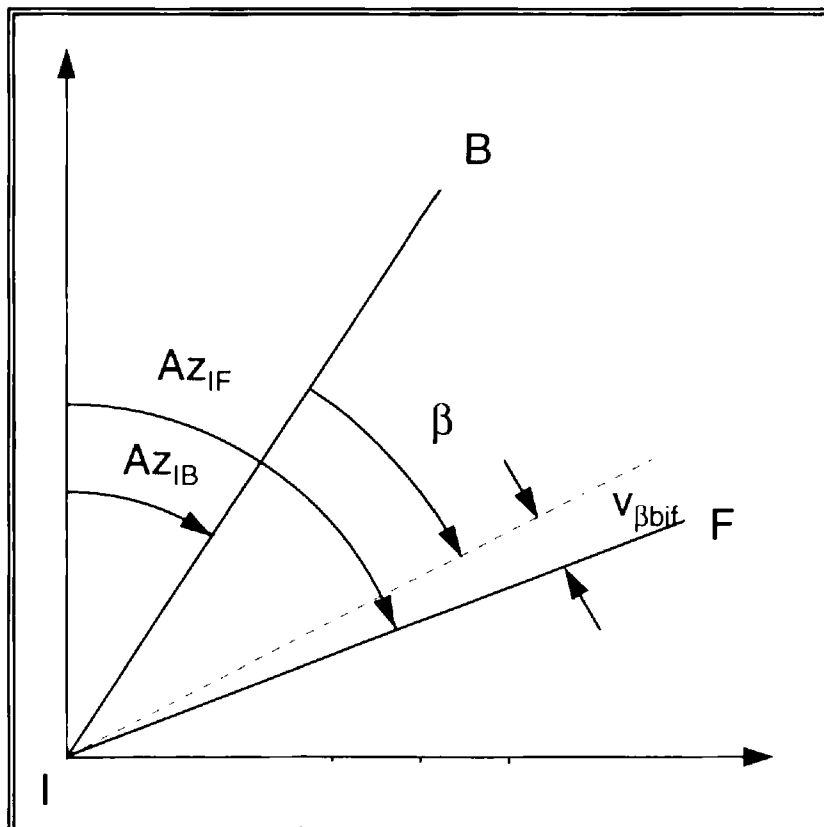


Figura 5-7. Relación entre un ángulo y dos acimutes

La ecuación (4-54) se puede escribir como:

$$F(x_b, y_b, z_b, x_i, y_i, z_i, x_f, y_f, z_f) = \beta_{bij} + v_{\beta_{bij}} \quad (5-55)$$

donde:

$$F(x_b, y_b, z_b, x_i, y_i, z_i, x_f, y_f, z_f) = \tan^{-1}\left(\frac{x_f - x_i}{y_f - y_i}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{x_b - x_i}{y_b - y_i}\right) + Q_i \quad (5-56)$$

Aplicando la ecuación (5-22) para linearizar la ecuación (5-56), las derivadas parciales serán:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_b} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x_b - x_i}{y_b - y_i}\right)^2} \frac{-1}{y_b - y_i} \\ &= \frac{-1(y_b - y_i)}{(x_b - x_i)^2 + (y_b - y_i)^2} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_b} = \frac{y_i - y_b}{D_{IB}^2} \quad (5-57)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_b} = \frac{x_b - x_i}{D_{IB}^2} \quad (5-58)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z_b} = 0 \quad (5-59)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{y_b - y_i}{D_{IB}^2} - \frac{y_f - y_i}{D_{IF}^2} \quad (5-60)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} = \frac{x_i - x_b}{D_{IB}^2} - \frac{x_i - x_f}{D_{IF}^2} \quad (5-61)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z_i} = 0 \quad (5-62)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_f} = \frac{y_f - y_i}{D_{IF}^2} \quad (5-63)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_f} = \frac{x_i - x_f}{D_{IF}^2} \quad (5-64)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z_f} = 0 \quad (5-65)$$

Sustituyendo las ecuaciones (5-57) a (5-65) en (5-22), se obtiene la ecuación prototipo para el ángulo:

$$\begin{aligned} & \frac{y_{i0} - y_{b0}}{D_{ib0}^2} dx_b + \frac{x_{b0} - x_{i0}}{D_{ib0}^2} dy_b + \left(\frac{y_{b0} - y_{i0}}{D_{ib0}^2} - \frac{y_{f0} - y_{i0}}{D_{if0}^2} \right) dx_i + \\ & \left(\frac{x_{i0} - x_{b0}}{D_{ib0}^2} - \frac{x_{i0} - x_{f0}}{D_{if0}^2} \right) dy_i + \frac{y_{i0} - y_{i0}}{D_{if0}^2} dx_f + \frac{x_{i0} - x_{f0}}{D_{if0}^2} dy_f = k_{\beta_{bif}} + v_{\beta_{bif}} \end{aligned} \quad (5-66)$$

donde:

$$k_{\beta_{bif}} = \beta_{bif} - \beta_{bif0}$$

$$\beta_{bif0} = \tan^{-1} \left(\frac{x_{f0} - x_{i0}}{y_{f0} - y_{i0}} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{x_{b0} - x_{i0}}{y_{b0} - y_{i0}} \right) + Q_i$$

$$D_{ib0}^2 = (x_{b0} - x_{i0})^2 + (y_{b0} - y_{i0})^2$$

$$D_{if0}^2 = (x_{f0} - x_{i0})^2 + (y_{f0} - y_{i0})^2$$

Finalmente, el último tipo de observación que se considera en el caso de poligonación son las distancias cenitales, siendo la ecuación paramétrica (figura 5-8):

$$Z = \tan^{-1} \left[\frac{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}}{z_j - z_i} \right] \quad (5-67)$$

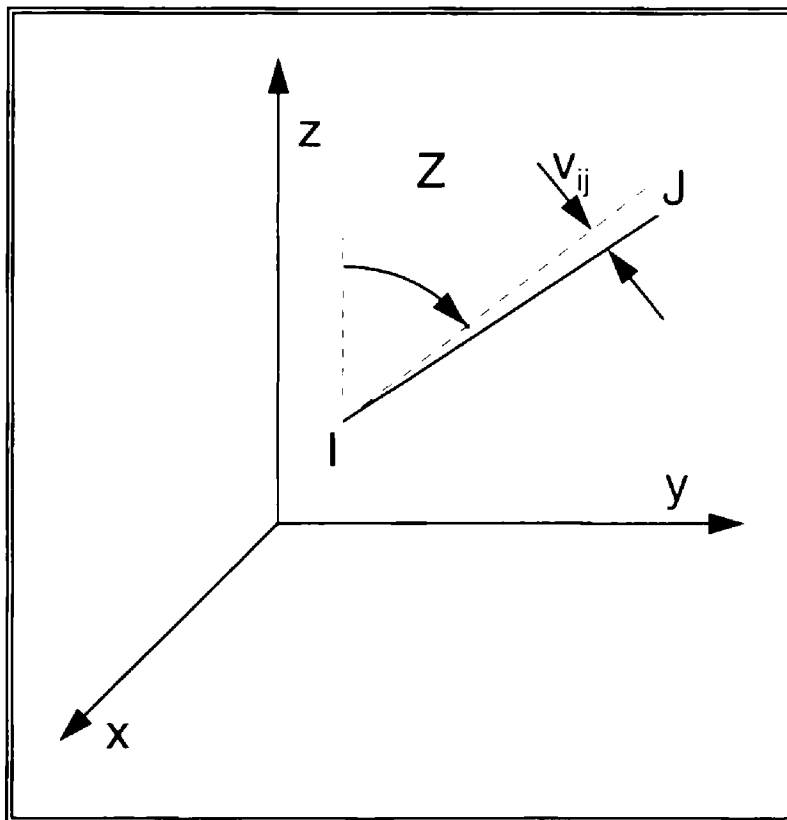


Figura 5-8. Geometría de la distancia cenital

La ecuación (5-67) se puede escribir como:

$$F(x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j) = Z_{ij} + v_{Z_{ij}} \quad (5-68)$$

donde:

$$F(x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j) = \tan^{-1} \left[\frac{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}}{z_j - z_i} \right] \quad (5-69)$$

Aplicando la ecuación (5-22) para linearizar la ecuación (5-69), las derivadas parciales serán:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_i} &= \frac{1}{1 + \left\{ \frac{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}}{(z_j - z_i)} \right\}^2} \frac{2(x_j - x_i)(-1)}{2\left(\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}\right)(z_j - z_i)} \\ &= \frac{1}{(z_j - z_i)^2 + (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \frac{(x_i - x_j)}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{(x_i - y_j)(z_j - z_i)}{IJ^2 D_{ij}} \quad (5-70)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} = \frac{(y_i - x_j)(z_j - z_i)}{IJ^2 D_{ij}} \quad (5-71)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z_i} = -\frac{D_{ij}}{IJ^2} \quad (5-72)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{(x_j - x_i)(z_j - z_i)}{IJ^2 D_{ij}} \quad (5-73)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_j} = \frac{(y_j - y_i)(z_j - z_i)}{IJ^2 D_{ij}} \quad (5-74)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z_j} = \frac{D_{ij}}{IJ^2} \quad (5-75)$$

Sustituyendo las ecuaciones (5-70) a (5-75) en (5-22), se obtiene la ecuación prototipo para la distancia cenital:

$$\begin{aligned} & \frac{(x_{i0} - x_{j0})(z_{j0} - z_{i0})}{IJ_0^2 D_{ij0}} dx_i + \frac{(y_{i0} - y_{j0})(z_{j0} - z_{i0})}{IJ_0^2 D_{ij0}} dy_i - \frac{D_{ij0}}{IJ_0^2} dz_i + \\ & \frac{(x_{j0} - x_{i0})(z_{j0} - z_{i0})}{IJ_0^2 D_{ij0}} dx_j + \frac{(y_{j0} - y_{i0})(z_{j0} - z_{i0})}{IJ_0^2 D_{ij0}} dy_j + \frac{D_{ij0}}{IJ_0^2} dz_j = k_{z_i} + v_{z_i} \end{aligned} \quad (5-76)$$

donde:

$$Z_{ij0} = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{(x_{j0} - x_{i0})^2 + (y_{j0} - y_{i0})^2}}{z_{j0} - z_{i0}} \right)$$

$$D_{ij0} = \sqrt{(x_{j0} - x_{i0})^2 + (y_{j0} - y_{i0})^2}$$

$$IJ_0^2 = (x_{j0} - x_{i0})^2 + (y_{j0} - y_{i0})^2 + (z_{j0} - z_{i0})^2$$

Una vez que se cuenta con los modelos matemáticos linearizados de todas las observaciones involucradas en el levantamiento de poligonales, se procede a determinar los valores iniciales requeridos en las fórmulas.

Escribiendo en notación matricial un sistema de ecuaciones lineales, representado por las funciones F_1, F_2, \dots, F_m las cuales fueron linearizadas por medio de una aproximación de la serie de Taylor, se pueden escribir como:

$$JX = L + V \tag{5-77}$$

Donde la matriz J es el Jacobiano que contiene los coeficientes linearizados de las ecuaciones de observación. Con lo que las matrices individuales de la ecuación (5-77) son:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \frac{\partial F_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{5-78}$$

$$X = \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ dx_n \end{bmatrix} \tag{5-79}$$

$$L = \begin{bmatrix} l_1 - F_1(x_{1_0}, x_{2_0}, \dots, x_{n_0}) \\ l_2 - F_2(x_{1_0}, x_{2_0}, \dots, x_{n_0}) \\ \cdot \\ \cdot \\ l_m - F_m(x_{1_0}, x_{2_0}, \dots, x_{n_0}) \end{bmatrix} \tag{5-80}$$

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_m \end{bmatrix} \quad (5-81)$$

Con lo que la solución a la ecuación (5-77), dará como resultado el vector de correcciones estimado por mínimos cuadrados. Siendo su solución para el caso de observaciones pesadas:

$$X = (J^T P J)^{-1} J^T P L = N^{-1} J^T P L \quad (5-82)$$

En donde la matriz P es una matriz diagonal con los pesos de las observaciones, siendo N^{-1} la matriz inversa de ecuaciones normales.

Una vez determinadas las correcciones por medio de la ecuación (5-82), estas se aplican a los valores iniciales, repitiéndose el proceso hasta que las correcciones sean menores al criterio de convergencia.

5.5.4 Cálculo por dispositivos electrónicos

Los cálculos topográficos requieren solamente de aritmética, geometría general y analítica, de trigonometría plana y algo de cálculo diferencial. Todas estas operaciones fácilmente pueden ser manejadas con calculadoras y computadoras electrónicas, las cuales se han convertido en equipo indispensable para los cálculos topográficos.

Se puede pensar en dos clasificaciones generales de los dispositivos electrónicos para el cálculo:

- 1) Calculadoras de bolsillo y calculadoras programables.
- 2) Computadoras.

Las calculadoras de bolsillo, en particular las que tiene funciones trigonométricas incorporadas, son indispensables para el profesional de la Topografía en la práctica moderna. Tienen la ventaja de que su reducido tamaño y bajo consumo de energía, permiten su traslado a campo y verificar los datos observados antes de regresar al gabinete. Algunos modelos avanzados de calculadoras incluyen desde algunos cuantos pasos de programación hasta cientos de ellos. Las casa fabricantes, tanto de equipos topográficos como de software, ofrecen paquetes de programas integrados, para resolver prácticamente cualquier problema topográfico.

Resulta obvio que el proceso descrito anteriormente para ajustar una poligonal por mínimos cuadrados, requiere necesariamente el uso de computadoras, ya que si no se cuenta con una de ellas, este proceso es extremadamente laborioso, requiriendo un tiempo excesivo para encontrar la solución.

5.5.5 Causas de error en el cálculo

Algunas fuentes de error en el cálculo de poligonales topográficas son:

- i) Compensación inapropiada de ángulos, cuando no se emplean mínimos cuadrados.

- ii) Cálculo erróneo de acimutes o rumbos.
- iii) Compensación inapropiada de proyecciones.
- iv) Cálculo de correcciones con un número mayor de cifras significativas, que las necesarias.

Entre las equivocaciones más frecuentes, se puede mencionar:

- i) No ajustar los ángulos antes de propagar rumbos o acimutes.
- ii) Aplicar en el mismo sentido del error las correcciones.
- iii) Intercambiar coordenadas.

5.5.6 Cálculo de áreas


Uno de los objetivos del levantamiento topográfico, es la determinación del área de la superficie contenida por la poligonal. El cálculo de este valor, se puede realizar por métodos analíticos o gráficos.

5.5.6.1 Productos cruzados

La determinación del área por medio de las coordenadas es un procedimiento sencillo, de la figura 5-9, se tiene que el área es igual a:

$$\begin{array}{l}
 \text{trapezoid} \ 11'55' + \text{trapezoid} \ 55'4'4 + \text{trapezoid} \ 44'3'3 - \text{trapezoid} \ 11'2'2 - \\
 \text{trapezoid} \ 22'3'3
 \end{array} \quad (5-83)$$

donde:

: es el área de un trapecio definido por los vértices n, n', m', m

El área de un trapecio es:

$$\text{Area} = \frac{(\text{base mayor} + \text{base menor})}{2} \cdot \text{altura} \quad (5-84)$$

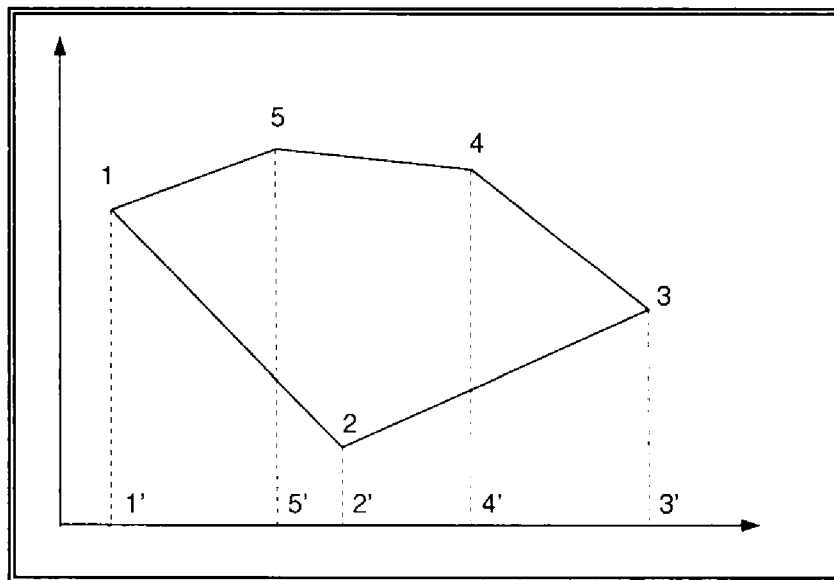


Figura 5-9. Productos cruzados

Calculando los elementos que definen al trapecio, y generalizando para n trapecios, la fórmula (5-84) queda como:

$$\text{Area} = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i|}{2} \quad (5-85)$$

5.5.6.2 Dobles distancias meridianas (DDM)

La superficie contenida por un polígono se calcula fácilmente por el método de dobles distancias meridianas, cuando se conocen las proyecciones meridianas (PM) de los lados. La distancia meridiana de un lado de la poligonal, es la distancia perpendicular del punto central del lado, con respecto al eje Y de referencia. Así de la figura 5-10 tenemos que:

$$\text{Area} = \frac{\sum_{i=1}^n \text{DDM}_i \text{PX}_i}{2} \quad (5-86)$$

$$\text{DDM}_i = \text{DDM}_{i-1} + \text{PY}_i \quad (5-87)$$

Al igual que en el caso de los productos cruzados, la fórmula (5-86) es equivalente a la suma de las áreas de los trapecios individuales.

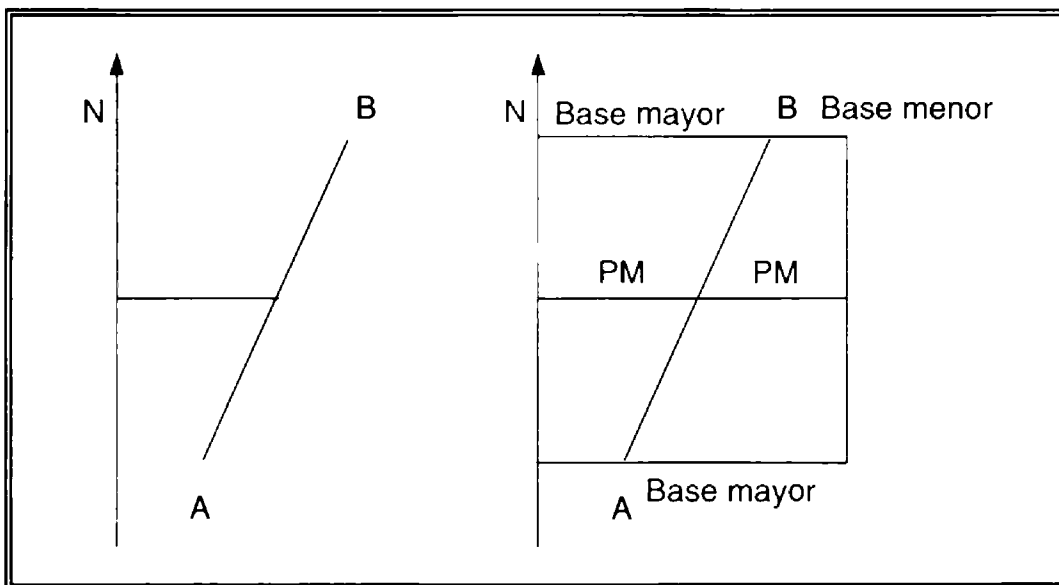


Figura 5-10. Doble distancia meridiana

5.5.6.3 Dobles distancias paralelas (DDP)

Este procedimiento es exactamente equivalente al de las DDM, excepto que se tienen que calcular las proyecciones paralelas (PP), por lo que partiendo de la figura 5-11, se tiene:

$$\text{Area} = \frac{\sum_{i=1}^n \text{DDP}_i \text{PY}_i}{2} \quad (5-88)$$

$$\text{DDP}_i = \text{DDP}_{i-1} + \text{PX}_i \quad (5-89)$$

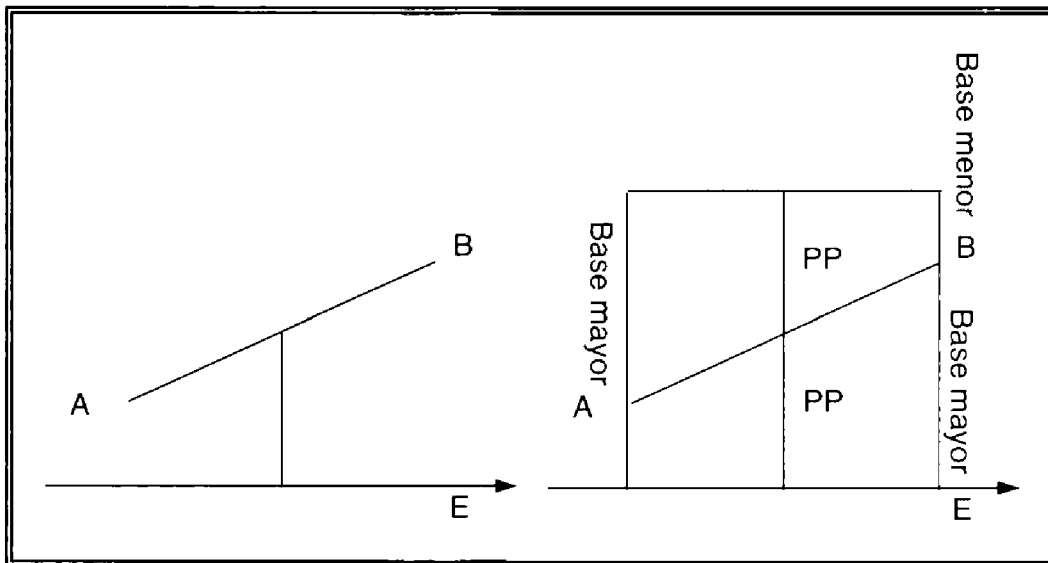


Figura 5-11. Doble distancia paralela

5.5.6.4 Planímetros

Un planímetro es un integrador mecánico, el cual determina el área de una figura a la que se siguió su contorno, dando la lectura en un dispositivo de tambor cilíndrico rodante, conectado a un disco. Existen muchos tipos de planímetros, pero debido a la poca

precisión que proporcionan no son muy recomendables para determinar superficies que requieran de cierta confiabilidad.

5.5.6.5 Causas de error

Entre las fuentes de error en el cálculo de áreas, pueden mencionarse los siguientes:

- i) Ajuste incorrecto de la barra de escala del planímetro.
- ii) Salirse de la orilla del papel del plano.
- iii) Usar diferentes tipos de papel en el plano.
- iv) No hacer los ajustes a las proyecciones de acuerdo a las condiciones reales.
- v) Errores numéricos producidos por los dispositivos de cálculo, como pueden ser:
 - v.i) Truncamiento.
 - v.ii) Redondeo.

El error en el cálculo del área de una poligonal, compensada por métodos diferentes al de mínimos cuadrados se puede calcular en función de la siguiente relación:

$$E_{\text{Area}} = \frac{P}{\sqrt{8n}} \sqrt{0.000000045P^2W^2 + \frac{Ed^2P}{d}} \quad (5-90)$$

donde:

P: perímetro.

n: número de lados.

W: error angular promedio.

Ed: error lineal promedio.

d: longitud máxima del instrumento de medición.

Para el caso del planímetro el error se puede determinar con:

$$E_{\text{Area}} = cs + c'Ss \quad (5-91)$$

donde:

s: área determinada

c,c' y S son coeficientes en función del tipo de planímetro

planímetro polar

$$c=0.00126$$

$$c'=0.00022$$

S

para áreas de 10 cm² 1/75

para áreas de 20 cm² 1/140

para áreas de 50 cm² 1/355

para áreas de 100 cm² 1/682

para áreas de 200 cm² 1/1275

planímetro polar de disco

$$c=0.0006$$

$$c'=0.000026$$

S

para áreas de 10 cm ²	1/1000
para áreas de 200 cm ²	1/10000

5.5.6.6 Propagación del error en el cálculo de superficies

Los diferentes métodos analíticos descritos en las secciones previas, tienen como base el cálculo de la superficie de un trapecio en función de sus coordenadas, por lo que la propagación del error será la misma en cualquiera de ellos.

Partiendo de la ecuación (5-85) se puede establecer que:

$$\text{Área} = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + \cdots + x_ny_1 - x_1y_n) \quad (5-92)$$

Reordenando términos:

$$\text{Área} = \frac{1}{2}(x_1(y_2 - y_n) + x_2(y_3 - y_1) + \cdots + x_n(y_1 - y_{n-1})) \quad (5-93)$$

Determinando las derivadas parciales con respecto a x:

$$\frac{\partial \text{Área}}{\partial x_1} = \frac{1}{2}(y_2 - y_n) \quad (5-94)$$

$$\frac{\partial \text{Área}}{\partial x_2} = \frac{1}{2}(y_3 - y_1) \quad (5-95)$$

de manera general:

$$\frac{\partial \text{Area}}{\partial x_i} = \frac{1}{2}(y_{i+1} - y_{i-1}) \quad (5-96)$$

Para la coordenada y:

$$\frac{\partial \text{Area}}{\partial y_1} = \frac{1}{2}(x_n - x_2) \quad (5-97)$$

$$\frac{\partial \text{Area}}{\partial y_2} = \frac{1}{2}(x_1 - x_3) \quad (5-98)$$

de manera general:

$$\frac{\partial \text{Area}}{\partial y_i} = \frac{1}{2}(x_{i-1} - x_{i+1}) \quad (5-99)$$

Sustituyendo las derivadas parciales en la fórmula general de propagación de los errores (2-26), se tiene:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{Area}}^2 = & \left[\frac{1}{2}(y_2 - y_n) \right]^2 \sigma_{x_1}^2 + \left[\frac{1}{2}(y_3 - y_1) \right]^2 \sigma_{x_2}^2 + \dots + \left[\frac{1}{2}(y_1 - y_{n-1}) \right]^2 \sigma_{x_n}^2 + \\ & \left[\frac{1}{2}(x_n - x_2) \right]^2 \sigma_{y_1}^2 + \left[\frac{1}{2}(x_1 - x_3) \right]^2 \sigma_{y_2}^2 + \dots + \left[\frac{1}{2}(x_{n-1} - x_1) \right]^2 \sigma_{y_i}^2 \end{aligned} \quad (5-100)$$

Reagrupando términos, se tiene:

$$\sigma_{\text{Area}}^2 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \left[(y_{i+1} - y_{i-1})^2 \sigma_{x_i}^2 + (x_{i-1} - x_{i+1})^2 \sigma_{y_i}^2 \right] \quad (5-101)$$

6. INTRODUCCIÓN A LA ALTIMETRÍA

6.1 GENERALIDADES

El propósito de la altimetría, es determinar la diferencia de elevación entre puntos, o su elevación misma a partir de cierta superficie de referencia. El conocimiento de este parámetro es fundamental en obras de Ingeniería tales como el trazo de vías de comunicación (carreteras, vías férreas, canales, líneas de transmisión, etc.), la construcción de edificios, obras de riego, así como para la elaboración de planos que muestren la configuración del terreno. Sin embargo, se puede considerar que una de las principales aplicaciones de la altimetría es la de contar con el elemento geométrico fundamental para reducir las observaciones del terreno a la superficie de cálculo.

A continuación se presentan algunos conceptos básicos que se utilizan en este tema.

Superficie de nivel, es una superficie irregular, aproximadamente elipsoidal y perpendicular a la vertical en cada punto de la superficie terrestre. En topografía estas superficies se consideran circulares y concéntricas.

Vertical, dirección de la gravedad, normalmente materializada por la línea de plomada.

Plano horizontal, plano perpendicular a la vertical del lugar.

Datum, superficie a la cual se refieren las elevaciones; actualmente, la superficie aceptada como tal es el Nivel Medio del Mar.

Nivel Medio del Mar, es la altura promedio del mar obtenida durante un periodo de observación de al menos 19 años.

Altura, distancia vertical de un punto con respecto a la superficie del terreno.

Cota, Cantidad numérica que expresa la distancia vertical de un punto con respecto a una superficie de referencia.

Elevación, se utiliza como sinónimo de cota.

Altitud, distancia vertical desde un punto dado, con respecto a la superficie del Nivel Medio del Mar.

Banco de Nivel, marca más o menos permanente en el terreno de altitud conocida.

Nivelación, procedimiento topográfico para determinar el desnivel entre puntos o su altitud.

Desnivel, distancia vertical existente entre las superficies de nivel.

6.2 EFECTOS DE CURVATURA TERRESTRE Y REFRACCIÓN ATMOSFÉRICA

Como fue previamente definido, el desnivel entre dos puntos es la distancia vertical que existe entre las superficies de nivel que las contienen, las cuales son irregulares, aunque para el caso de la Topografía se consideran circulares y concéntricas. La obtención

de desniveles en campo, se basa en la determinación de la diferencia de alturas entre líneas visuales trazadas con el instrumento conocido como equialtímetro o nivel. Al igual que cualquier medición, las diferencias de nivel están afectadas de errores inherentes al proceso, así como por aspectos ambientales. En la figura 6-1 se muestra el efecto de la refracción atmosférica.

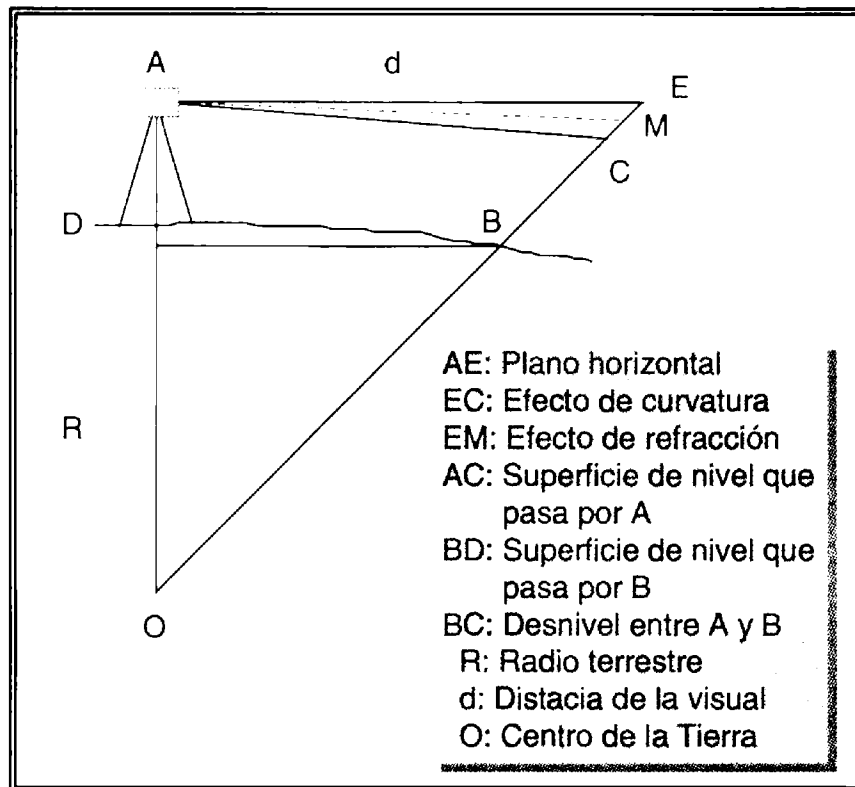


Figura 6-1. Efectos de curvatura y refracción

Haciendo $EC=c$ y $EM=R$, y puesto que $AE=AC$, se puede establecer que:

$$\begin{aligned}
 d^2 &= (R + c)^2 - R^2 \\
 &= R^2 + 2Rc + c^2 - R^2 \\
 &= 2Rc + c^2
 \end{aligned}$$

despreciando c^2 por ser muy pequeño con respecto a $2Rc$:

$$c = \frac{d^2}{2R} \quad (6-1)$$

La ecuación (6-1) permite evaluar el efecto de curvatura terrestre. Para tener una idea de su magnitud a diferentes longitudes de visual en la tabla 6-1 se presenta este, considerando un radio medio terrestre de 6370 kilómetros.

Distancia [m]	50	100	200	300	500	1000
c [mm]	0.20	0.78	3.14	7.06	19.62	78.49

Tabla 6-1. Efecto de curvatura

De la figura 6-1 se ve claramente, que el efecto de curvatura terrestre se ve disminuido por el efecto de refracción atmosférica, debido a que normalmente la temperatura cerca del suelo es mayor que sobre él. Comúnmente, se considera que el radio de curvatura de las visuales refractadas es aproximadamente 7 veces el radio terrestre (figura 6-2).

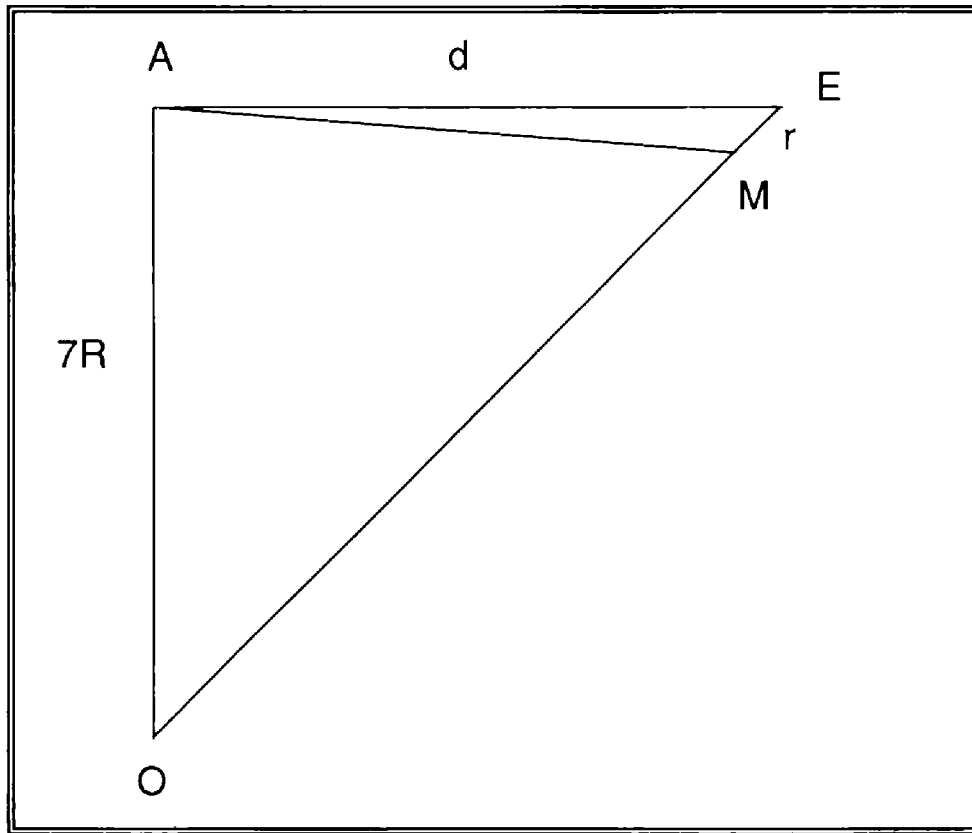


Figura 6-2. Radio de curvatura de las visuales refractadas

Partiendo de manera similar que en el caso de la curvatura terrestre, haciendo $EM=r$ y aceptando que $AE=AM$, se tiene:

$$\begin{aligned} d^2 &= (7R+r)^2 - (7R)^2 \\ &= 49R^2 + 14rR + r^2 - 49R^2 \\ &= 14rR + r^2 \end{aligned}$$

despreciando r^2 por ser muy pequeño con respecto a $14Rr$:

$$r = \frac{d^2}{14R} \quad (6-2)$$

En la tabla 6-2, se presenta el efecto por refracción atmosférica, bajo las mismas características que en la tabla 6-1.

Distancia [m]	50	100	200	300	500	1000
r [mm]	0.03	0.11	0.45	1.01	2.80	11.21

Tabla 6-2. Efecto de refracción

Ahora bien, el efecto de curvatura terrestre y refracción atmosférica es:

$$\begin{aligned}
 C_{cr} &= c - r = \frac{d^2}{2R} - \frac{d^2}{14R} \\
 &= \frac{d^2}{2R} \left(1 - \frac{1}{7} \right) \\
 C_{cr} &= 6.7 \times 10^{-8} d^2 \qquad (6-3)
 \end{aligned}$$

En la tabla 6-3 se muestra el efecto combinado para diferentes distancias.

Distancia [m]	50	100	200	300	500	1000
C_{cr} [mm]	0.17	0.67	2.69	6.06	16.82	67.28

Tabla 6-3. Efecto combinado de curvatura y refracción

El efecto de curvatura terrestre y refracción atmosférica siempre estarán presentes en un levantamiento; sin embargo, pueden reducirse utilizando la metodología adecuada, la cual consiste simplemente, en colocar el instrumento al centro entre las dos señales (figura 6-3).

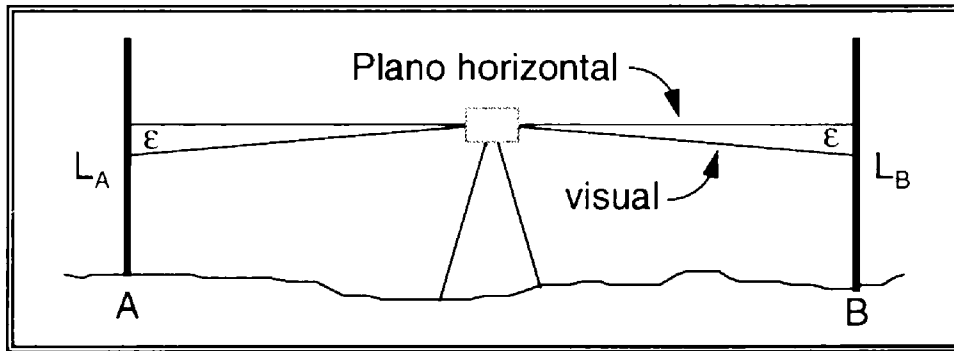


Figura 6-3. Eliminación de errores sistemáticos

Con base en la figura 6-3, se puede establecer que:

$$\Delta H = (L_A + \varepsilon) - (L_B + \varepsilon) = L_A - L_B \quad (6-4)$$

7. APARATOS EMPLEADOS EN NIVELACIÓN

7.1 EQUIPO MENOR

Algunos accesorios básicos para efectuar la nivelación geométrica se describen a continuación, indicándose la función que desempeñan.

7.1.1 Sapos

Son placas de acero u otro material similar, con un casquete esférico en su centro y tres patas con puntas de acero para fijarlos en el suelo, también tienen un asa para su transporte. Sirven para apoyar las miras o estadales, evitando que cambie su altura durante la determinación de las diferencias de nivel. En la figura 7-1 se ilustran los sapos y su empleo.

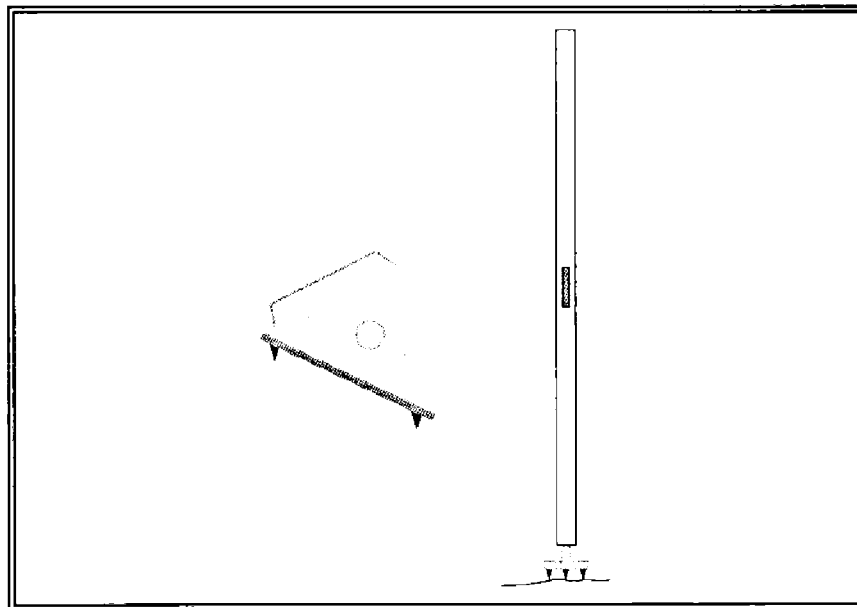


Figura 7-1. El sapo y su uso

7.1.2 Miras o estadales

Son reglas de madera, de fibra de vidrio o de metal, graduadas en metros y decimales, sobre las que se realizan las lecturas en el levantamiento.

Hay principalmente dos clases de miras, una de ellas es la que permite hacer lecturas directamente a través del anteojo y las otras tienen una tarja o marcador móvil que se ajusta manualmente según las indicaciones del observador.

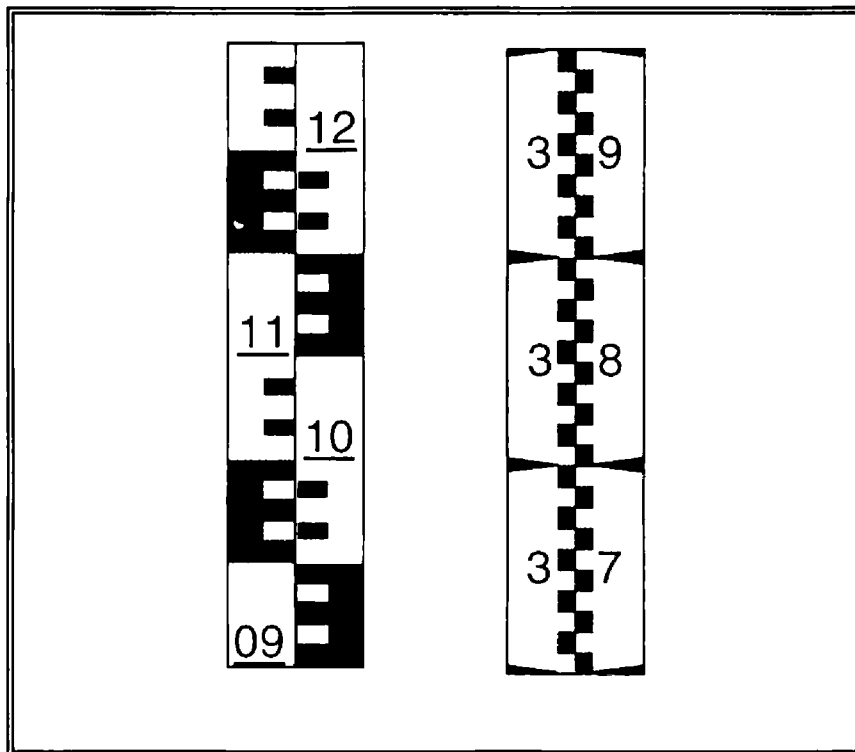


Figura 7-2. Miras o estadales

Por cuanto a sus modelos, colores, longitudes y graduaciones existe una gran cantidad de miras en el mercado. En México, se usan principalmente las graduadas al centímetro, combinando colores rojo y negro sobre fondo blanco, en longitudes de 3 y 4 metros, los que normalmente se pueden abatir a la mitad de su

largo. También existen miras telescópicas de aluminio, con las mismas características de graduación; algunas de las ventajas de este tipo de miras se relacionan con su peso, duración y facilidad de transporte. En la figura 7-2, se ilustran algunos tipos de ellas.

Un aditamento que facilita la verticalidad de las miras es la niveleta, consiste en un pequeño nivel esférico que montado sobre un soporte metálico, permite fijarlo a la mira o estadal. En trabajos de precisión es imprescindible el uso de este aditamento.

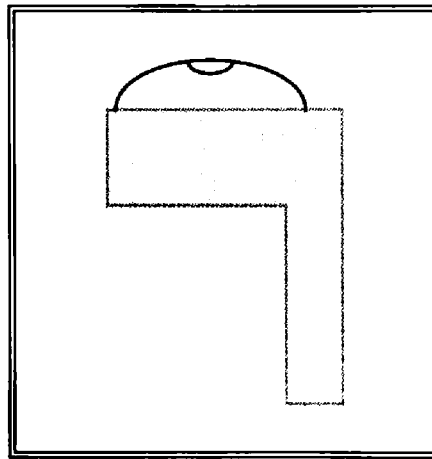


Figura 7-3. Niveleta

7.1.3 Trípodes

Su función es sostener el nivel durante las operaciones de campo, Como su nombre lo indica, consta de un armazón de tres patas rígidas y un cabezal donde se atornilla el nivel. Para su construcción se combina la madera y el metal (figura 7-4).

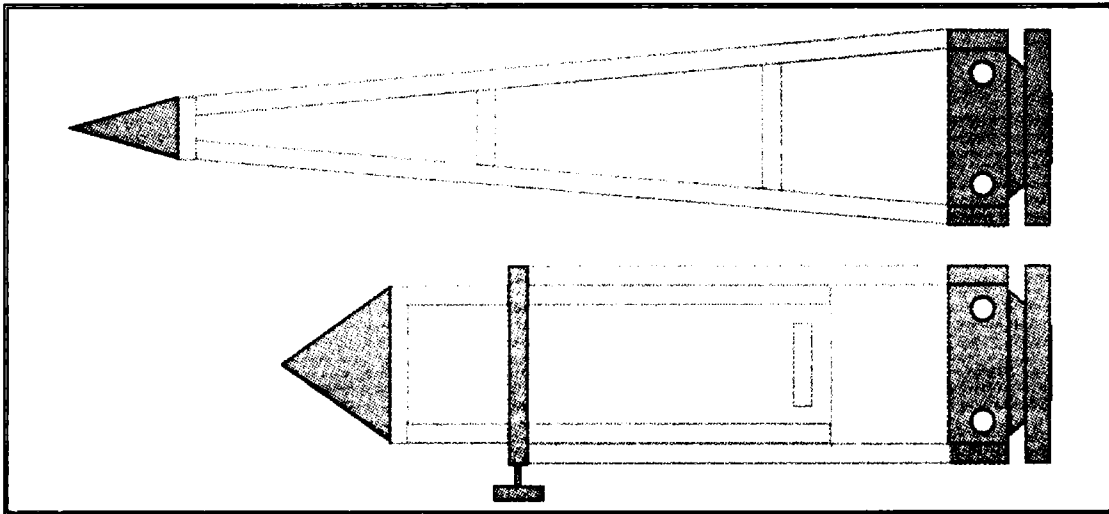


Figura 7-4. Trípodes

7.1.4 Conservación y manejo del equipo

El éxito de un trabajo de nivelación, depende en gran parte de contar con equipo apropiado y en buenas condiciones de operaciones. Algunas recomendaciones para el buen funcionamiento de los dispositivos mencionados son:

- No usar el estadal para una función diferente a aquellas para la que han sido diseñados y no recargarlos sobre paredes, postes o similares, ni colocarlos sobre su cara pintada.
- Procurar no tocar las marcas con las manos.
- Mantener en buen estado el trípode, sobre todo en sus uniones y usar la herramienta adecuada para no dañar tuercas o tornillos, así como verificar su estado periódicamente de manera sistemática, a fin de garantizar que constituya una base sólida para soportar e nivel.
- Mantener limpio el equipo, siguiendo las recomendaciones del fabricante.

- Conservar, en lo posible, seco el equipo, evitando embalarlo en lugares húmedos.

7.2 NIVELES

El principal instrumento empleado en la nivelación se conoce como nivel o equialtímetro. Por cuanto a sus características de construcción y operación, se pueden clasificar en:

- a) Nivel fijo o Dumpy.
- b) Nivel basculante.
- c) Nivel automático.

7.2.1 Nivel fijo

En este tipo de nivel, el anteojo se encuentra unido rígidamente a la regla de nivel y paralelo a ella. El nivel de burbuja también está unido a la regla y permanece siempre en el mismo plano vertical que el anteojo, tiene tornillos que permiten su ajuste vertical o bien su reposición.

Típicamente, esta clase de niveles eran pesados y su anteojo bastante largo; sin embargo, actualmente se construyen compactos con buenas características. Un esquema básico de este tipo de niveles se presenta en la figura 7-5.

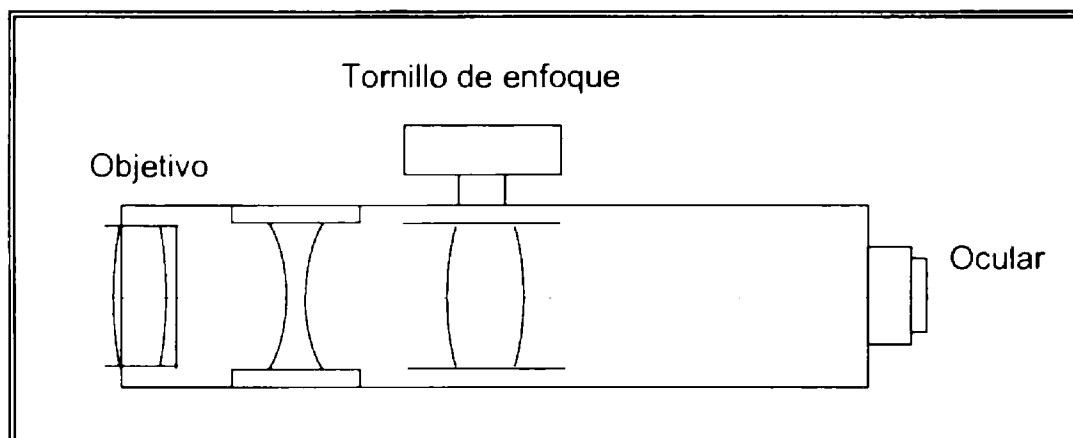


Figura 7-5. Nivel fijo

7.2.2 Nivel basculante

Su principal característica distintiva con respecto al nivel fijo, es que en ésta categoría de niveles el anteojo se puede inclinar, para lo cual cuenta con una rótula que permite nivelarlo más rápidamente, estando el anteojo, adicionalmente, soportado por un pivote central sobre el que se mueve para lograr la nivelación precisa de la burbuja. Generalmente se encuentra provisto de un nivel esférico para lograr una aproximación de su nivelación y afinarla posteriormente, por medio del basculamiento del anteojo.

Esta característica de basculamiento, ahorra tiempo e incrementa la precisión, ya que con un solo tornillo se mantiene horizontal la visual. La mayoría de estos niveles, cuenta con sistemas de coincidencia para la nivelación del instrumento. En la figura 7-6, se presenta un diagrama del principio que permite esto.

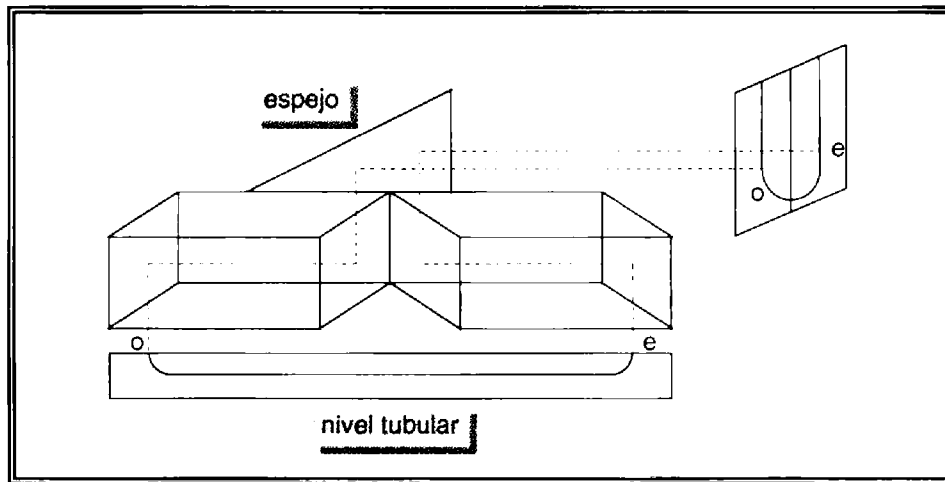


Figura 7-6. Principio de prismas para hacer el basculamiento

7.2.3 Nivel automático

El nivel automático establece la horizontalidad de la línea visual dentro de ciertos límites, mediante un sistema compensador óptico suspendido con un péndulo interpuesto en la trayectoria de la visual.

En la figura 7-7, se muestra un diagrama del sistema compensador.

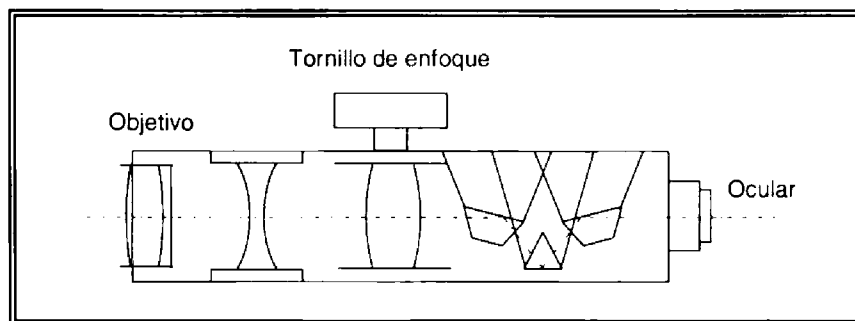


Figura 7-7. Nivel automático

La calidad del equialtímetro básicamente está dada en función de la sensibilidad de los niveles que tiene integrados. En el caso de

los niveles topográficos la sensibilidad esta en el rango de 20" a 60" por cada 2 milímetros y en el caso de los instrumentos geodésicos es de 5".

7.2.4 Ajuste instrumental

El equialtímetro fundamentalmente debe cumplir las siguientes condiciones:

- 1) La directriz del nivel debe ser perpendicular al eje vertical.
- 2) La directriz del nivel debe ser paralela a la línea de colimación.

La primera condición solo se requiere cumplir cuando se trata de niveles tipo Dumpy, pero la segunda es esencial para todos los niveles. En los aparatos automáticos, esta condición significa básicamente que la línea de vista obtenida sea realmente horizontal. En virtud de que los métodos de comprobación de los equipos son muy comunes y están fuera del objetivo de este texto se omite se presentación, sugiriendo a los interesados en este tópico la consulta de cualquier libro de Topografía.

7.3 PROCEDIMIENTOS OPERATIVOS

7.3.1 Transporte y colocación del equialtímetro

Se sugiere que el equialtímetro siempre se transporte en su estuche y al sacarlo, evitar cogerlo del anteojo. Al atornillarlo la base nivelante sobre el trípode, asegurarse que no quede flojo

ni forzado. Previamente debe haberse comprobado el buen funcionamiento del trípode.

En virtud de que el nivel no debe ocupar un punto en particular, siempre será posible que la base del trípode quede sensiblemente horizontal, a buena altura y en el mejor lugar para realizar la lectura (figura 7-8). Dependiendo del tipo de nivel deberán seguirse los pasos adecuados para una correcta observación.

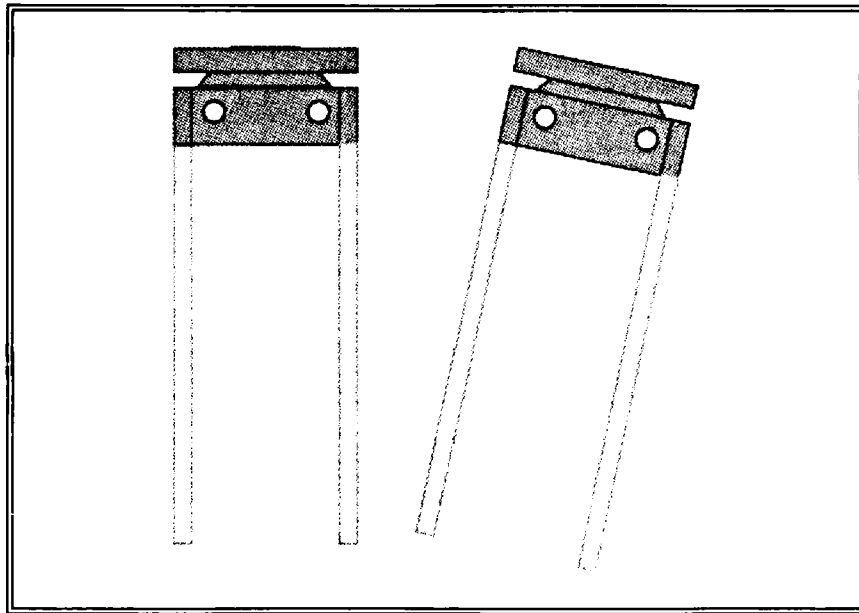


Figura 7-8. Posición correcta e incorrecta del trípode

7.3.2 Obligaciones de los estadaleros

Las obligaciones del estadalero son relativamente sencillas y se pueden sintetizar en los siguientes puntos:

- 1) Plomear correctamente el estadal, ya sea con la niveleta o balanceándolo rítmica y lentamente hacia atrás y adelante.

- 2) Cuidar la estabilidad en los puntos de liga y verificar que se ubique correctamente en el banco de nivel.
- 3) Colaborar con el nivelador para balancear correctamente las longitudes de las visuales.

Sin embargo, es importante destacar que en gran medida la calidad de un trabajo de nivelación estará siempre en función del cuidado que pongan los estadaleros en realizar sus tareas.

7.4 ERRORES SISTEMÁTICOS EN LA NIVELACIÓN DIFERENCIAL

La nivelación diferencial y trigonométrica son dos de los métodos más comúnmente empleados para encontrar diferencias de elevación entre estaciones.

Los principales errores sistemáticos son por refracción atmosférica y curvatura terrestre, así como por aspectos instrumentales.

7.4.1 Error de colimación

En el proceso de la nivelación diferencial, para minimizar los efectos sistemáticos, las visuales están restringidas en su longitud y balance. El error de colimación se presenta por la no horizontalidad de la visual, minimizándose su efecto al mantener equilibrio entre las visuales hacia atrás y hacia adelante; sin embargo, cualquier diferencia en las distancias producirá un error. En base a la figura 6-2, se puede establecer que el error de colimación para una sección es:

$$e_c = D_1\varepsilon - D_2\varepsilon \quad (7-1)$$

donde:

e_c : error de colimación.

D_1, D_2 : distancias de las visuales.

Aplicando la ecuación (7-1) a la diferencia de nivel entre dos bancos consecutivos, se tiene:

$$e_c = \varepsilon[(D_1 - D_2) + (D_3 - D_4) + \dots + (D_{n-1} - D_n)] \quad (7-2)$$

Reagrupando términos:

$$e_c = \varepsilon\left[\sum D_{\text{atras}} - \sum D_{\text{adelante}}\right] \quad (7-3)$$

7.4.2 Error por curvatura terrestre y refracción atmosférica

En la sección 6-2, se presenta el efecto que produce la combinación de la curvatura terrestre y la refracción atmosférica, la cual es:

$$h_{CR} = 0.067\left(\frac{D}{1000}\right)^2 \quad (7-4)$$

El error inducido en una sección es:

$$e_{CR} = 0.067\left(\frac{D_1}{1000}\right)^2 - 0.067\left(\frac{D_2}{1000}\right)^2 \quad (7-5)$$

Factorizando los términos comunes de la ecuación (7-5), se obtiene:

$$e_{CR} = \frac{0.067}{1000^2} (D_1^2 - D_2^2) \quad (7-6)$$

Para una línea de nivelación diferencial se tendrá:

$$e_{CR} = \frac{0.067}{1000^2} [(D_1^2 - D_2^2) + (D_3^2 - D_4^2) + \dots + (D_{n-1}^2 - D_n^2)] \quad (7-7)$$

Después de reagrupar términos se tendrá:

$$e_{CR} = \frac{0.067}{1000^2} \left[\sum D_{\text{atras}}^2 - \sum D_{\text{adelante}}^2 \right] \quad (7-8)$$

El error de refracción causado por el gradiente vertical de temperatura puede ser mayor cuando la visual atraviesa las capas inferiores de la atmósfera. Ya que la medición del gradiente vertical de temperatura puede tener un costo prohibitivo, se prefiere adoptar una metodología tal que las visuales siempre pasen 0.5 sobre el terreno, con lo que se evita tener que modelar las capas de la atmósfera cercanas al suelo.

7.5 ERRORES ALEATORIOS EN LA NIVELACIÓN DIFERENCIAL

La nivelación diferencial no está exenta de errores aleatorios, al igual que cualquier otro proceso de medición, incluyendo errores en la nivelación del instrumento o en las lecturas sobre las miras. El tamaño de estos errores estará dictado por las condiciones

atmosféricas, la calidad de la óptica del telescopio, la sensibilidad de la burbuja o del compensador y la graduación de las miras.

7.5.1 Error de lectura

El error estimado en las lecturas de las miras, se puede expresar como una relación del error estándar estimado en la lectura de la mira por la longitud de la distancia de la visual. Por ejemplo, si la habilidad de un observador para leer una mira está dentro de ± 0.001 milímetros en 30 metros, entonces $\sigma_{l/D} = \pm 0.001 \text{ mm} / 30 \text{ m} = \pm 0.00003 \text{ mm/m}$. Con lo que el error para una visual en particular, se puede estimar con:

$$\sigma = D\sigma_{l/D} \quad (7-9)$$

7.5.2 Errores instrumentales

El error estimado para un equialtímetro con compensador automático generalmente está dado en la información técnica del fabricante de cada instrumento. Para niveles de precisión, esta información se da en segundos de arco o como una estimación del error en elevación para una distancia dada. Como ejemplo, el error estimado puede ser de $\pm 1.5 \text{ mm/km}$, lo cual corresponde a $\pm 1.5 / 1'000,000 \times \rho = \pm 0.3''$.

Usualmente un nivel de precisión tiene un compensador con una exactitud entre $\pm 0.1''$ y $\pm 0.2''$, mientras que para niveles topográficos este valor puede llegar a $60''$, como se indicó anteriormente.

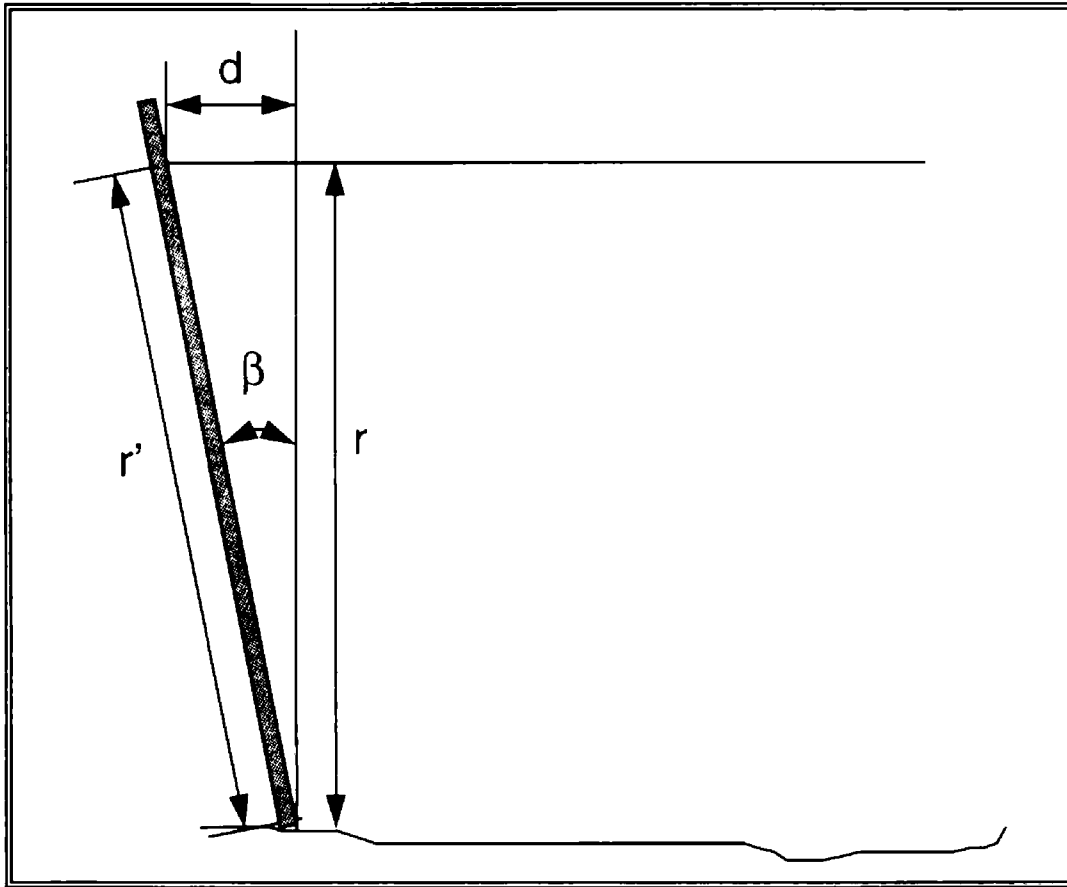


Figura 7-9. No verticalidad de la mira

7.5.3 Errores en las miras

La no verticalidad de las miras inducirá que las lecturas que se realizan sobre ellas, sean sistemáticamente mayores a las reales, dependiendo la desviación del ángulo que forme la mira con respecto a la vertical. Considerando la figura 7-9,

$$e_{lm} = r - r' = \frac{d^2}{2r} \quad (7-10)$$

donde d es el desplazamiento lineal de la mira con respecto a la vertical del lugar. El tamaño del desplazamiento depende de la

sensibilidad de la niveleta, así como del error de centrado de la burbuja. Si la burbuja está fuera por una cantidad de β , entonces d será:

$$d = r \operatorname{sen} \beta \quad (7-11)$$

Sustituyendo la ecuación (7-11) en (7-10):

$$e_{\text{im}} = \frac{r}{2} \operatorname{sen}^2 \beta \quad (7-12)$$

Ya que este error ocurre en cada visual, la combinación de los errores se puede escribir como:

$$e_{\text{im}} = \left[\frac{r_1 \operatorname{sen}^2 \beta}{2} - \frac{r_2 \operatorname{sen}^2 \beta}{2} \right] + \left[\frac{r_3 \operatorname{sen}^2 \beta}{2} - \frac{r_4 \operatorname{sen}^2 \beta}{2} \right] + \dots \quad (7-13)$$

Reagrupando términos se obtiene:

$$e_{\text{im}} = \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \beta (r_1 - r_2 + r_3 - r_4 + \dots) \quad (7-14)$$

o lo que es lo mismo:

$$e_{\text{im}} = \frac{\Delta h}{2} \operatorname{sen}^2 \beta \quad (7-15)$$

7.5.4 Propagación de errores

Las principales fuentes de error en la nivelación diferencial son los errores de lectura sobre las miras y la nivelación del

equialtímetro, ya que el error de colimación, así como el de curvatura terrestre y refracción atmosférica, pueden prácticamente eliminarse con un buen equilibrio entre las longitudes de las visuales atrás y adelante su contribución de error será mínima. Sin embargo, ya que las distancias se determinan por métodos estadimétricos, existirá alguna influencia en la determinación de diferencias de nivel.

Considerando que la diferencia de nivel entre dos puntos está dada por:

$$\Delta h = (lm_1 - lm_2) - (D_1\varepsilon - D_2\varepsilon) - \frac{0.067}{1000^2} (D_1^2 - D_2^2) - \frac{1}{2} (r_1 - r_2) \text{sen}^2\beta \quad (7-16)$$

donde lm_i son las lecturas sobre las miras y los otros términos ya han sido definidos.

Aplicando una vez más la ecuación de propagación de errores (2-26) a la ecuación (7-16), se tiene que:

$$\begin{aligned} \sigma_{\Delta h} = & \left(\frac{\partial \Delta h}{\partial lm_1} \right)^2 dlm_1^2 + \left(\frac{\partial \Delta h}{\partial lm_2} \right)^2 dlm_2^2 + \left(\frac{\partial \Delta h}{\partial \varepsilon_1} \right)^2 d\varepsilon_1^2 \\ & + \left(\frac{\partial \Delta h}{\partial \varepsilon_2} \right)^2 d\varepsilon_2^2 + \left(\frac{\partial \Delta h}{\partial D_1} \right)^2 dD_1^2 + \left(\frac{\partial \Delta h}{\partial D_2} \right)^2 dD_2^2 \\ & + \left(\frac{\partial \Delta h}{\partial r_1} \right)^2 dr_1^2 + \left(\frac{\partial \Delta h}{\partial r_2} \right)^2 dr_2^2 + \left(\frac{\partial \Delta h}{\partial \beta} \right)^2 d\beta^2 \end{aligned} \quad (7-17)$$

Las derivadas parciales son:

$$\frac{\partial \Delta h}{\partial l m_1} = 1 \quad (7-18)$$

$$\frac{\partial \Delta h}{\partial l m_2} = -1 \quad (7-19)$$

$$\frac{\partial \Delta h}{\partial \varepsilon_1} = -D_1 \quad (7-20)$$

$$\frac{\partial \Delta h}{\partial \varepsilon_2} = D_2 \quad (7-21)$$

$$\frac{\partial \Delta h}{\partial D_1} = -\left(\varepsilon_1 + \frac{0.067 D_1}{500000} \right) \quad (7-22)$$

$$\frac{\partial \Delta h}{\partial D_2} = \left(\varepsilon_2 + \frac{0.067 D_2}{500000} \right) \quad (7-23)$$

$$\frac{\partial \Delta h}{\partial r_1} = \frac{1}{2} \text{sen}^2 \beta \quad (7-24)$$

$$\frac{\partial \Delta h}{\partial r_2} = -\frac{1}{2} \text{sen}^2 \beta \quad (7-25)$$

$$\frac{\partial \Delta h}{\partial \beta} = (r_1 - r_2) \text{sen} \beta \cos \beta \quad (7-26)$$

Sustituyendo las ecuaciones (7-18) a (7-26) en (7-17), junto con sus correspondientes estimaciones de error, el error de elevación en una sección será:

$$\sigma_{\Delta h} = \left\{ \begin{aligned} & \left[(D_1 \sigma_{I/D})^2 + (D_2 \sigma_{I/D})^2 + (-D_1 \sigma_{\varepsilon_1})^2 + (D_2 \sigma_{\varepsilon_2})^2 + \right. \\ & \left. \left[-\left(\varepsilon_1 + \frac{0.067D_1}{500000} \right) \sigma_{D_1} \right]^2 \right. \\ & + \left[\left(\varepsilon_2 + \frac{0.067D_2}{500000} \right) \sigma_{D_2} \right]^2 + \left[\left(\frac{1}{2} \text{sen}^2 \beta \right) \sigma_{d_{r_1}} \right]^2 \\ & \left. + \left[\left(\frac{1}{2} \text{sen}^2 \beta \right) \sigma_{d_{r_2}} \right]^2 + \left[(r_1 - r_2) \text{sen} \beta \cos \beta \sigma_{\beta} \right]^2 \right\}^{1/2} \quad (7-27) \end{aligned} \right.$$

En un procedimiento normal de nivelación diferencial, las distancias hacia atrás son iguales a las de adelante, por lo que los errores estándar se consideran iguales; así la ecuación (7-27) se puede simplificar como:

$$\sigma_{\Delta h} = \sqrt{ \begin{aligned} & 2D^2 (\sigma_{I/D}^2 + 2\sigma_{\varepsilon}^2) + 2 \left(\varepsilon + \frac{0.067D}{500000} \right)^2 \sigma_D^2 \\ & + \frac{1}{2} (\text{sen}^2 \beta \sigma_{d_r})^2 + \left[(r_1 - r_2) \text{sen} \beta \cos \beta \sigma_{\beta} \right]^2 \end{aligned} } \quad (7-28)$$

Con lo que el error en la diferencia de nivel entre dos bancos de nivel, estará dada por:

$$\sigma_{\Delta h_{BN}} = \sqrt{\sum \sigma_{\Delta h_{seccion}}^2} \quad (7-29)$$

Del análisis de las fórmulas anteriores se ve claro que el proceso de nivelación diferencial, desde el punto de vista geométrico, es sencillo, sobre todo con las consideraciones hechas para los trabajos topográficos; sin embargo, en el caso de la nivelación

geodésica de precisión hay una serie de aspectos que dificultan en gran medida el problema, sobre todo el tener que considerar que las superficies de nivel, no son concéntricas, al estar afectadas por la gravedad; así como el efecto de la temperatura sobre las miras. En virtud de que estos aspectos van más allá del objetivo primario de este texto, no se tratarán, no obstante, el profesional de la Topografía debe tener en mente lo anterior, sobre todo cuando realice trabajos de nivelación en grandes extensiones de terrenos y en aquellos trabajos cuya finalidad sea para obras hidráulicas.

8. NIVELACIÓN GEOMÉTRICA

Como se ha mencionado en los capítulos precedentes, la finalidad de la nivelación es determinar la elevación de puntos situados en el terreno. Cabe recordar, que todo trabajo topográfico debe tener alguna clase de testigo, por lo que en el caso de la nivelación se debe conservar físicamente la situación de los puntos en los que se determinó la elevación, para su uso posterior, lo cual se logra estableciendo marcas fijas conocidas como Bancos de Nivel o BN por sus siglas.

Dependiendo de la permanencia requerida, el banco de nivel se establece, ya sea con una placa o varilla metálica empotrada en un monumento de concreto, roca o alguna construcción firme; con una estaca clavada sobre el terreno; un clavo en un árbol, etcétera.

El procedimiento para nivelar, consiste en hacer pasar planos horizontales entre dos miras o estadales para obtener el desnivel entre estos por diferencia de lecturas; sin embargo, pocas veces se establecen bancos de nivel lo suficientemente cercanos para lograr, por ello se sitúan puntos intermedios temporales llamados Puntos de Liga o PL, que servirán como puntos de transición para trasladar el desnivel (figura 8-1).

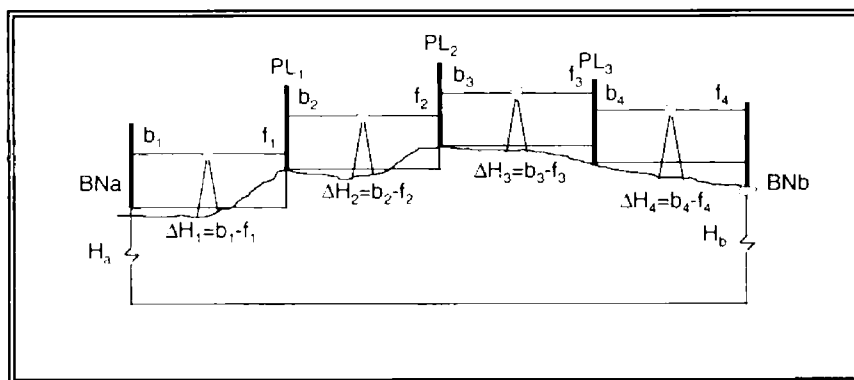


Figura 8-1. Nivelación diferencial

Las condiciones que debe reunir un punto de liga es que sea lo suficientemente estable para permitir que se efectúen las lecturas necesarias en el estadal, sin sufrir alteraciones de tipo vertical, así como permitir el giro del estadal sobre este punto, para poder leerlo en diferentes direcciones.

8.1 NIVELACIÓN DIFERENCIAL

Se efectúa cuando se desea determinar el desnivel entre dos puntos. Si se conoce la cota de uno de ellos, obviamente se podrá determinar la cota del otro. El procedimiento se ilustra en la figura 8-1, en la cual se puede ver que el desnivel entre el BNa y BNb es:

$$\begin{aligned}
 \Delta H_{ab} &= \Delta H_1 + \Delta H_2 + \Delta H_3 + \Delta H_4 \\
 &= (b_1 - f_1) + (b_2 - f_2) + (b_3 - f_3) + (b_4 - f_4) \\
 &= b_1 + b_2 + b_3 + b_4 - f_1 - f_2 - f_3 - f_4 \\
 \Delta H_{ab} &= \sum b_i - \sum f_i \qquad (8-1)
 \end{aligned}$$

donde:

ΔH_{ab} : desnivel total entre el BNa y el BNb.

$\sum b_i$: suma de lecturas hacia atrás.

$\sum f_i$: suma de lecturas hacia adelante.

Generalmente esta información se codifica en una tabla que al mismo tiempo sirve como comprobación para el cálculo del desnivel. En la tabla 8-1 se presenta un ejemplo del llenado en campo, y en la tabla 8-2, la misma nivelación diferencial calculada.


P.O.	+		-	Cota
BN a	1.245			
PL-1	0.200		0.175	
PL-2	2.987		2.609	
PL-3	3.345		2.922	
PL-4	1.115		0.974	
PL-5	0.976		0.852	
PL-6	0.765		0.668	
PL-7	1.132		0.989	
PL-8	0.182		0.159	
PL-9	2.715		2.372	
PL-10	3.041		2.656	
PL-11	1.014		0.885	
PL-12	0.887		0.775	
PL-13	0.695		0.607	
PL-14	1.029		0.899	
BN b	*****		0.144	

Tabla 8-1. Nivelación diferencial


P.O.	+		-	Cota
BN a	1.245	1675.905	*****	1674.660
PL-1	0.200	1675.930	0.175	1675.730
PL-2	2.987	1676.308	2.609	1673.321
PL-3	3.345	1676.732	2.922	1673.387
PL-4	1.115	1676.873	0.974	1675.758
PL-5	0.976	1676.996	0.852	1676.020
PL-6	0.765	1677.093	0.668	1676.328
PL-7	1.132	1677.236	0.989	1676.104
PL-8	0.182	1677.259	0.159	1677.077
PL-9	2.715	1677.603	2.372	1674.887
PL-10	3.041	1677.988	2.656	1674.947
PL-11	1.014	1678.116	0.885	1677.102
PL-12	0.887	1678.228	0.775	1677.341
PL-13	0.695	1678.316	0.607	1677.621
PL-14	1.029	1678.447	0.899	1677.418
BN b	*****	1678.467	0.144	1678.302

Tabla 8-2. Nivelación diferencial calculada

8.2 NIVELACIÓN DE PERFILES

Se realiza cuando se desea determinar el perfil de una línea específica para algún proyecto.

El procedimiento es similar al de la nivelación diferencial, solo que se deberán hacer lecturas en puntos preestablecidos, de los cuales se requiere conocer la cota para determinar el perfil de la línea. En la figura 8-4 se ilustra el procedimiento de campo. Al igual que en el caso anterior la información se codifica en forma tabular, que al mismo tiempo sirve como comprobación para el

cálculo del desnivel. En la tabla 8-3 se presenta un registro de campo, y en la tabla 8-4, se muestra la misma nivelación de perfil calculada.


P.O.	+		-	BN o PL	COTA
BN a	1.245	1232.325	*****		1231.080
1			0.182		
2			2.715		
3	3.345			3.041	
4			1.014		
5			0.887		
6			0.668		
7	1.132			0.695	
8			0.159		
9			2.372		
10			2.656		
11			0.885		
BN b				0.775	

Tabla 8-3. Nivelación de perfil

8.3 NIVELACIÓN DE TERRENOS

La nivelación de terrenos se aplica para la elaboración de planos con curvas de nivel, las cuales representan la configuración de la superficie del terreno. Estas curvas se trazan con ciertos intervalos a los que se les denomina equidistancia entre curvas de nivel.


P.O.	+		-	BN o PL	COTA
BN a	1.245	1232.325	*****		1231.080
1			0.182		1232.143
2			2.715		1229.610
3	3.345	1232.629		3.041	1229.284
4			1.014		1231.615
5			0.887		1231.742
6			0.668		1231.961
7	1.132	1233.065		0.695	1231.934
8			0.159		1232.907
9			2.372		1230.694
10			2.656		1230.409
11			0.885		1232.180
BN b				0.775	1232.290

Tabla 8-4. Nivelación de perfil calculada

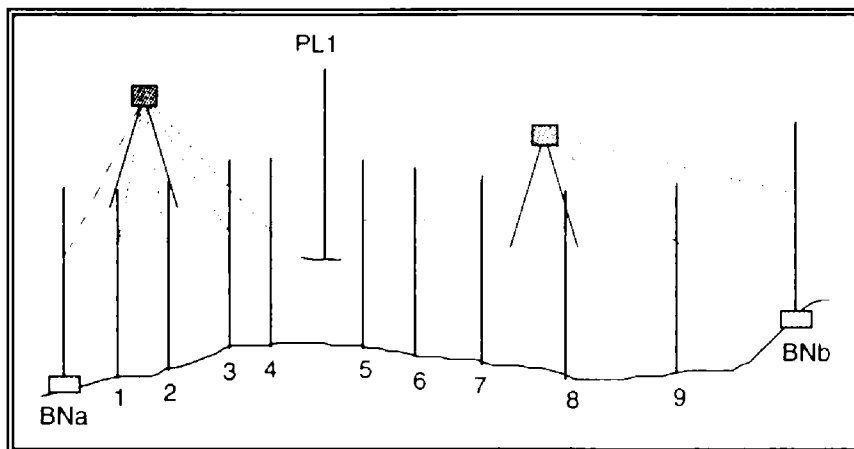


Figura 8-4. Nivelación de perfil

Las curvas de nivel se obtienen por mediciones polares, nivelando los puntos de inflexión del terreno (figura 8-5), o bien por el método de cuadrícula, en el que se determina la cota de los vértices de la misma (figura 8-6).

La selección del método empleado, estará en función de tres factores:

- 1) Lo accidentado del terreno.
- 2) La pendiente del terreno.
- 3) La separación entre las curvas.

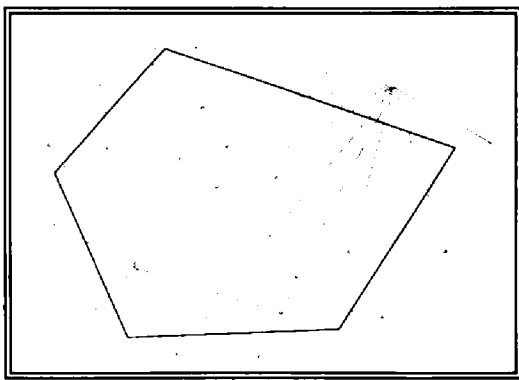


Figura 8-5. Método polar

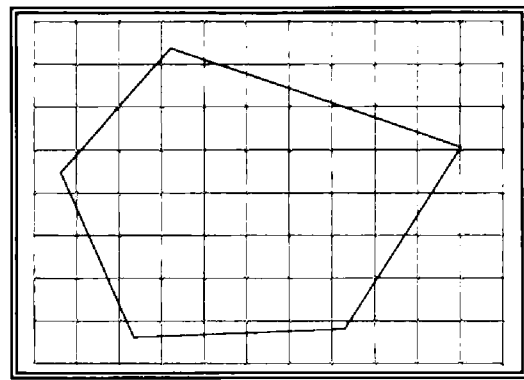


Figura 8-6. Método de cuadrícula

8.3.1 Curvas de nivel

La curva de nivel o isohipsa es el resultado de la intersección de un plano horizontal con la superficie del terreno. Por ejemplo, en un charco, el perímetro de este es una curva de nivel; en este caso, la superficie del agua es el plano horizontal y el perímetro es la intersección con el terreno.

Las curvas de nivel, se pueden determinar por medio de interpolación gráfica, analítica o a estima, dependiendo de la precisión requerida en el trabajo. En la figura 8-7, se ilustra uno de tantos dispositivos empleados en la interpolación gráfica de curvas de nivel, mientras que en la figura 8-8, se muestra la

representación por medio de curvas de nivel de la configuración de un terreno.

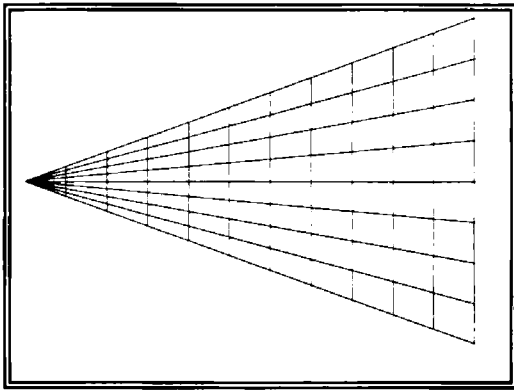


Figura 8-7. Plantilla para interpolar isohipsas

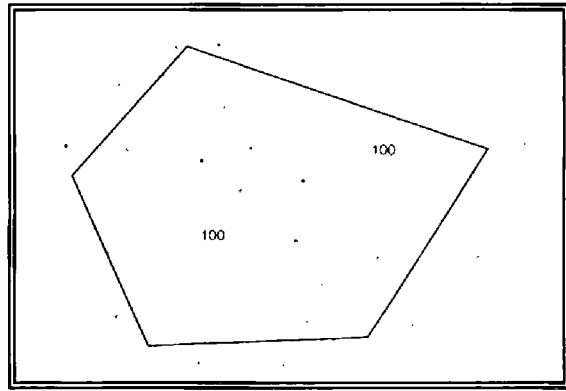


Figura 8-8. Curvas de nivel

A continuación, en las siguientes figuras se presentan gráficamente las principales características de las isohipsas.

Las isohipsas en forma concéntrica indican cimas o depresiones. Si las cotas aumentan hacia el punto concéntrico representan cimas (figura 8-9) y si van disminuyendo son depresiones (figura 8-10).

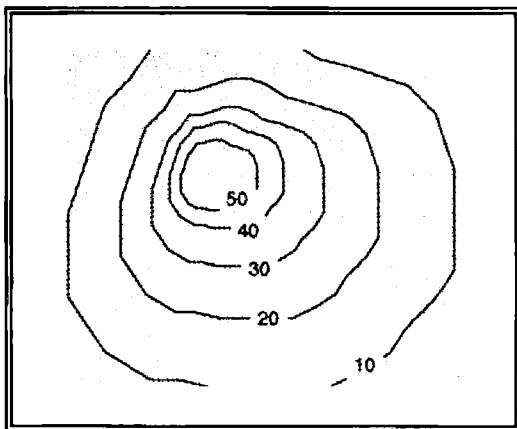


Figura 8-9. Representación de una cima

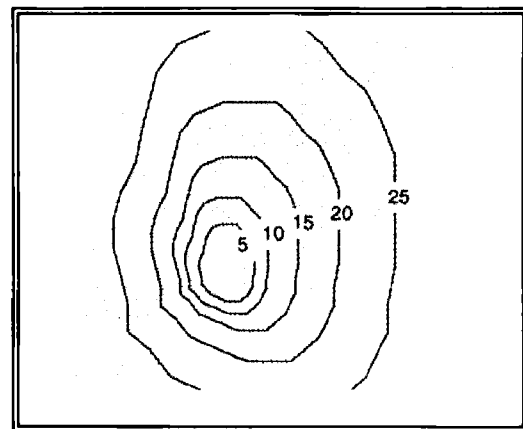


Figura 8-10. Representación de una depresión

En terrenos de pendientes uniformes la separación horizontal de las isohipsas será también uniforme (figura 8-11). En los puntos de inflexión tienden a acercarse (figura 8-12).

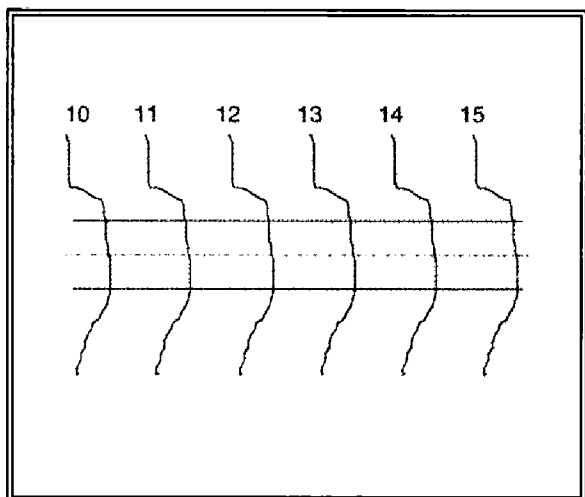


Figura 8-11. Pendiente uniforme

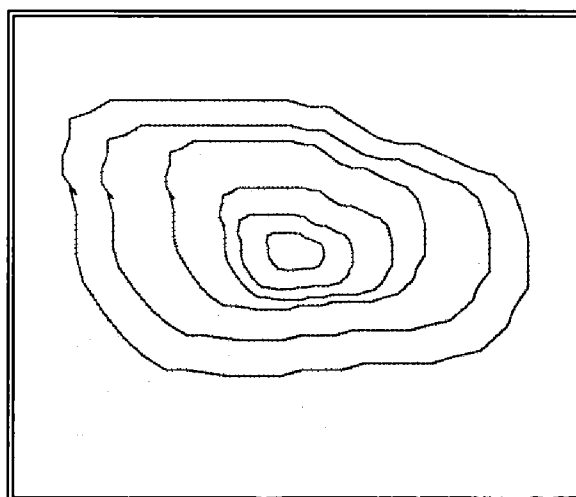


Figura 8-12. Puntos de inflexión

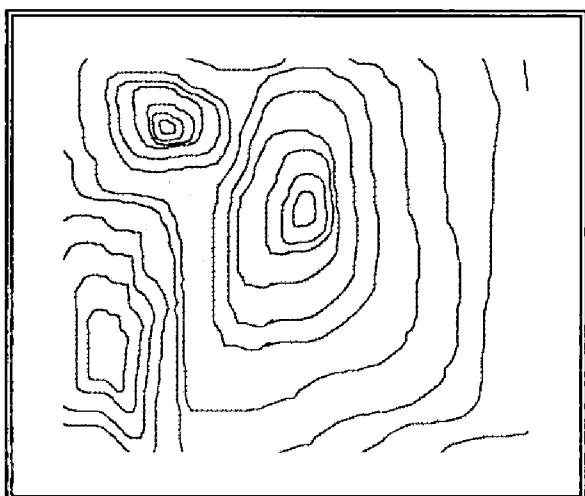


Figura 8-13. Siempre cierran

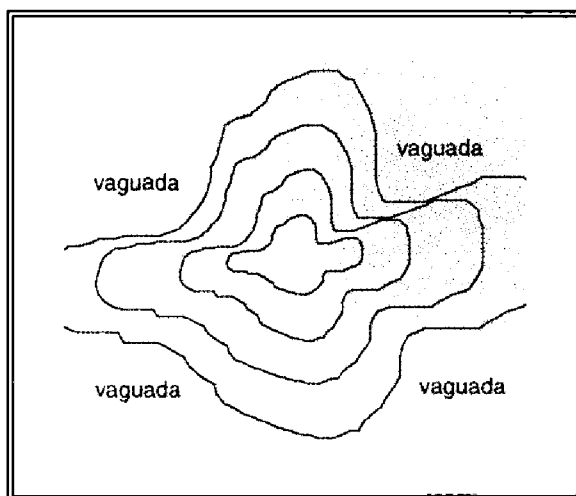


Figura 8-14. Vaguada

Todas las isohipsas cierran sobre si mismas, aun cuando no lo hagan en la porción representada (figura 8-13). En las divisorias de aguas tienden a rodear la cima, mientras que en las vaguadas se alejan de ella (figura 8-14).

8.4 NIVELACIÓN DE DETALLES

No siempre se desea conocer cual es la configuración de todo el predio, sino solamente parte de él. El método de trabajo es esencialmente el mismo que para la nivelación de terrenos, sólo que si el trabajo que se requiere no es de mucha precisión, se emplea un nivel de mano. En la figura 8-15 se ilustra el procedimiento seguido en este tipo de trabajos.

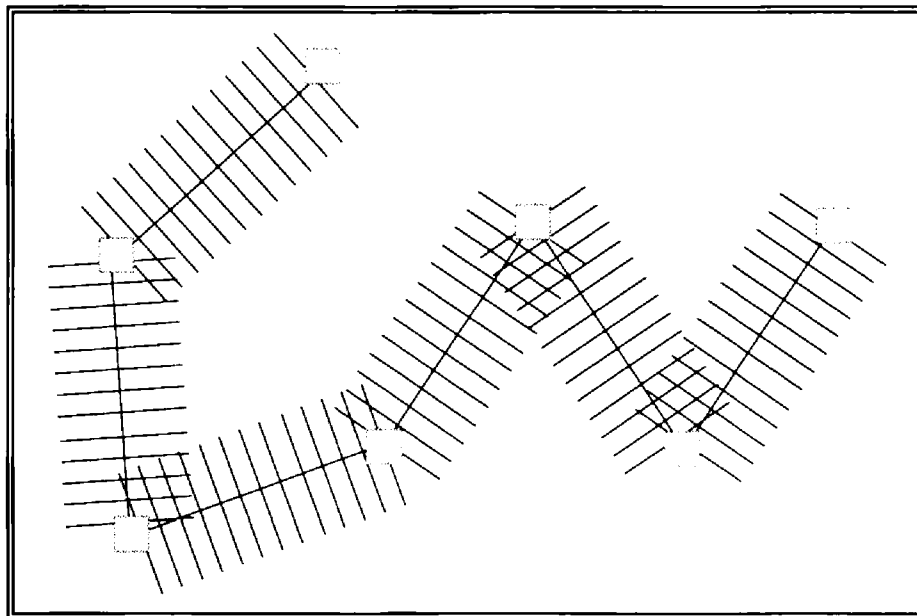


Figura 8-15. Nivelación de detalles

9. NIVELACIÓN TRIGONOMÉTRICA

9.1 CONCEPTO GENERAL

En esta clase de nivelación se miden ángulos verticales y distancias horizontales o inclinadas. Si las distancias se determinan por métodos indirectos, hay que tener presente que los distanciómetros electromagnéticos miden, generalmente, distancias inclinadas, por lo que se debe cuidar los modelos matemáticos que se empleen.

Los ángulos verticales se pueden medir a partir del horizonte (ángulo de altura) o a partir del cenit (distancia cenital), siendo estos últimos los más convenientes. El ángulo vertical debe medirse varias veces, la mitad de ellos con el círculo vertical a la derecha y la otra mitad con el círculo vertical a la izquierda; así se obtendrá una mejor estimación del valor del ángulo, eliminando además posibles errores por falta de colimación del instrumento.

9.2 OBSERVACIONES RECÍPROCAS

Considerando dos puntos sobre la superficie terrestre A y B, cuyas alturas sobre el Nivel Medio del Mar son H_a y H_b respectivamente, se desea conocer por medio de una nivelación trigonométrica la diferencia de nivel entre dichos puntos (figura 9-1).

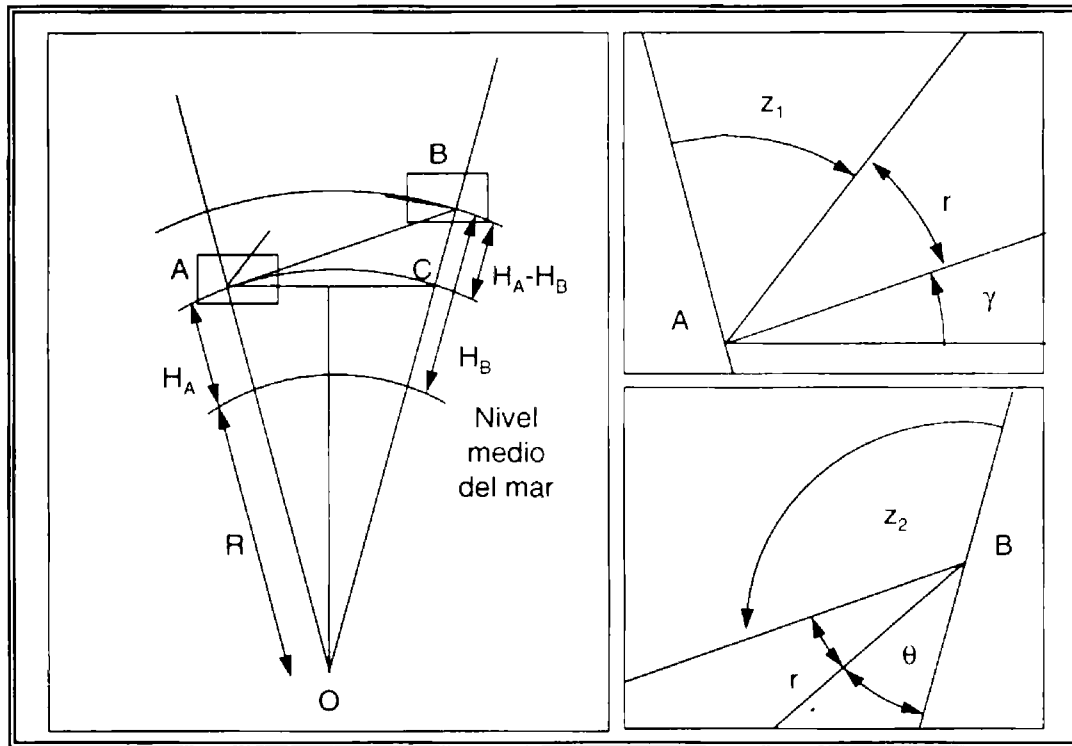


Figura 9-1. Nivelación trigonométrica. Observaciones recíprocas

Debido al efecto de refracción atmosférica la visual entre A y B no sigue la línea recta, sino el arco AB. Cuando se observa desde A, la dirección de la visual hacia B es tangente a dicho arco en el punto A. Así pues, la distancia cenital leída en A es z_1 . De igual forma, cuando se ocupa la estación B el ángulo leído es z_2 .

De la figura 9-1, se observa que aplicando la ley de senos al triángulo ACB se tiene:

$$\frac{H_B - H_A}{\text{sen } \gamma} = \frac{AC}{\text{sen } \theta}$$

$$H_B - H_A = AC \frac{\text{sen } \gamma}{\text{sen } \theta} \quad (9-1)$$

y en el triángulo ABO en función del teorema de Pitágoras se tiene:

$$AC = 2(R + H_A) \operatorname{sen} \frac{\Psi}{2} \quad (9-2)$$

Donde ψ es el ángulo subtendido en el centro de la Tierra por las dos normales en los puntos de observación.

Determinando los ángulos θ y γ , se tiene que en el punto B:

$$\theta = 180^\circ - z_2 - r \quad (9-3)$$

Del triángulo AOB:

$$\begin{aligned} \theta &= 180^\circ - [\psi + (180^\circ - z_1 - r)] \\ \theta &= -\psi + z_1 + r \end{aligned} \quad (9-4)$$

Promediando (9-3) y (9-4):

$$\theta = 90^\circ - \left(\frac{\psi + z_2 - z_1}{2} \right) \quad (9-5)$$

Para γ en el triángulo ABC:

$$\begin{aligned} \gamma + \theta + 90^\circ + \frac{\Psi}{2} &= 180^\circ \\ \gamma &= 180^\circ - 90^\circ + \frac{\Psi}{2} + z_2 - 180^\circ \\ \gamma &= -90^\circ - \frac{\Psi}{2} + z_2 + r \end{aligned} \quad (9-6)$$

Desde el punto A se tiene que:

$$\begin{aligned} \gamma &= 180^\circ - \left(z_1 + r + 90^\circ - \frac{\Psi}{2} \right) \\ \gamma &= 90^\circ - z_1 - r + \frac{\Psi}{2} \end{aligned} \quad (9-7)$$

Promediando las ecuaciones (9-6) y (9-7):

$$\gamma = \frac{z_2 - z_1}{2} \quad (9-8)$$

Sustituyendo (9-2), (9-5) y (9-8) en (9-7):

$$H_B - H_A = 2(R + H_A) \operatorname{sen} \frac{\psi}{2} \left(\frac{\operatorname{sen} \left(\frac{z_2 - z_1}{2} \right)}{\cos \left(\frac{\psi + z_2 - z_1}{2} \right)} \right) \quad (9-9)$$

Para determinar ψ se aplica la ecuación:

$$\operatorname{sen} \frac{\psi}{2} = \frac{AC}{2(R + H_A)} \quad (9-10)$$

Sustituyendo la ecuación (9-10) en (9-9) se obtiene:

$$H_B - H_A = AC \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{z_2 - z_1}{2} \right)}{\cos \left(\frac{\psi + z_2 - z_1}{2} \right)} \quad (9-11)$$

En las nivelaciones trigonométricas con propósitos topográficos no es necesario calcular de manera exacta el radio de curvatura terrestre para cada lugar, siendo suficiente tomar el valor promedio del área de trabajo.

Cuando las observaciones son recíprocas, el ángulo de refracción atmosférica se elimina en las ecuaciones (9-5) y (9-8) y por lo tanto su efecto.

9.3 OBSERVACIONES NO RECÍPROCAS

En algunas ocasiones no es posible ocupar las dos estaciones para observar las distancias cenitales en ambos sentidos (figura 9-2), entonces el problema se reduce a:

$$H_B - H_A = AC \operatorname{ctng} z = AB \cos z \quad (9-12)$$

En este caso la distancia cenital deberá corregirse por los efectos de curvatura terrestre, así como refracción atmosférica.

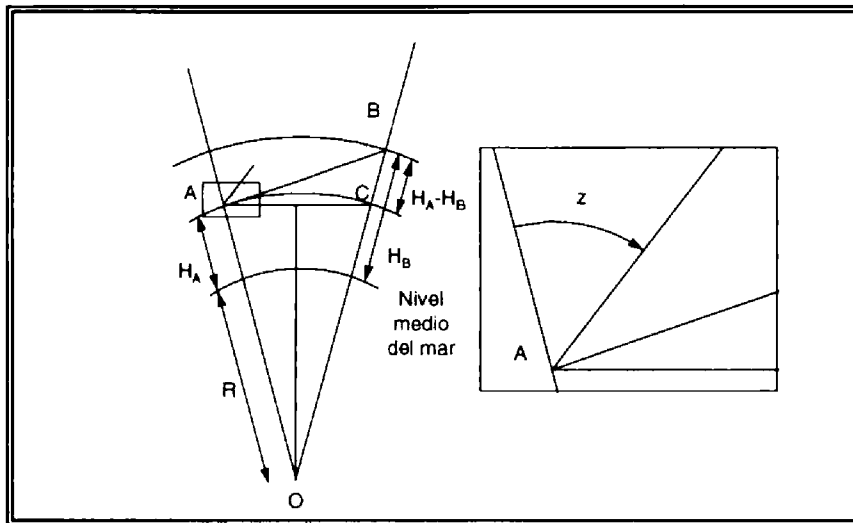


Figura 9-2. Nivelación trigonométrica.
Observaciones no recíprocas

9.4 CORRECCIONES A LAS OBSERVACIONES

9.4.1 Corrección por altura de la señal y del instrumento

En virtud de que se puede afirmar que la altura de la señal en el punto observado (T) siempre será diferente a la del instrumento en el punto de observación (t), las distancias cenitales deben corregirse por esta diferencia.

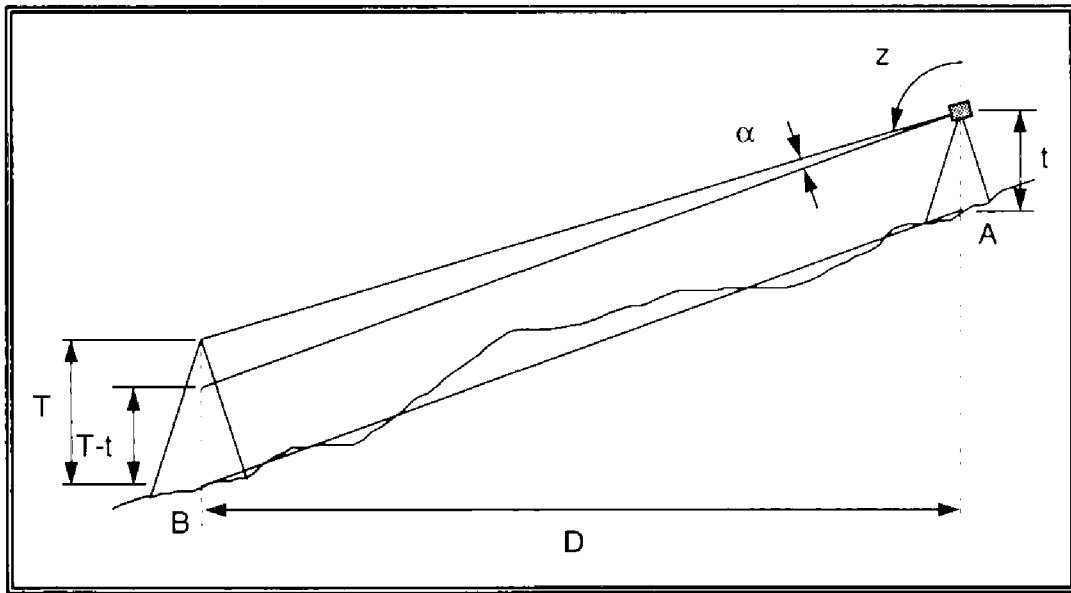


Figura 9-3. Corrección a la distancia cenital por diferencia de alturas

El valor de la corrección en segundos de arco debida a la diferencia de altura entre la señal y el instrumento, α , se deduce fácilmente a partir de la figura 9-3, estableciéndose la siguiente relación:

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{T-t}{D} \quad (9-13)$$

En caso de no corregirse la distancia cenital, entonces se debe corregir la diferencia de elevación por la diferencia de alturas entre T y t. De la figura 9-4 se observa:

$$H_B - H_A = H_1 + t - T \quad (9-14)$$

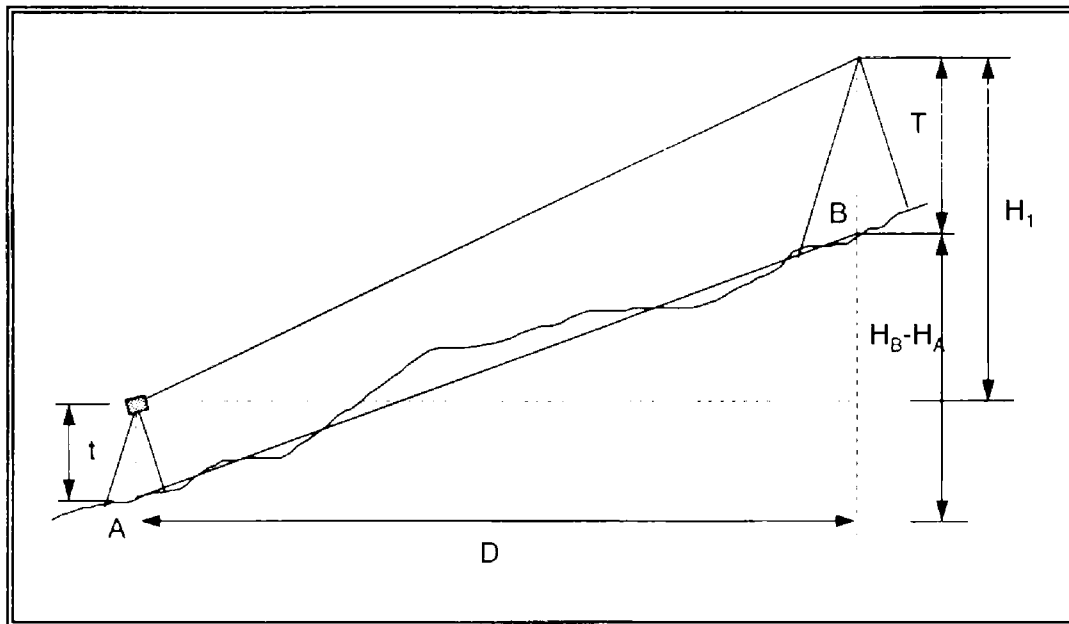


Figura 9-4. Corrección al desnivel por diferencia de alturas

9.4.2 Corrección por curvatura terrestre y refracción atmosférica

En el capítulo 6 se presenta el desarrollo de los modelos matemáticos necesarios para corregir por estos efectos la determinación de diferencias de nivel. Es importante mencionar que para el caso de la nivelación trigonométrica estos efectos son más significativos que para la nivelación diferencial, debido principalmente a que la distancia entre el instrumento y la señal, es generalmente muchas veces mayor, así como a que la diferencia de nivel entre los dos puntos también es grande y por lo tanto las condiciones atmosféricas en los extremos también lo será, por lo que la visual cruzara varias capas con diferentes densidades.

9.5 CÁLCULO DE DESNIVELES

Para ejemplificar el cálculo de desniveles a partir de una nivelación trigonométrica, en la tabla 9-1 se presenta el caso de una nivelación trigonométrica con observaciones no recíprocas, resuelta en forma tabular. Cabe mencionar que esta solución se presenta exclusivamente para ilustrar la secuencia de cálculo, pero debe aclararse que este proceso, preferentemente, se debe realizar por medio de un dispositivo de cálculo electrónico.

LADO	/	✓	z	cos z	✓	H _B -H _A	CR	ΔH	t	T	Est	Cota
de	a	-	° ' "	ctng z								
237	238	74.651	89 31 17	0.008353243		0.6236	0.0000	0.6236	1.37	1.40	237	1253.120
238	239	178.090	89 16 33	0.012638756		2.2508	0.0002	2.2510	1.52	1.40	238	1253.714
239	240	12.792	90 57 25	-0.016701055		-0.2136	0.0000	-0.2136	1.59	1.60	239	1256.085
240	241	199.483	90 31 58	-0.009298592		-1.8549	0.0003	-1.8546	1.47	1.29	240	1255.861
241	237	222.666	90 07 08	-0.002075001		-0.4620	0.0003	-0.4617	1.12	0.98	241	1254.186
											237	1253.865

Tabla 9-1. Nivelación trigonométrica no recíproca

9.6 PROPAGACIÓN DE ERRORES

Con la introducción de las estaciones totales, se ha incrementado la medición de diferencias de elevación usando métodos trigonométricos. Sin embargo en este procedimiento, debido a que las distancias hacia atrás y hacia adelante, no pueden balancearse adecuadamente, es importante que los efectos sistemáticos de curvatura terrestre y refracción atmosférica, así como la desviación de la línea de colimación sean modelados. De

la figura 9-2, se puede establecer que la diferencia de elevación entre dos puntos es:

$$\Delta H = t + AB \cos z + C_{cr} - T \quad (9-15)$$

Donde C_{cr} es el efecto combinado de curvatura terrestre y refracción atmosférica. Sustituyendo la ecuación (6-3) en (9-15), se tiene:

$$\Delta H = t + AB \cos z - 0.0067 \left(\frac{AB \cos z}{1000} \right)^2 - T \quad (9-16)$$

Aplicando la fórmula de propagación de los errores (2-26) a la ecuación (9-16):

$$\sigma_{\Delta H}^2 = \left(\frac{\partial \Delta H}{\partial t} \right)^2 \sigma_t^2 + \left(\frac{\partial \Delta H}{\partial AB} \right)^2 \sigma_{AB}^2 + \left(\frac{\partial \Delta H}{\partial z} \right)^2 \sigma_z^2 + \left(\frac{\partial \Delta H}{\partial T} \right)^2 \sigma_T^2 \quad (9-17)$$

Donde las derivadas parciales son:

$$\frac{\partial \Delta H}{\partial t} = 1 \quad (9-18)$$

$$\frac{\partial \Delta H}{\partial AB} = \left(\cos z - \frac{0.0067 AB \cos^2 z}{500000} \right) \quad (9-19)$$

$$\frac{\partial \Delta H}{\partial z} = -AB \cos z \left(\frac{0.0067 AB \cos z}{500000} + 1 \right) \quad (9-20)$$

$$\frac{\partial \Delta H}{\partial T} = -1 \quad (9-21)$$

Introduciendo las ecuaciones (9-18) a (9-21) junto con sus errores estándar asociados a la ecuación (9-17), el error total en la nivelación trigonométrica será:

$$\sigma_{\Delta H} = \left\{ \begin{array}{l} \sigma_l^2 + \left[\left(\cos z + \frac{0.0067 AB \sin^2 z}{500000} \right) \sigma_{AB} \right]^2 + \\ -AB \sin z \left[\left(\frac{0.0067 AB \cos z}{500000} + 1 \right) \frac{\sigma_z}{\rho} \right]^2 + \sigma_T^2 \end{array} \right\}^{1/2} \quad (9-21)$$

donde:

ρ : es el factor de conversión de segundo a radianes.

En la estimación del error del ángulo cenital intervienen varias fuentes de error. Estas incluyen la habilidad del operador para realizar la puntería y la lectura, la exactitud del compensador vertical o la destreza del operador para centrar la burbuja del nivel, así como la sensibilidad del compensador o del nivel. Debe recordarse que para un mejor resultado, los ángulos cenitales se deben medir en ambas posiciones del círculo. Considerando todos estos factores, el error estándar estimado para el ángulo cenital medido en ambas posiciones del círculo será:

$$\sigma_z = \left(\frac{2\sigma_l^2 + 2\sigma_p^2 + 2\sigma_B^2}{n} \right)^{1/2} \quad (9-22)$$

donde:

σ_l : error en la lectura del círculo.

σ_p : error en la puntería.

σ_B : error en el compensador vertical o en la nivelación de la burbuja.

n : número de veces que se midió en el ángulo cenital en ambas posiciones del círculo.

Para goniómetros digitales o estaciones totales, la fórmula adecuada será:

$$\sigma_z = \left(\frac{4\sigma_{DIN}^2 + 2\sigma_B^2}{n} \right)^{1/2} \quad (9-23)$$

donde:

σ_{DIN} : es el valor DIN18723 del instrumento.

y los otros términos tienen el mismo significado descrito anteriormente.

De igual forma la distancia inclinada **AB**, tiene asociados una serie de factores que influyen en la determinación del error de ella, por lo que la evaluación del valor del error estándar de la distancia se debe realizar por medio de la fórmula:

$$\sigma_{AB} = \left(a^2 + (bS)^2 + \sigma_{c_p}^2 + \sigma_{c_i}^2 \right) \quad (9-24)$$

Mientras que σ_T y σ_t estarán en función de la resolución y calidad del longímetro empleado en la determinación de T y t.

Analizando por separado cada una de las fuentes de error de la nivelación trigonométrica, se tiene que el error estándar de un ángulo cenital medido con un goniómetro de precisión y en condiciones favorables será un poco mayor a dos segundos de arco, lo que contribuye al error en 12 partes por millón (ppm) del cuadrado de la distancia medida.

El error estándar de la distancia estará en función del instrumento EDM empleado, pero en promedio se puede considerar que contribuye en 5 ppm.

En el caso de los errores estándares en la determinación de la altura del instrumento y de la señal, se puede considerar que será menor a 5 milímetros en cada una de las alturas.

10. CÁLCULO Y AJUSTE DE NIVELACIONES

Como se ha venido repitiendo, siempre que se mide una cantidad física se cometen errores inevitables. El caso de la medición de desniveles no es de ninguna manera una excepción, por lo que al momento de expresar sus resultados se deberá tomar en cuenta la ocurrencia de dichos errores.

Aparentemente, el cálculo de una nivelación es un conjunto sencillo de operaciones aritméticas básicas, que finalmente dan como resultado el desnivel entre los puntos involucrados en el levantamiento. Así de la figura 10-1, se tiene que el desnivel ΔH no es más que el desnivel observado entre los puntos A y B; pero como en todo trabajo topográfico este valor deberá ser lo suficientemente verificado y ajustado, de acuerdo a las condiciones a cumplir o parámetros a satisfacer.

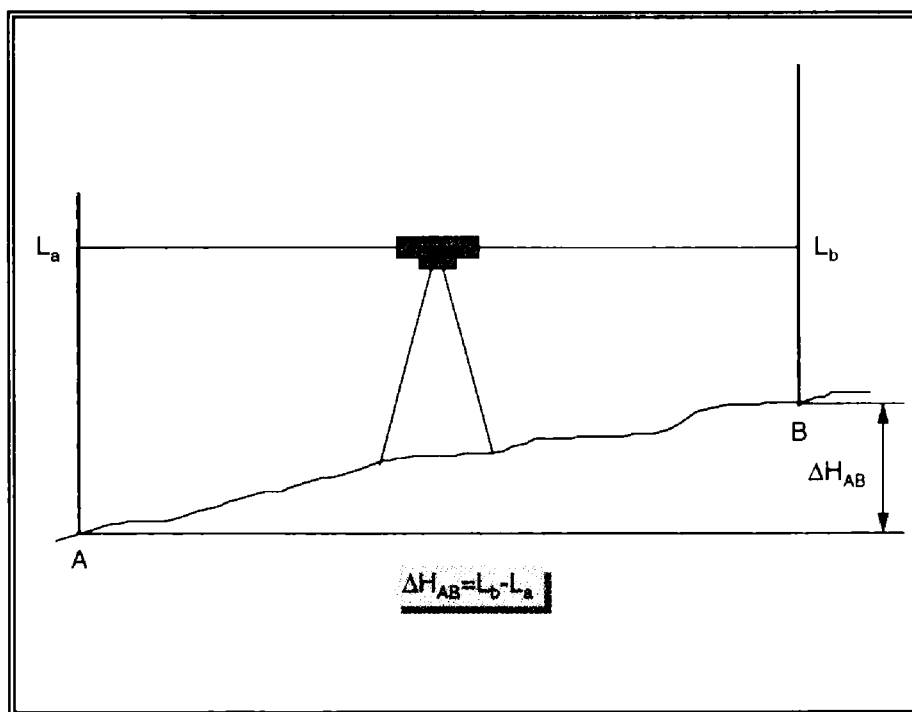


Figura 10-1. Desnivel

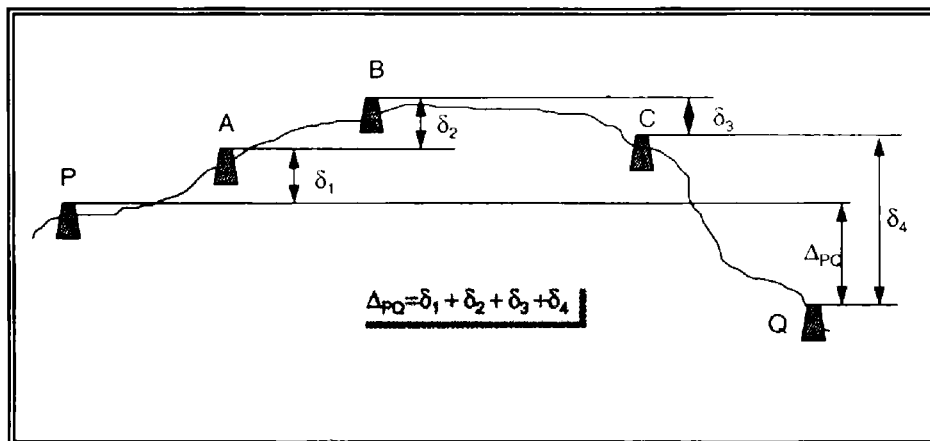


Figura 10-2. Nivelación

En todo caso el cálculo del desnivel entre dos puntos (Bancos de Nivel) será simplemente la diferencia entre la suma de visuales hacia atrás, con las visuales hechas hacia adelante, según se estableció en el capítulo 8. Así pues, la diferencia entre dos bancos extremos, será la suma algebraica de los desniveles entre los bancos consecutivos (figura 10-2), donde los desniveles entre los bancos, hasta este punto se consideran como “observados”, aún cuando estos sean resultado de un proceso previo. Estos desniveles tendrán que ser ajustados, según se dijo párrafos arriba, de acuerdo a ciertos parámetros.

A continuación se presentan tres casos posibles de conformación geométrica de trabajos de nivelación y los ajustes procedentes.

10.1 CÁLCULO Y AJUSTE DE LÍNEAS

Se le llama línea de nivelación (figura 10-3), a aquella que tiene un desarrollo abierto, ya sea ligado o no en sus extremos con bancos preestablecidos. De hecho pueden existir tres casos:

- a) Línea sin liga alguna. Se utiliza cuando solo interesa conocer el desnivel entre dos puntos y no su altitud. En este caso el único ajuste posible, si es que se realizan observaciones

redundantes, es obtener el valor más probable de cada una de ellas y con estas calcular el desnivel.

- b) Línea ligada en uno de sus extremos. En cuanto a su tratamiento es similar al anterior, sólo que en este caso es conocido el valor de alguno de sus bancos extremos y entonces será posible conocer la altitud de todos los bancos adicionales.
- c) Línea ligada en sus dos extremos. En este caso, además de conocer los desniveles observados entre bancos, se conocen las altitudes de los extremos, lo que permite establecer mayor cantidad de parámetros para un mejor ajuste. Se recomienda efectuar siempre que sea posible, un ajuste riguroso por mínimos cuadrados. El cual queda implícitamente considerado en el ajuste de redes.

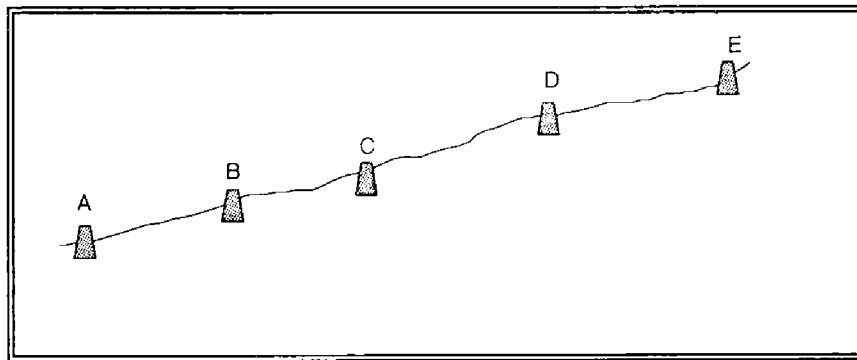


Figura 10-3. Línea de nivelación

10.2 CÁLCULO Y AJUSTE DE CIRCUITOS

Se entiende por circuito (figura 10-4) a la conformación de una línea de nivelación que inicia y termina en el mismo banco de nivel.

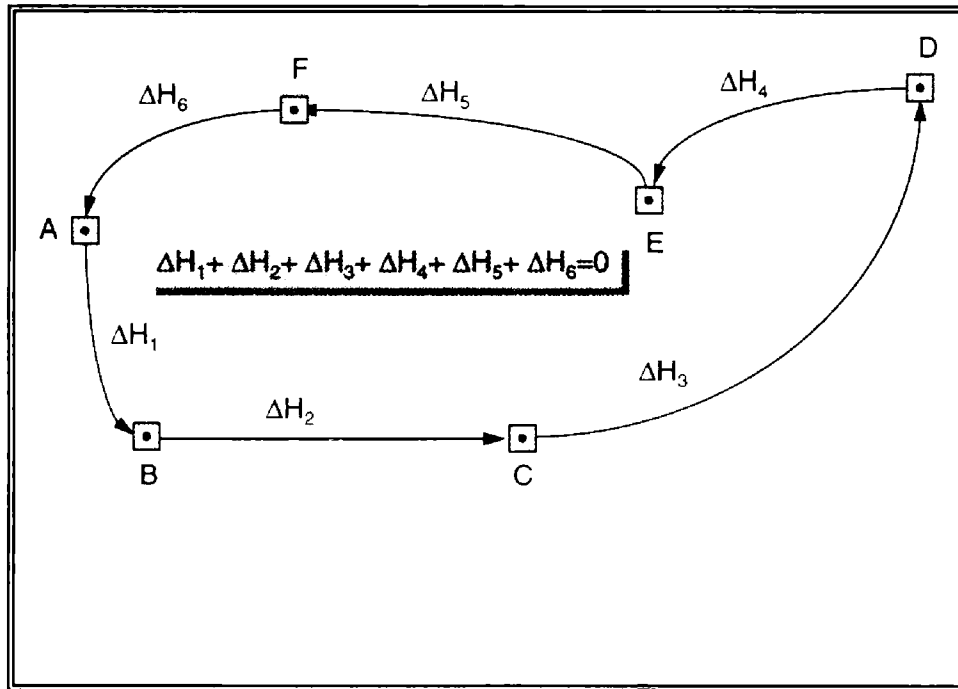


Figura 10-4. Circuito de nivelación

En este caso, teóricamente la suma algebraica de los desniveles deberá ser igual a cero, pero debido a los errores, normalmente accidentales en esta etapa del cálculo, esto nunca ocurre. Se deduce entonces que es necesario ajustar o compensar los valores observados para cumplir la condición establecida, lo que evidentemente repercutirá en el valor a priori calculado para los bancos de nivel que conforman el circuito. Por estar también este caso implícito en el de redes se tratará el ajuste de las observaciones en la siguiente sección.

10.3 CÁLCULO Y AJUSTE DE REDES

Se entiende por red de nivelación a un conjunto de líneas y circuitos enlazados entre sí. Es el caso más complejo de un proyecto de nivelación y el que más problemas puede causar en el ajuste, dado que se tienen diversas rutas alternativas para calcular el valor de un banco de nivel determinado. En el caso ilustrado en

la figura 10-5, se tiene, por ejemplo, las siguientes alternativas para calcular la cota del banco de nivel B:

$$H_B = H_P + \Delta H_1 + \Delta H_5$$

$$H_B = H_Q + \Delta H_2 + \Delta H_5$$

$$H_B = H_Q + \Delta H_6$$

$$H_B = H_Q + \Delta H_3 + \Delta H_7$$

$$H_B = H_P + \Delta H_4 + \Delta H_7$$

y así se podría establecer para los demás bancos establecidos en la red. Ante esta diversidad de soluciones, la mejor opción es aplicar el método de mínimos cuadrados que, como se mencionó anteriormente, proporciona una solución única, libre de la incertidumbre de otros métodos.

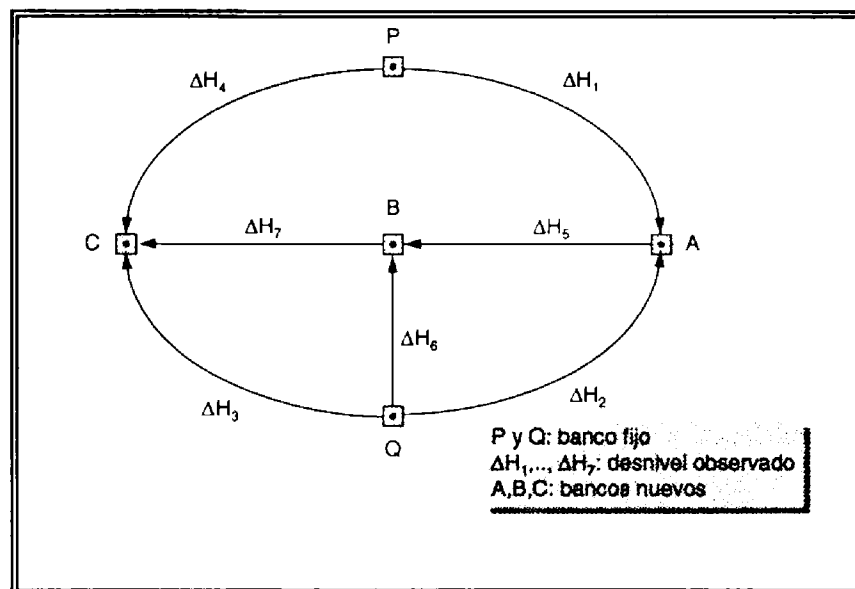


Figura 10-5. Red de nivelación

En el ajuste de nivelaciones por mínimos cuadrados, es común asignar el peso relativo de las observaciones como inversamente proporcional a la longitud de la distancia entre bancos de nivel; aunque por comodidad, muchas veces se multiplica por una

constante para un manejo más sencillo. Sin embargo, el peso se debe asignar de acuerdo a los criterios establecidos en el capítulo 8 y desde luego, la matriz de peso, puede multiplicarse por un valor constante.

El sistema de ecuaciones de observación para el ajuste expresado algebraicamente, es el siguiente:

$$\begin{aligned}
 p_1(a_1A + b_1B + \dots + n_1N) &= p_1(l_1 + v_1) \\
 p_2(a_2A + b_2B + \dots + n_2N) &= p_2(l_2 + v_2) \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 p_m(a_mA + b_mB + \dots + n_mN) &= p_m(l_m + v_m)
 \end{aligned}
 \tag{10-1}$$

donde:

p_i : es el peso de la observación.

a_i, b_i, \dots, n_i : coeficientes que relacionan las incógnitas.

A, B, \dots, N : incógnitas.

l_i : observaciones.

v_i : residuos.

El sistema de ecuaciones lineales representado por (10-1), expresado en forma matricial es:

$$PAX = P(L + V)
 \tag{10-2}$$

donde:

P: matriz de pesos.

A: matriz de diseño.

X: vector de incógnitas.

L: vector de observaciones.

V: vector de residuos.

El principio de mínimos cuadrados establece que:

$$\sum pv^2 = (p_1v_1^2 + p_2v_2^2 + \dots + p_nv_n^2) = \text{mínimo} \quad (10-3)$$

Por lo que el cuadrado de los residuos, determinado del sistema de ecuaciones (10-1) será:

$$\begin{aligned} p_1v_1^2 &= p_1(a_1A + b_1B + \dots + n_1N - l_1)^2 \\ p_2v_2^2 &= p_2(a_2A + b_2B + \dots + n_2N - l_2)^2 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ p_mv_m^2 &= p_m(a_mA + b_mB + \dots + n_mN - l_m)^2 \end{aligned} \quad (10-4)$$

Sustituyendo el sistema de ecuaciones lineales (10-4) en (10-3):

$$\begin{aligned} \sum v^2 &= p_1(a_1A + b_1B + \dots + n_1N - l_1)^2 \\ &+ p_2(a_2A + b_2B + \dots + n_2N - l_2)^2 + \dots \\ &+ p_m(a_mA + b_mB + \dots + n_mN - l_m)^2 \end{aligned} \quad (10-5)$$

La condición de mínimo se obtiene cuando la derivada de la función es igual a cero, por lo que las derivadas parciales de la función serán:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sum v^2}{\partial A} &= 2p_1(a_1A + b_1B + \dots + n_1N - l_1)a_1 \\ &+ 2p_2(a_2A + b_2B + \dots + n_2N - l_2)a_2 + \dots \\ &+ 2p_m(a_mA + b_mB + \dots + n_mN - l_m)a_m \end{aligned} \quad (10-6a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sum v^2}{\partial B} &= 2p_1(a_1A + b_1B + \dots + n_1N - l_1)b_1 \\ &+ 2p_2(a_2A + b_2B + \dots + n_2N - l_2)b_2 + \dots \\ &+ 2p_m(a_mA + b_mB + \dots + n_mN - l_m)b_m \end{aligned} \quad (10-6b)$$

⋮

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sum v^2}{\partial N} &= 2p_1(a_1A + b_1B + \dots + n_1N - l_1)n_1 \\ &+ 2p_2(a_2A + b_2B + \dots + n_2N - l_2)n_2 + \dots \\ &+ 2p_m(a_mA + b_mB + \dots + n_mN - l_m)n_m \end{aligned} \quad (10-6c)$$

Dividiendo el sistema de ecuaciones (10-6) por dos y reagrupando términos se llega a:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^m (p_i a_i^2) \mathbf{A} + \sum_{i=1}^m (p_i a_i b_i) \mathbf{B} + \dots + \sum_{i=1}^m (p_i a_i n_i) \mathbf{N} &= \sum_{i=1}^m (p_i a_i l_i) \\
 \sum_{i=1}^m (p_i b_i a_i) \mathbf{A} + \sum_{i=1}^m (p_i b_i^2) \mathbf{B} + \dots + \sum_{i=1}^m (p_i b_i n_i) \mathbf{N} &= \sum_{i=1}^m (p_i b_i l_i) \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 \sum_{i=1}^m (p_i n_i a_i) \mathbf{A} + \sum_{i=1}^m (p_i n_i b_i) \mathbf{B} + \dots + \sum_{i=1}^m (p_i n_i^2) \mathbf{N} &= \sum_{i=1}^m (p_i n_i l_i)
 \end{aligned} \tag{10-7}$$

El sistema de ecuaciones (10-7) se conoce como ecuaciones normales, el cual expresado en notación matricial será:

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{X} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{L} \tag{10-8}$$

y los elementos están formados por:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & p_m \end{bmatrix} \tag{10-9}$$

$$A = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m a_i^2 & \sum_{i=1}^m a_i b_i & \dots & \sum_{i=1}^m a_i n_i \\ \sum_{i=1}^m b_i a_i & \sum_{i=1}^m b_i^2 & \dots & \sum_{i=1}^m b_i n_i \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum_{i=1}^m n_i a_i & \sum_{i=1}^m n_i b_i & \dots & \sum_{i=1}^m n_i^2 \end{bmatrix} \quad (10-10)$$

$$X = \begin{bmatrix} A \\ B \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \quad (10-11)$$

$$L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ l_m \end{bmatrix} \quad (10-12)$$

Usando los principios del álgebra matricial, la ecuación (10-8) se resuelve de la siguiente manera:

$$(A^T P A)^{-1} (A^T P A) X = (A^T P A)^{-1} A^T P L \quad (10-13)$$

$$I X = (A^T P A)^{-1} A^T P L \quad (10-14)$$

En la ecuación (10-14) I es la matriz identidad, con lo que finalmente se tiene:

$$X = (A^T P A)^{-1} A^T P L \quad (10-15)$$

que es la solución a las incógnitas del sistema. Retomando la ecuación (10-2), el vector de residuos V estará dado por:

$$PAX = P(L + V) \quad (10-2)$$

$$PAX = PL + PV$$

$$PAX - PL = PV$$

$$PV = P(AX - L) \quad (10-16)$$

Premultiplicando la ecuación (10-16) por la inversa de la matriz de pesos, se llega a:

$$P^{-1}PV = P^{-1}P(AX - L)$$

$$IV = I(AX - L)$$

$$V = (AX - L) \quad (10-17)$$

Una vez realizado el ajuste, es importante conocer la estimación de los errores en las observaciones ajustadas y de las cantidades derivadas de los valores ajustados. Partiendo de la solución de los valores ajustados con la ecuación (10-15), X contiene los valores más probables de las incógnitas, mientras que los valores verdaderos

son X_v . Los valores verdaderos difieren de los valores más probables por una pequeña cantidad de tal forma que se tiene:

$$X + \Delta X = X_v \quad (10-18)$$

donde ΔX representa el error en los valores ajustados.

Considerando ahora un pequeño incremento, ΔL , en los valores observados, el cual llevará a X a su valor verdadero, la ecuación (10-15) será:

$$X + \Delta X = (A^T P A)^{-1} A^T P (L + \Delta L) \quad (10-19)$$

Desarrollando el producto de la ecuación (10-19), se tiene:

$$X + \Delta X = (A^T P A)^{-1} A^T P L + (A^T P A)^{-1} A^T P \Delta L \quad (10-20)$$

Sustituyendo (10-15) en (10-20) y eliminando términos iguales, se tiene que ΔX es:

$$\Delta X = (A^T P A)^{-1} A^T P \Delta L \quad (10-21)$$

Aceptando que ΔL son los errores en las observaciones, la ecuación (10-21) se puede escribir como:

$$\Delta X = (A^T P A)^{-1} A^T P V \quad (10-22)$$

Haciendo:

$$B = (A^T P A)^{-1} A^T P \quad (10-23)$$

y sustituyendo la ecuación (10-23) en (10-22):

$$\Delta X = B V \quad (10-24)$$

Postmultiplicando la ecuación (10-24) por sus respectivas traspuestas se obtiene:

$$\Delta X \Delta X^T = (B V)(B V)^T \quad (10-25)$$

Aplicando las propiedades de la traspuesta a (10-25) se tiene:

$$\Delta X \Delta X^T = B V V^T B^T \quad (10-26)$$

Realizando los productos, se tiene que el lado izquierdo de la ecuación (10-26) es:

$$\Delta X \Delta X^T = \begin{bmatrix} \Delta x_1^2 & \Delta x_1 \Delta x_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \Delta x_1 \Delta x_n \\ \Delta x_2 \Delta x_1 & \Delta x_2^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \Delta x_2 \Delta x_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Delta x_n \Delta x_1 & \Delta x_n \Delta x_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \Delta x_n^2 \end{bmatrix} \quad (10-27)$$

mientras que el lado derecho será:

$$B \begin{bmatrix} v_1^2 & v_1 v_2 & \cdot & \cdot & \cdot & v_1 v_n \\ v_2 v_1 & v_2^2 & \cdot & \cdot & \cdot & v_2 v_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_n v_1 & v_n v_2 & \cdot & \cdot & \cdot & v_n^2 \end{bmatrix} B^T \quad (10-28)$$

Reconociendo que es posible realizar el proceso de medición tantas veces como se desee, por ejemplo n veces, y que en cada ocasión se obtendrá una solución ligeramente diferente, obteniéndose un conjunto de soluciones X diferente en cada ocasión, el promedio de estas soluciones será:

$$\frac{1}{n} \sum \Delta X \Delta X^T = \begin{bmatrix} \frac{\sum \Delta x_1^2}{n} & \frac{\sum \Delta x_1 \Delta x_2}{n} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\sum \Delta x_1 \Delta x_n}{n} \\ \frac{\sum \Delta x_2 \Delta x_1}{n} & \frac{\sum \Delta x_2^2}{n} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\sum \Delta x_2 \Delta x_n}{n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\sum \Delta x_n \Delta x_1}{n} & \frac{\sum \Delta x_n \Delta x_2}{n} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\sum \Delta x_n^2}{n} \end{bmatrix} \quad (10-29)$$

Si el proceso de medición se repitió un número de veces grande, los elementos de la ecuación (10-29) serán las varianzas y covarianzas, con lo que la ecuación (10-29) se puede escribir como:

$$S_X^2 = \begin{bmatrix} S_{x_1}^2 & S_{x_1x_2} & \cdot & \cdot & \cdot & S_{x_1x_n} \\ S_{x_2x_1} & S_{x_2}^2 & \cdot & \cdot & \cdot & S_{x_2x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{x_nx_1} & S_{x_nx_2} & \cdot & \cdot & \cdot & S_{x_n}^2 \end{bmatrix} \quad (10-30)$$

Considerando también el conjunto de n observaciones, la ecuación (10-28) será:

$$B \begin{bmatrix} \frac{\sum v_1^2}{n} & \frac{\sum v_1 v_2}{n} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\sum v_1 v_n}{n} \\ \frac{\sum v_2 v_1}{n} & \frac{\sum v_2^2}{n} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\sum v_2 v_n}{n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\sum v_n v_1}{n} & \frac{\sum v_n v_2}{n} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\sum v_n^2}{n} \end{bmatrix} B^T \quad (10-31)$$

Los elementos de la diagonal principal de la ecuación (10-28) son las varianzas de las observaciones, mientras que los elementos fuera de ellas son las covarianzas; esto es, la correlación que existe entre las observaciones. La ecuación (10-31) se puede escribir como:

$$\mathbf{B} \begin{bmatrix} S_{l_1}^2 & S_{l_1 l_2} & \cdot & \cdot & \cdot & S_{l_1 l_n} \\ S_{l_2 l_1} & S_{l_2}^2 & \cdot & \cdot & \cdot & S_{l_2 l_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{l_n l_1} & S_{l_n l_2} & \cdot & \cdot & \cdot & S_{l_n}^2 \end{bmatrix} \mathbf{B}^T \quad (10-32)$$

Retomando la matriz definida por (10-9), se tiene que el peso de una observación es el grado de confianza que se tiene en ella, con lo que el peso de la observación se emplea para controlar el tamaño de las correcciones que se aplicaran a la observación en un ajuste. Por lo tanto, al tenerse una observación con mayor precisión, su peso será mayor, o en otras palabras, su varianza será menor. De lo anterior se puede establecer que los pesos son inversamente proporcionales a las varianzas; así, el tamaño de la corrección será también inversamente proporcional a los pesos.

En situaciones donde las mediciones están correlacionadas, los pesos están relacionados con la inversa de la matriz de covarianzas y ya que los pesos son relativos, frecuentemente las varianzas y covarianzas se reemplazan por cofactores. Un cofactor de relaciona con su covarianza con la ecuación:

$$q_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_0^2} \quad (10-33)$$

donde:

q_{ij} : es el cofactor de la medición ij .

σ_{ij} : es la covarianza de la medición ij .

σ_0^2 : es la varianza de peso unitario, la cual se emplea para escalar los valores de las covarianzas.

La ecuación (10-33) en notación matricial se expresa como:

$$Q = \frac{1}{\sigma_0^2} \Sigma \quad (10-34)$$

donde:

Q : es la matriz de cofactores.

La estructura y elementos de la matriz Σ son:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{x_1}^2 & \sigma_{x_1x_2} & \cdot & \cdot & \cdot & \sigma_{x_1x_n} \\ \sigma_{x_2x_1} & \sigma_{x_2}^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \sigma_{x_2x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sigma_{x_nx_1} & \sigma_{x_nx_2} & \cdot & \cdot & \cdot & \sigma_{x_n}^2 \end{bmatrix} \quad (10-35)$$

Con lo que la matriz de pesos será:

$$P = Q^{-1} = \sigma_0^2 \Sigma^{-1} \quad (10-36)$$

Para medición no correlacionadas, las covarianzas son igual a cero y por lo tanto la matriz Σ será una matriz diagonal. Por lo tanto Q también será una matriz diagonal, como la mostrada en la ecuación (10-9), resultando:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{x_1}^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{x_2}^2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{x_n}^2} \end{bmatrix} \quad (10-37)$$

En base a la ecuación (10-31), se puede establecer que cualquier observación independiente con varianza igual a σ_i^2 tiene un peso de:

$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2} \quad (10-38)$$

Si una observación tiene un peso $p_i=1$, entonces $\sigma_0^2 = \sigma_i^2$ o $\sigma_0^2 = 1$. Por ello σ_0^2 recibe el nombre de varianza de una observación de peso unitario, o simplemente varianza de peso unitario.

Despejando σ_i^2 de (10-38), reemplazando σ_0 por S_0 y sustituyendo su valor en (10-32) se obtiene:

$$S_0^2 B P^{-1} B^T \quad (10-39)$$

Sustituyendo (10-23) en (10-39) se obtiene:

$$S_0^2 \left[(A^T P A)^{-1} A^T P \right] P^{-1} \left[(A^T P A)^{-1} A^T P \right]^T \quad (10-40)$$

Después de realizar algunas operaciones la ecuación (10-40) se reduce a:

$$S_0^2 (A^T P A) \quad (10-41)$$

La ecuación (10-30) es el lado derecho de la ecuación (10-26), por lo que la ecuación (10-41) es el lado derecho; esto es:

$$S_x^2 = S_0^2 (A^T P A)^{-1} = S_0^2 N^{-1} = S_0^2 Q_{xx} \quad (10-42)$$

En el ajuste por mínimos cuadrados, la matriz Q_{xx} de la ecuación (10-42) se conoce como la matriz de varianzas y covarianzas, o simplemente como matriz de varianzas. Cuando los elementos de la diagonal principal se multiplican por S_0^2 se obtiene la varianza de las cantidades ajustadas; mientras que al multiplicar por S_0^2 los elementos que están fuera de ella generan las covarianzas. De la ecuación (10-42), la desviación estándar de un parámetro desconocido, se calcula de:

$$S_i = S_0 \sqrt{q_{x_i, x_i}} \quad (10-43)$$

donde:

q_{x_i, x_i} : es el elemento de la diagonal de la matriz Q_{xx} en la columna y renglón i .

Por definición se tiene que la desviación estándar es la raíz cuadrada de la varianza de la muestra:

$$S = \sqrt{\frac{p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \dots + p_n v_n^2}{n-1}} \quad (10-44)$$

donde $n-1$, son los grados de libertad o redundancia en la determinación de las observaciones de una incógnita. La expresión anterior en notación matricial es:

$$S = \sqrt{\frac{V^T P V}{n-1}} \quad (10-45)$$

Considerando que en el ajuste intervienen u incógnitas, la ecuación (10-45) se convierte en:

$$S_0 = \sqrt{\frac{V^T P V}{n-u}} \quad (10-46)$$

La estimación de la desviación estándar de peso unitario debe ser verificada utilizando la prueba de χ^2 , para comprobar que el valor a posteriori obtenido cumple con ella, aceptándose cuando está dentro del intervalo de confianza definido. La condición que se debe satisfacer es:

$$\chi^2 > \chi_{\alpha}^2 \quad (10-47)$$

o

$$\chi^2 < \chi_{1-\alpha}^2 \quad (10-48)$$

donde:

$$\chi^2 = \frac{(n-u)S_0^2}{\sigma^2}: \text{valor a probar.}$$

χ_α^2 : valor de la distribución para (n-u) grados de libertad a un intervalo de confianza α .

El valor de χ_α^2 generalmente se interpola de tablas.

11. SISTEMA DE POSICIONAMIENTO GLOBAL

El Sistema de Posicionamiento Global, más conocido por sus siglas en inglés GPS, ha revolucionado las técnicas de posicionamiento de puntos sobre la superficie terrestre, así como en la ciencia para la determinación de la forma y tamaño de la Tierra, la Geodesia. Por una parte este cambio se debe a la gran exactitud que se puede alcanzar con este sistema, así como la rapidez y simplicidad en su operación, sin dejarse de lado la reducción de costos en los trabajos operativos. Todos estos factores han contribuido en gran medida a un creciente número de aplicaciones del GPS en distintos campos del conocimiento humano, los cuales sólo están limitados por la imaginación del ser humano.

Debido a que este libro tiene un enfoque técnico, y que no se trata de ninguna manera de un folleto promocional de las posibles aplicaciones del GPS, este capítulo se centrará en una de las mayores ventajas del sistema: su exactitud, analizándose las principales fuentes de error y como influyen estas en la determinación de posiciones sobre la superficie de la Tierra, sin entrar en los aspectos operativos del equipo y de procesamiento de los datos generados con ellos.

11.1 POSICIONAMIENTO CON GPS

La exactitud inherente de una posición determinado por medio de un receptor GPS se puede mejorar por medio de un procesamiento cuidadoso o degradarse aceptando, en lugar de tratar de eliminar, fuentes significativas de error. Cuando se

pretende alcanzar exactitudes milimétricas o centimétricas en el posicionamiento, es necesario:

1. Trabajar con dos o más receptores simultáneamente. La idea fundamental detrás de esto, es utilizar diferencias de posición en lugar de posiciones absolutas; con ello los errores que son compartidos por receptores pueden cancelarse al formarse diferencias.
2. Repetir las mediciones. Una serie de observaciones redundantes garantizará la calidad estadística de la posición.
3. Estimar cada fuente de error en las observaciones. La intención es eliminar los errores sistemáticos de las observaciones y posteriormente minimizar los errores aleatorios.

Debe quedar claro, que la determinación de la posición de un punto sobre la superficie terrestre se realiza en función del tiempo de viaje entre el satélite y el receptor, de la señal enviada por el satélite, requiriéndose determinar cuatro valores x , y , z y cdt . Donde x , y , z son las coordenadas cartesianas tridimensionales del punto y cdt es la velocidad de la luz multiplicada por el tiempo de viaje de la señal. Por ello se requiere la observación de al menos cuatro satélites simultáneamente.

La clave para la exactitud del GPS está en un conocimiento preciso de las órbitas de los satélites y en la determinación del tiempo de viaje.

11.1.1 Principio básico

Para logra el objetivo básico en la determinación de la posición de un punto sobre la superficie terrestre, supongamos (lo cual es falso) que no existen errores en los relojes de los satélites ni del receptor. Bajo esta consideración, la distancia a tres satélites determinará la posición de un punto sobre la Tierra en forma única. Considerando un punto en el espacio y una distancia, se genera una esfera (figura 11-1).

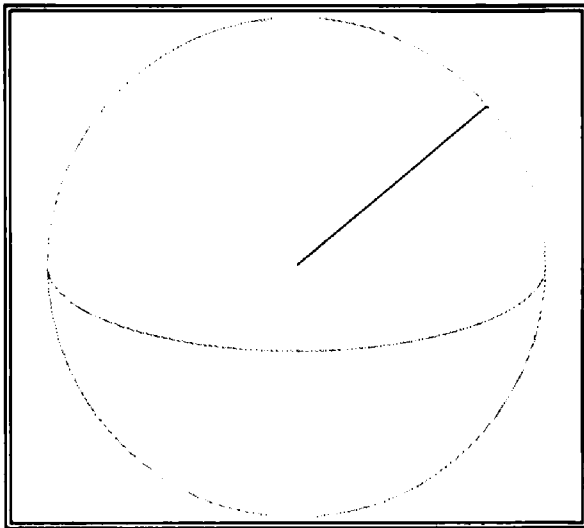


Figura 11-1. Esfera

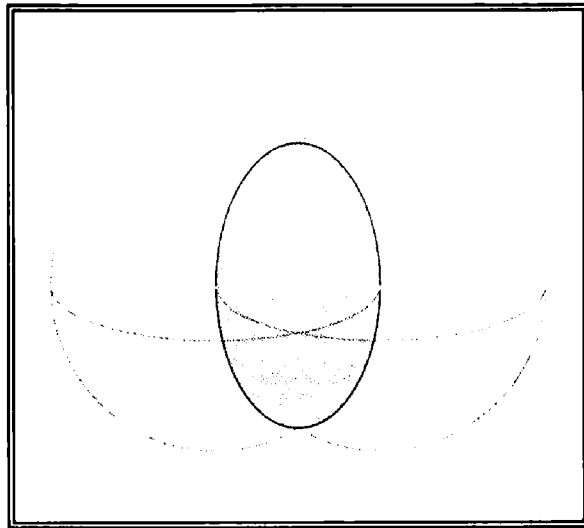


Figura 11-2. Círculo

La intersección de dos esferas (figura 11-2) genera un círculo. Asumiendo que los satélites no se encuentran sobre una línea recta, la tercera esfera corta al círculo en dos puntos. En uno de los cuales se encuentra el receptor (figura 11-3). Con lo que se puede ver que de no existan errores en los relojes, tres satélites son más que suficientes para determinar la posición.

En realidad, el reloj del receptor es un reloj barato y por lo tanto poco exacto. Considerando que dt' es el error en el reloj, cada medición de distancias estará afectado por un error cdt' . La

distancia incorrecta, la cual incluye cdt' debida al error del reloj, se llama pseudorange o pseudodistancia.

De dos satélites se tendrán dos pseudorangeos ρ^1 y ρ^2 . Al determinarse la diferencia:

$$d^{12} = \rho^1 - \rho^2 \quad (11-1)$$

se elimina el error cdt' debido al error del reloj, generándose una hipérbola de revolución, en la que los satélites se encuentran en sus focos y representa la gráfica de todos los puntos en el espacio cuya distancia del satélite difiere de d^{12} .

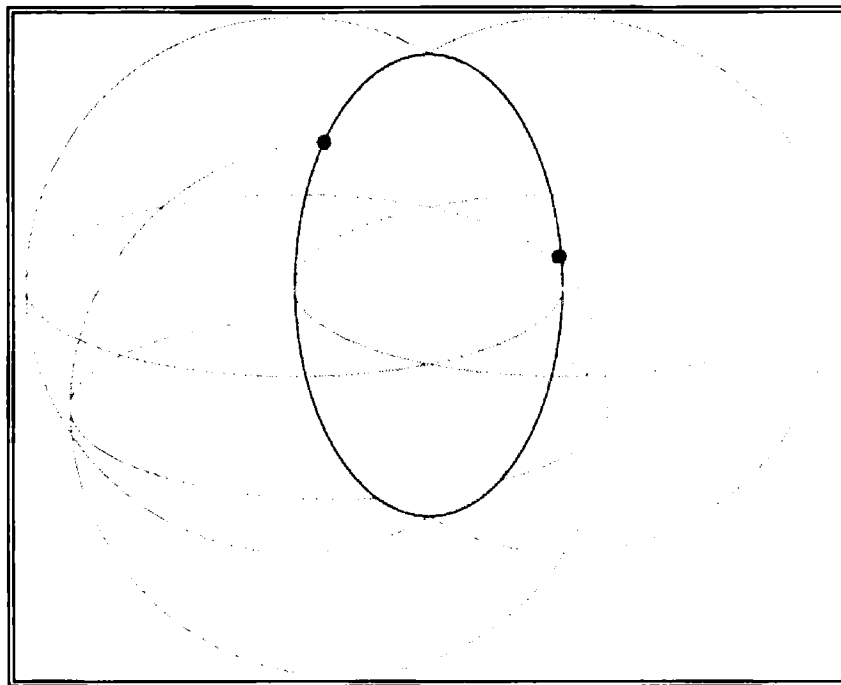


Figura 11-3. Intersección de tres esferas

El tercer pseudorange localiza el receptor sobre otra hipérbola de revolución y se intersecta con la primera en una curva. El cuarto pseudorange genera una tercera hipérbola de revolución, la cual corta a la curva usualmente en dos puntos. Lo anterior se

representa por el siguiente conjunto de ecuaciones, en las que el superíndice indica el satélite:

$$\begin{aligned}
 (x - X^1)^2 + (y - Y^1)^2 + (z - Z^1)^2 + (cdt)^2 &= (\rho^1)^2 \\
 (x - X^2)^2 + (y - Y^2)^2 + (z - Z^2)^2 + (cdt)^2 &= (\rho^2)^2 \\
 (x - X^3)^2 + (y - Y^3)^2 + (z - Z^3)^2 + (cdt)^2 &= (\rho^3)^2 \\
 (x - X^4)^2 + (y - Y^4)^2 + (z - Z^4)^2 + (cdt)^2 &= (\rho^4)^2
 \end{aligned}
 \tag{11-2}$$

11.2 OBSERVABLES

En la sección anterior se introdujo una de las dos observables básicas del sistema de posicionamiento global, el pseudorango. La otra observable básica es la diferencia de fase con la que se recibe la señal transmitida por el satélite.

11.2.1 El pseudorango

Antes de analizar con mayor detalle los pseudorango, analizaremos brevemente la estructura de la señal transmitida por los satélites GPS. Cada satélite de la constelación NAVSTAR transmite dos señales para propósitos de posicionamiento: la señal L_1 , centrada en la frecuencia portadora de 1575.52 MHz y la señal L_2 , centrada en 1227.60 MHz. Sobre la portadora L_1 se modulan dos ruidos pseudoaleatorios (PRN): el código C/A de 1 milisegundo de longitud con una tasa de repetición de 1 MHz y un segmento muy largo del código P con una tasa de repetición de 10 MHz. También sobrepuesto a la portadora se envía el mensaje de navegación, que entre otras cosas, incluye los datos de

efemérides, los cuales describen la posición del satélite en su órbita y predice las correcciones de los relojes de abordo. En la portadora L_2 sólo se modula el código P y el mensaje de navegación.

El código PRN transmitido por un satélite, el cual es único para cada satélite, se usa para determinar el pseudorango, el cual como ya se ha mencionado es la distancia existente entre la antena del satélite y la antena del receptor. El receptor determina el pseudorango por medio de la generación de la réplica del código que está siendo generado por cada satélite y determinando el desplazamiento entre la llegada de una transición particular del código transmitido y la misma transición de la réplica. La diferencia de tiempo es simplemente el tiempo que le toma a la señal para ser propagada desde el satélite hasta el receptor (figura 11-4).

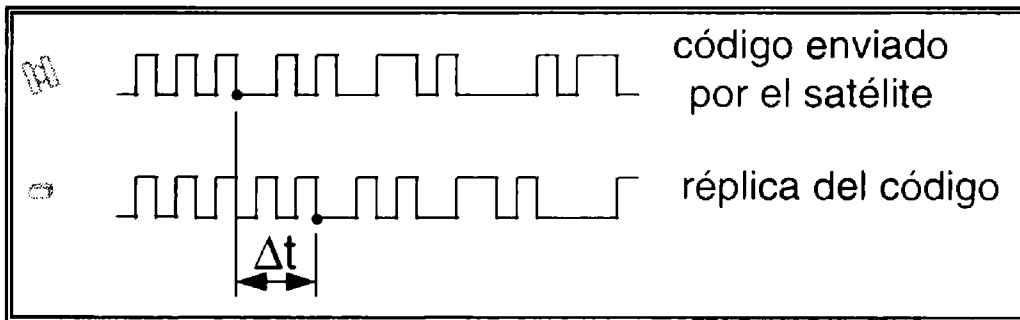


Figura 11-4. Tiempo de viaje

Como se mencionó, el pseudorango es el tiempo de viaje de la señal transmitida por la velocidad de la luz. La razón por la que se llama pseudorango es que se tiene un sesgo debido a la falta de sincronización entre el reloj del satélite GPS que gobierna la generación de la señal enviada por él y el reloj del receptor que se emplea en la generación de la réplica del código; así como por

otros efectos, incluyendo el retraso ionosférico y troposférico, la multitrayectoria, así como el ruido propio del receptor.

Considerando todos estos aspectos la ecuación para el pseudorango observado se puede escribir como:

$$P = \rho + c \cdot (dt - DT) + d_{\text{ion}} + d_{\text{trop}} + e \quad (11-3)$$

donde:

- P es el pseudorango medido
- ρ es el rango geométrico entre el satélite y el receptor
- dt es el desplazamiento del reloj satelital con respecto al tiempo GPS
- DT es el desplazamiento del reloj del receptor con respecto al tiempo GPS
- d_{ion} es el retraso ionosférico
- d_{trop} es el retraso troposférico
- e representa el efecto por multitrayectoria y ruido del receptor

Los pseudorangos se pueden determinar en función de cualquiera de los dos códigos disponibles en el sistema.

11.2.2 La diferencia de fase

Aun cuando se tiene la ventaja de poder determinar la distancia entre el satélite y el receptor por medio del código, la mayor precisión se puede obtener por medio de la fase de la portadora recibida con respecto a la fase de la portadora generada por el

oscilador del receptor GPS. La portadora generada en el receptor es una frecuencia nominal constante, mientras que la portadora recibida cambia su frecuencia debido al efecto Doppler inducido por el movimiento relativo entre el satélite y el receptor. La fase de la portadora recibida se relaciona con la fase de la portadora en el satélite por medio del intervalo de tiempo requerido por la señal para propagarse desde el satélite hasta el receptor.

Así, idealmente, la observable de fase portadora será el número total de ciclos completos y la fracción de ciclo entre las antenas del satélite y del receptor en cualquier instante, con la limitante de que el receptor no puede distinguir el número de ciclos completos, por lo que solamente se mide la diferencia de fase de la señal portadora, teniéndose un número indeterminado o ambiguo de ciclos, N , el cual se deberá de determinarse de alguna forma.

Expresando la fase de la portadora medida, como una función de distancia, se tiene que:

$$\Phi = \rho + c \cdot (dt - dT) + \lambda N - d_{ion} + d_{trop} + e \quad (11-4)$$

donde:

λ es la longitud de onda de la portadora.

y los otros términos tienen el mismo significado que en la ecuación (11-3). Nótese la gran similitud que existe entre las ecuaciones (11-3) y (11-4). Al igual que en el caso de los pseudorángos, la diferencia de fase de la señal portadora se puede determinar en las dos frecuencias empleadas por el sistema.

11.2.3 Equivalencia de pseudorange y fase portadora

Considerando los dos códigos y las dos frecuencias, y después de alguna manipulación algebraica, se puede escribir el siguiente sistema de ecuaciones para cada época de observación:

$$\begin{aligned}
 \Phi_1 &= \rho - I + \lambda_1 N_1 + \delta m_1 \\
 \Phi_2 &= \rho - \left(\frac{f_1}{f_2} \right)^2 I + \lambda_2 N_2 + \delta m_2 \\
 P_1 &= \rho + I + dm_1 \\
 P_2 &= \rho + \left(\frac{f_1}{f_2} \right)^2 I + dm_2
 \end{aligned}
 \tag{11-5}$$

Donde:

- I es el retraso ionosférico de grupo para la frecuencia L_1
- f_1 es la frecuencia L_1
- f_2 es la frecuencia L_2
- $\delta m, dm$ son los efectos por multitrayectoria y ruido del receptor en la fase y el pseudorange

El lector debe recordar que todos los parámetros expresados en la ecuación (11-5) están generalmente afectados por errores sistemáticos y aleatorios.

Expresando la ecuación (11-5) en notación matricial se llega a:

$$\begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -\left(\frac{f_1}{f_2}\right)^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \left(\frac{f_1}{f_2}\right)^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho \\ I \\ \lambda_1 N_1 \\ \lambda_2 N_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta m_1 \\ \delta m_2 \\ dm_1 \\ dm_2 \end{bmatrix} \quad (11-6)$$

Cuando los valores de δm y dm son iguales a cero, se puede resolver el sistema de ecuaciones para encontrar las cuatro incógnitas involucradas en el sistema:

$$\begin{bmatrix} \rho \\ I \\ \lambda_1 N_1 \\ \lambda_2 N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -\left(\frac{f_1}{f_2}\right)^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \left(\frac{f_1}{f_2}\right)^2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} \quad (11-7)$$

Sustituyendo los valores de las dos frecuencias y obteniendo la inversa de la matriz de coeficientes, se llega a:

$$\begin{bmatrix} \rho \\ I \\ \lambda_1 N_1 \\ \lambda_2 N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.000 & 0.000 & 2.546 & -1.546 \\ 0.000 & 0.000 & -1.546 & 1.546 \\ 1.000 & 0.000 & -4.091 & 3.091 \\ 0.000 & 1.000 & -5.091 & 4.091 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} \quad (11-8)$$

Con lo cual se determina el pseudorango ideal ρ , el retraso ionosférico instantáneo I , así como las ambigüedades N_1 y N_2 .

Ya que el nivel de error para los pseudorange es mucho mayor que en la fase portadora, a continuación se analizará la propagación de estos errores en los parámetros anteriores. La matriz de covarianzas para los parámetros estimados dados por la ecuación (11-8) puede calcularse de:

$$C = (A^T C_{\text{datos}}^{-1} A)^{-1} \quad (11-9)$$

donde A es la matriz de coeficientes de la ecuación (11-8) y $C_{\text{datos}} = W^{-1}$ es la matriz de covarianzas de los datos.

Si se asume que la matriz de covarianza de los datos es diagonal, esto es, no hay correlación entre las observable, así como que no hay diferencia entre el nivel de error entre L1 y L2, y que la varianza de la fase portadora es despreciable comparada con los pseudorange, entonces la matriz de covarianzas se puede escribir como:

$$C_{\text{datos}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{bmatrix} \varepsilon \sigma^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma^2 \end{bmatrix} \quad (11-10)$$

Para que lo anterior sea válido, se requiere que $\varepsilon \approx 10^{-4}$. Evaluando la ecuación (11-9), en función de la matriz de coeficientes de la ecuación (11-8) y la matriz de pesos definida por (11-10) se tendrá:

$$C = \sigma^2 \begin{bmatrix} 8.870 & -6.324 & -15.194 & -19.286 \\ -6.324 & 4.779 & 11.103 & 14.194 \\ -15.194 & 11.103 & 26.297 & 33.480 \\ -19.286 & 14.194 & 33.480 & 42.663 \end{bmatrix} \quad (11-11)$$

Con lo que finalmente se tiene que los errores de los parámetros derivados para una época usando datos de las dos frecuencias y los dos códigos serán:

Parámetro	Desviación estándar
ρ	2.978σ
I	2.186σ
N_1	$5.128\sigma/\lambda$
N_2	$6.532\sigma/\lambda$

Lo anterior quiere decir que el error del pseudorango es aproximadamente tres veces mayor que el error de las mediciones. El error para el retraso ionosférico es dos veces mayor. Para el caso de las ambigüedades de la fase portadora los factores de escala de 5.128 y 6.532 muestran que el efecto de multitrayectoria o de salto de ciclo, se deben de controlar lo mejor posible si se desea resolver las ambigüedades o detectar saltos de ciclo en función de los pseudorangs. Por ejemplo, si se desea tener una desviación estándar de 0.25 ciclos en N_1 , entonces la precisión del pseudorango deberá ser aproximadamente cinco veces más pequeña; esto es, menor a 1 cm.

11.3 ERRORES SISTEMÁTICOS

A continuación se presentan los principales errores sistemáticos en el posicionamiento GPS, así como sus fuentes y magnitudes aproximadas.

11.3.1 Error en efemérides

El satélite transmite su posición por medio de elementos keplerianos, la mayor parte del tiempo con gran precisión pero conservando pequeños errores. Estos errores se incrementan lenta y suavemente en función del tiempo. Se estima que el error medio cuadrático en la medición es de 2.1 metros.

11.3.2 Error en el reloj satelital

Un reloj atómico, con un oscilador de rubidio o cesio, es exacto en una parte en 10^{12} . Lo anterior implica que en un día se tendrá un cambio de 10^{-7} segundos, que al multiplicarlo por la velocidad de la luz representa 26 metros. Al determinarse correcciones a los relojes cada 12 horas, se tiene un error promedio de 1 metro.

11.3.3 Error ionosférico

La señal GPS sufre retraso en su paso a través de la ionósfera, la cual empieza 50 km sobre la superficie terrestre y se extiende a 1 000 km o más. El retraso es proporcional al número de electrones libres, e inversamente proporcional al cuadrado de la frecuencia, con lo que el efecto es dispersivo y depende de la frecuencia. La cantidad de electrones libres varía fuertemente en función de la

hora del día y de la latitud, así como de efectos cíclicos debidos a la actividad solar. El efecto en los pseudoragos y en la fase de la portadora es de signo contrario, y si no es tomado en cuenta su efecto, puede producir un error de hasta 30 metros en la dirección del cenit.

Si se cuenta con un receptor de doble banda, se pueden determinar los pseudoragos en P_1 y P_2 en las frecuencias L_1 y L_2 , y cuantificar el retraso ionosférico por medio de:

$$dP_{\text{ion}} = \frac{f_2^2}{f_2^2 - f_1^2} (P_1 - P_2) + \begin{matrix} \text{errores aleatorios} \\ \text{y no modelados} \end{matrix} \quad (11-12)$$

De igual forma con la fase de la portadora el retraso ionosférico será:

$$d\Phi_{\text{ion}} = \frac{f_2^2}{f_2^2 - f_1^2} ((\lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2) - (\Phi_1 - \Phi_2)) + \begin{matrix} \text{errores aleatorios} \\ \text{y no modelados} \end{matrix} \quad (11-13)$$

Para el caso de receptores de una sola banda las fórmulas anteriores no son útiles y solamente se puede resolver el retraso ionosférico empleando el modelo matemático enviado en el mensaje de navegación. Para el caso de posicionamiento GPS diferencial, el retraso ionosférico en los dos receptores se puede cancelar al calcularse el vector que define la línea base entre ellos, si la distancia entre ellos es lo suficientemente corta.

11.3.4 Error troposférico

La tropósfera es la parte baja de la atmósfera y su efecto en la propagación de ondas electromagnéticas es crítico. El retraso en la señal dependerá de las condiciones atmosféricas de temperatura, presión y humedad, siendo su efecto dependiente del tiempo de viaje de la señal por este medio, y ya que la frecuencia de radio empleada no influye en el retraso de la señal, el empleo de equipos receptores de dos bandas no ayuda a minimizar su efecto.

Usualmente, la influencia de la tropósfera sobre los pseudorángos medidos se expresa en función de dos componentes: la parte seca y la húmeda. La componente húmeda depende de la distribución del vapor de agua en la atmósfera y por lo tanto es difícil de modelar. Si se emplean datos meteorológicos de la superficie terrestre se puede determinar esta componente dentro de 3 a 4 centímetros de precisión; sin embargo, su magnitud corresponde solamente al 10% del efecto total en el retraso. Existen varios modelos matemáticos que describen con gran precisión la componente seca del retraso troposférico, lográndose precisiones dentro del uno por ciento de error.

La magnitud total del retraso troposférico tiene un valor mínimo en la dirección cenital del orden de 2.3 metros y se incrementa hacia el horizonte llegando a cerca de 20 metros a 10° de elevación sobre el horizonte. Al igual que en el caso del error ionosférico, si las estaciones están lo suficientemente cercanas su efecto se puede eliminar al calcularse la diferencia de posición entre dos receptores, quedando solamente efecto debidos a que los datos meteorológicos puntuales considerados para el calculo del retraso troposférico, generalmente no son representativos de la situación

atmosférica regional. Esto se hace manifiesto cuando la separación entre las estaciones es mayor a 50 kilómetros, o cuando la diferencia de elevación entre ellas es significativa.

11.3.5 Error de multitrayectoria

La señal GPS puede llegar a la antena del receptor por varias rutas (figura 11-5), con lo que la misma señal arriba a la antena en diferentes épocas e interfiere con ella misma. Dos ejemplos típicos de este efecto son el fantasma en la señal de televisión, así como el eco.

En GPS, la señal puede reflejarse de edificios, del terreno y cuerpos de agua, pudiendo inducir errores en los pseudorangos de varios metros. Algunos investigadores han reportado efectos por multitrayectoria cercanos a los 10 metros en mediciones hechas con el código C/A.

La multitrayectoria es un serio problema en el posicionamiento GPS debido principalmente a la gran dificultad de ser modelada. El mejor antídoto para su efecto es la antena a ser empleada, pudiendo ésta contener un plano horizontal de aproximadamente 20 centímetros de diámetro, o una antena formada por varios elementos como la tipo microstrip o chock ring.

Para la observable de fase portadora el efecto de la multitrayectoria es menor que los pseudorangos, llegando a tan solo unos cuantos centímetros. La señal reflejada tiene un corrimiento en la fase de $\Delta\Phi$ y su efecto se atenúa por un factor α , con lo que señal recibida será igual a:

$$\text{señal recibida} = A\cos\Phi + \alpha A \cos(\Phi + \Delta\Phi) \quad (11-14)$$

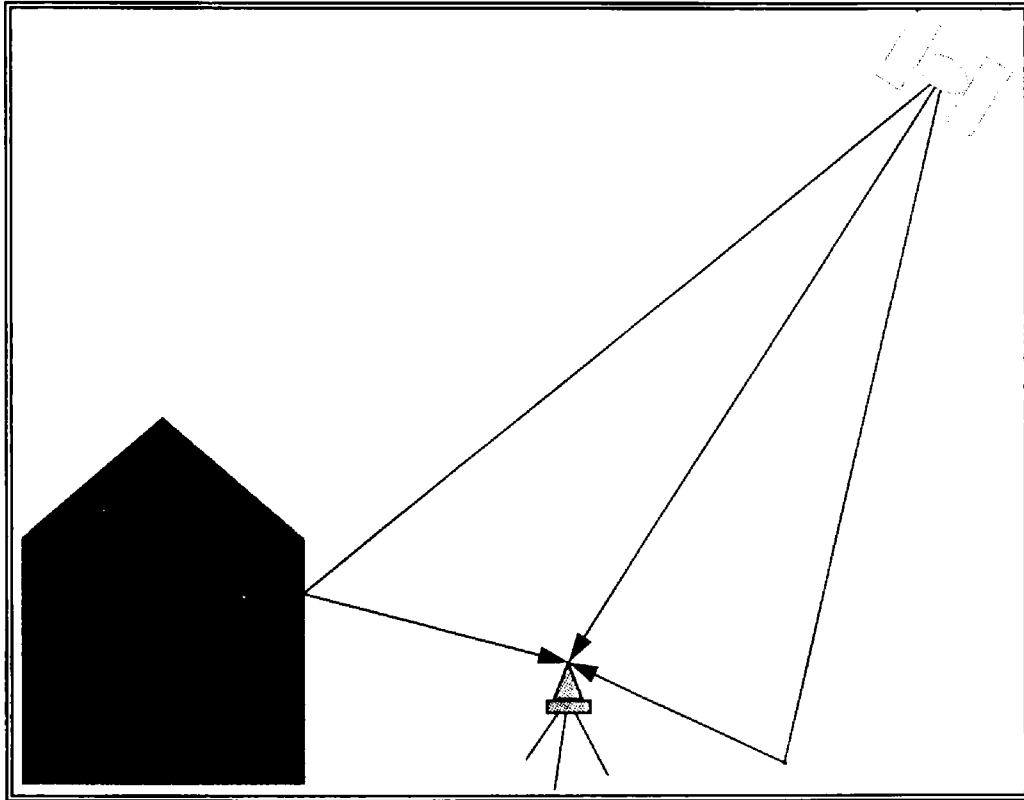


Figura 11-5. Multitrayectoria

El error por multitrayectoria, produce una diferencia en la fase de la portadora de:

$$d\Phi = \arctan\left(\frac{\text{sen } \Phi}{\alpha^{-1} + \cos \Phi}\right) \quad (11-15)$$

En el peor de los casos, $\alpha=1$ y $\Phi=90^\circ$, no hay atenuación de la señal, resultando $d\Phi=45^\circ$.

Fuente de error	una frecuencia	doble frecuencia
Efemérides	2 m	2 m
reloj satelital	2 m	2 m
Ionósfera	4 m	0.5 a 1 m
Tropósfera	0.5 a 1 m	0.5 a 1 m
Multitrayectoria	hasta 2 m	hasta 2 m
UERE	5 m	2 a 4 m

Tabla 11.1 Error estándar sin SA

11.3.6 Resumen de errores sistemáticos

En la tabla 11.1 se presenta de manera resumida el error medio cuadrático aproximado de las contribuciones de los errores mencionados, sin incluir el concepto de disponibilidad selectiva (SA). SA es la degradación intencional en la calidad de la señal GPS, inducida de forma artificial por el Departamento de la Defensa de los Estados Unidos. Cabe mencionar que las fuentes de error son razonablemente independientes, por lo que la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los errores, genera el rango de error equivalente del usuario o UERE por sus siglas en inglés. Esta cantidad multiplicada por la dilución de precisión (DOP) dará la desviación estándar de la posición.

11.4 EL DOP COMO MEDIDA DE LA CONFIANZA DEL GPS

11.4.1 Introducción

El DOP o dilución de precisión es la contribución puramente geométrica a la incertidumbre de un posicionamiento satelital; esto es, como afecta a la precisión del levantamiento la cantidad

de satélites disponibles, así como su distribución sobre el horizonte del observador.

Por definición el DOP es un valor adimensional que describe la solidez de la figura formada por el receptor en Tierra y los vectores hacia los satélites a la vista. Su valor ideal es uno, y obviamente, si la geometría cambia, el valor asociado al DOP cambiará.

La exactitud posicional refleja la capacidad final de muchos receptores GPS. Aún cuando la exactitud posicional se relaciona frecuentemente con la exactitud de medición, no son lo mismo. La relación entre estas dos exactitudes es función de la geometría de los satélites seleccionados, o lo que es lo mismo, la dirección en la que arriban las señales satelitales. Si se desea obtener una cierta exactitud posicional, esta estará en función de la exactitud de la medición y de la geometría de los satélites en el momento de la observación. Por ejemplo, si cada pseudorango individual tiene un error promedio estadísticamente independiente igual a cero, con el mismo error medio cuadrático (rms) de σ , causado por todos los efectos involucrados en la medición, entonces el rms en la posición estará dado por:

$$\text{Error en posición} = \text{DOP} \times \sigma$$

Como se mencionó, el valor del DOP se calcula a partir de los vectores unitarios a cada uno de los satélites involucrados, asumiéndose que los errores en los pseudorangos medidos son independientes y su valor se encuentra entre 1 y 100. Existen cinco diferentes mediciones del DOP, siendo estas:

$$\text{GDOP} = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + \sigma_b^2} \quad \text{Dilución de la precisión geométrica.}$$

$$\text{PDOP} = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2} \quad \text{Dilución de la precisión posicional.}$$

$$\text{HDOP} = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} \quad \text{Dilución de la precisión horizontal.}$$

$$\text{VDOP} = \frac{\sigma_z}{\sigma} \quad \text{Dilución de la precisión vertical.}$$

$$\text{TDOP} = \frac{\sigma_b}{\sigma} \quad \text{Dilución de la precisión de tiempo.}$$

En las expresiones anteriores σ_x , σ_y , σ_z son los rms del error en la estimación de la posición del usuario en las coordenadas (X, Y, Z) asociadas a un sistema convencional terrestre y σ_b el rms del error en el sesgo del reloj del usuario, todos ellos expresados en unidades de distancia.

Debe quedar claro que las diferentes medidas de DOP solo dan una aproximación de la calidad del posicionamiento, ya que, por ejemplo el rms de los pseudorangos generalmente no son los mismos para todos los satélites, ya que algunos de los errores de medición son función del ángulo de elevación de los satélites. Sin embargo, los valores proporcionados por las diferentes medidas de DOP proporcionan una medición útil del desempeño del sistema que obviamente es dependiente de la geometría de los satélites relativa al usuario. Para la configuración satelital actual, el valor del PDOP a nivel global promedio es de aproximadamente 2.5.

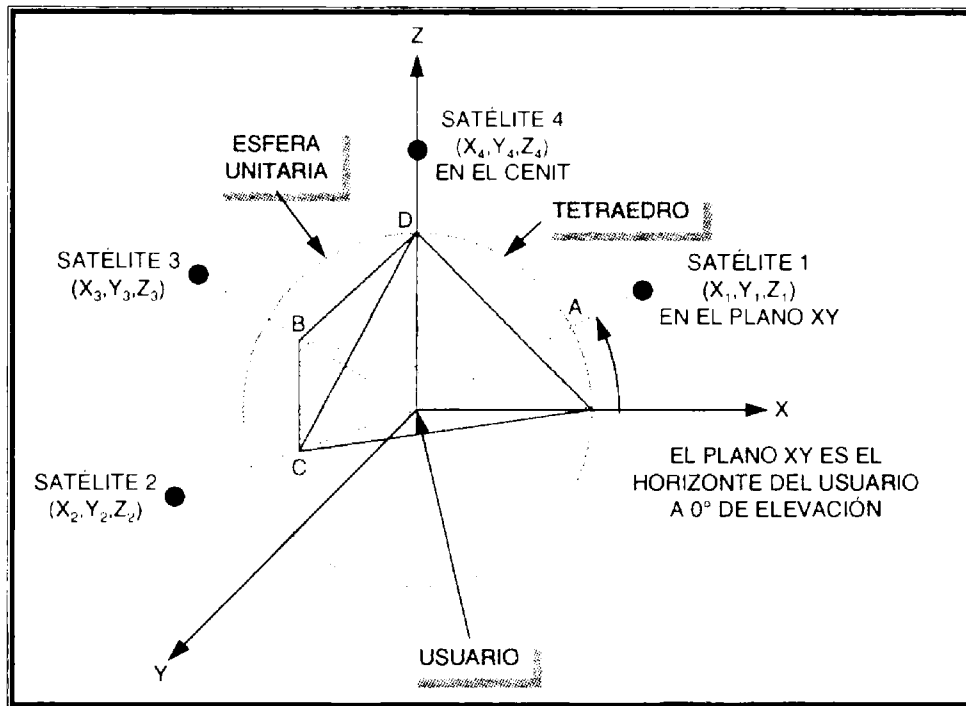


Figura 11-6. Geometría satelital tridimensional. Los vectores unitarios A, B, C y D están sobre la superficie de la esfera unitaria, apuntando hacia los satélites 1, 2, 3 y 4 respectivamente

11.4.2 La aplicación del DOP

Dependiendo del propósito de las observaciones, se puede seleccionar una configuración favorable del DOP, sin embargo en la actualidad con la constelación completa de satélites NAVSTAR, las variaciones de los valores del DOP son menos críticas, ya que por regla general se pueden esperar valores satisfactorios.

La filosofía del DOP es de mayor importancia e interés para la navegación, sobre todo al considerar un receptor con pocos canales, ya que este deberá seleccionar la mejor distribución de los satélites disponibles. En aplicaciones de levantamientos geodésicos, los valores del DOP son de menor importancia,

debido a que los receptores modernos tienen una mayor cantidad de canales y por lo tanto rastrearán todos los satélites disponibles; sin embargo, pueden ser una herramienta de gran utilidad en la planeación de los trabajos de medición en campo, en particular cuando estos se realizan en las modalidades cinemáticas.

11.4.3 Ecuaciones del DOP

La figura 11-6 muestra la geometría satelital en un espacio tridimensional, considerando cuatro satélites, el cual es el número mínimo de satélites requeridos para obtener la solución de las cuatro incógnitas involucradas en un posicionamiento.

Para facilitar la derivación de las ecuaciones del DOP, y sin que exista pérdida de generalidad en los modelos matemáticos, se considera que un satélite está sobre el eje Z y los otros tres sobre el plano XY. Así, se puede establecer que la ecuación diferencial para esta situación es:

$$d\rho = \begin{bmatrix} d\rho^1 \\ d\rho^2 \\ d\rho^3 \\ d\rho^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & g_{13} & 1 \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & 1 \\ g_{31} & g_{31} & g_{33} & 1 \\ 0 & 0 & g_{43} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ db \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} dn^1 \\ dn^2 \\ dn^3 \\ dn^4 \end{bmatrix} = Gdx + dn \quad (11-16)$$

Donde:

$$d\rho^i = \frac{\partial \rho^i}{\partial x} dx + \frac{\partial \rho^i}{\partial y} dy + \frac{\partial \rho^i}{\partial z} dz + \frac{\partial \rho^i}{\partial b} db$$

La matriz **G** representa los cosenos directores entre el receptor y los satélites, la cual se conoce en la literatura GPS como la matriz

de geometría y se puede demostrar que el determinante $|G|$ es directamente proporcional al volumen del tetraedro que forman los cuatro vectores; con lo que se tendrá que $|G| = 6V$, donde V es el volumen de tetraedro. Una consideración importante, es que al maximizarse el volumen de tetraedro, el valor del GDOP se minimiza. Lo anterior se logra, como se ilustra en la Figura 11-6, al posicionar un satélite sobre el cenit del observador y los otros tres satélites espaciados uniformemente sobre un plano perpendicular al cenit, teniendo cada uno de ellos un ángulo de elevación de $E = \sin^{-1}(-1/3)$; esto es, -19.47° , o 19.47° por debajo del horizonte definido por el plano de la antena. Desde luego este valor no se puede alcanzar en levantamiento terrestre o para posicionamiento de aeronaves cercanas a la superficie terrestre; sin embargo, en satélites artificiales ubicados en órbitas bajas entre los satélites NAVSTAR y la Tierra si se pueden lograr estos valores para el ángulo vertical.

Con relación a la figura 11-6, si los satélites 1, 2 y 3 se encuentran a 120° entre sí sobre un plano horizontal con un ángulo de elevación E , y el cuarto satélite se ubica sobre el cenit, la ecuación diferencial (11-16) se convierte en:

$$d\rho = \begin{bmatrix} d\rho_1 \\ d\rho_2 \\ d\rho_3 \\ d\rho_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos E & 0 & \text{sen } E & 1 \\ -\frac{1}{2} \cos E & \sqrt{\frac{3}{4}} \cos E & \text{sen } E & 1 \\ -\frac{1}{2} \cos E & -\sqrt{\frac{3}{4}} \cos E & \text{sen } E & 1 \\ 0 & 0 & \text{sen } E & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ db \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} dn_1 \\ dn_2 \\ dn_3 \\ dn_4 \end{bmatrix} \quad (11-17)$$

La ecuación para la matriz de covarianzas, bajo la suposición de que los errores no están correlacionados, está dada por la siguiente matriz simétrica:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z^2 & \Sigma_{zb} \\ 0 & 0 & \Sigma_{zb} & \sigma_b^2 \end{bmatrix} \quad (11-18)$$

con lo que se puede establecer que:

$$\frac{\sigma_x^2}{\sigma^2} = \frac{\sigma_y^2}{\sigma^2} = \left(\frac{2}{3}\right) \sec^2 E \quad (11-19a)$$

$$\frac{\sigma_z^2}{\sigma^2} = \frac{\left(\frac{4}{3}\right)}{\left[\cos\left(\frac{E}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{E}{2}\right)\right]^4} \quad (11-19b)$$

$$\frac{\sigma_b^2}{\sigma^2} = \frac{(5-3\cos 2E)}{6\left[\cos\left(\frac{E}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{E}{2}\right)\right]^4} \quad (11-19c)$$

$$\frac{\Sigma_{zb}}{\sigma^2} = -\frac{(1+3\operatorname{sen} E)}{3\left[\cos\left(\frac{E}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{E}{2}\right)\right]^4} \quad (11-19d)$$

Con lo que los valores del GDOP, PDOP, HDOP, VDOP y TDOP derivados de las ecuaciones (11-19) serán:

$$\text{GDOP} = \left[\frac{\left(\frac{4}{3} \right) \sec^2 E + \left[\left(\frac{13}{6} \right) - \left(\frac{1}{2} \right) \cos 2E \right]}{\left[\cos \left(\frac{E}{2} \right) - \text{sen} \left(\frac{E}{2} \right) \right]^4} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{PDOP} = \left[\frac{\left(\frac{4}{3} \right) \sec^2 E + \left(\frac{4}{3} \right)}{\left[\cos \left(\frac{E}{2} \right) - \text{sen} \left(\frac{E}{2} \right) \right]^4} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{HDOP} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right) \sec E$$

$$\text{VDOP} = \frac{\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)}{\left[\cos \left(\frac{E}{2} \right) - \text{sen} \left(\frac{E}{2} \right) \right]^2}$$

$$\text{TDOP} = \frac{\left(\frac{1}{6} \right) \left(5 - 3 \cos \frac{E}{2} \right)^{\frac{1}{2}}}{3 \left[\cos \frac{E}{2} - \text{sen} \frac{E}{2} \right]^4}$$

En la figura 11-7 se muestran graficados estos valores en función del ángulo de elevación.

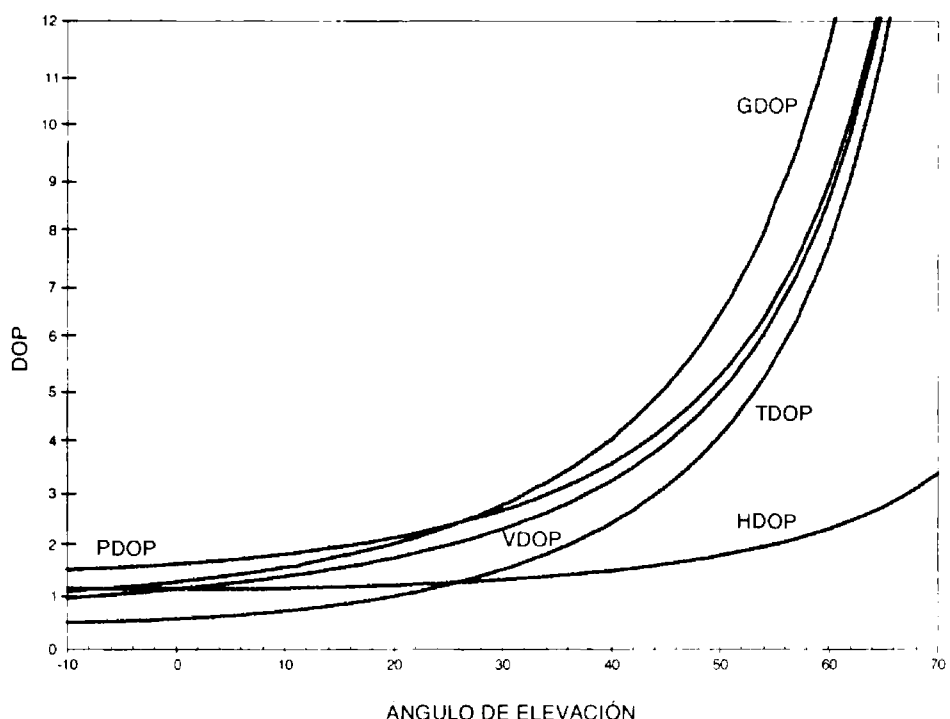


Figura 11-7. Comportamiento de las diferentes mediciones del DOP en función del ángulo de elevación.

Debe quedar claro, que en general, no se tendrá un satélite en el cenit y los otros tres espaciados uniformemente en acimut, con el mismo ángulo de elevación. Sin embargo, es interesante destacar que los distintos valores del DOP decrecen uniformemente en función del decremento de E. Es interesante comentar que el valor óptimo del HDOP, 1.1547, se da cuando los satélites se encuentran sobre el horizonte, $E=0^\circ$, mientras que el PDOP y el GDOP continúan disminuyendo conforme se decrementa el valor de E, con lo que el volumen del tetraedro se incrementa, hasta llegar a $E=-19.47^\circ$ en donde ambos valores llegan al mínimo. El valor del GDOP para este ángulo es de 1.5811. Como se mencionó anteriormente solo los satélites con órbitas bajas pueden operar con estos valores. Una consideración adicional importante, es que en la figura 11-7 se está ilustrando el caso de la distribución

óptima de cuatro satélites, pero en la práctica con la constelación actual frecuentemente se tendrán a la vista entre 6 y 8 satélites, lo que dará como resultado que se incremente el volumen del prisma formado por los vectores, con lo que se disminuirán los diferentes valores del DOP.

11.4.4 Exactitud de una solución puntual

Resulta obvio que la exactitud de un posicionamiento GPS puntual está definida por dos factores, la calidad de la medición y la geometría definida por los satélites NAVSTAR en función de la posición del observador. La calidad de las mediciones está descrita por la varianza del error de medición, la cual típicamente para pseudorangs podrá variar de 0.3 a 30 metros, dependiendo de las condiciones de observación; mientras que la geometría estará descrita por la matriz G , compuesta por la dirección de los vectores y el estado del reloj. Con lo que la matriz de covarianzas se expresará por:

$$\begin{aligned} E[\Delta\bar{x} \Delta\bar{x}^T] &= E\left[(G^T G)^{-1} G^T \Delta\rho \Delta\rho^T G (G^T G)^{-1}\right] \\ &= (G^T G)^{-1} G^T R G (G^T G)^{-1} \end{aligned} \quad (11-20)$$

donde R es la matriz de covarianzas de los pseudorangs y E es el operador esperanza matemática. Asumiendo nuevamente, aunque algo incorrecto, que los errores de medición no están correlacionados y tienen una desviación estándar igual a σ , entonces $R = \sigma^2 I$, con lo que la matriz de covarianzas de la solución puntual se reduce a:

$$E[\Delta\bar{x} \Delta\bar{x}^T] = \sigma^2 (G^T G)^{-1} \quad (11-21)$$

Siendo el vector de residuos igual a:

$$\Delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta E \\ \Delta N \\ \Delta U \\ c\Delta b \end{bmatrix}$$

donde ΔE , ΔN , ΔU son los errores posicionales definidos en un sistema geodésico local en la dirección este, norte y arriba respectivamente; y $c\Delta b$ es el sesgo del reloj, todos ellos expresados en unidades lineales, entonces la matriz de covarianzas estará dada por:

$$E[\Delta \bar{\mathbf{x}} \Delta \bar{\mathbf{x}}^T] = \begin{bmatrix} E[\Delta E^2] & E[\Delta E \Delta N] & E[\Delta E \Delta U] & E[\Delta E c\Delta b] \\ E[\Delta E \Delta N] & E[\Delta N^2] & E[\Delta N \Delta U] & E[\Delta N c\Delta b] \\ E[\Delta U \Delta E] & E[\Delta U \Delta N] & E[\Delta U^2] & E[\Delta U c\Delta b] \\ E[c\Delta b \Delta E] & E[c\Delta b \Delta N] & E[c\Delta b \Delta U] & E[c\Delta b^2] \end{bmatrix} \quad (11-22)$$

Por lo tanto $[\mathbf{G}^T \mathbf{G}]^{-1}$ es la matriz de los multiplicadores de varianza de rango, los cuales generan la varianza de la posición. Lo anterior se conoce como GDOP o matriz de dilución de posición geométrica. Generalmente, los elementos de mayor interés se localizan en la diagonal principal. Definiendo:

$$\mathbf{a} \equiv [\mathbf{G}^T \mathbf{G}]^{-1} \quad (11-23)$$

entonces:

$$\text{GDOP} = \sqrt{\text{Traza}(\mathbf{A})}$$

$$\text{PDOP} = \sqrt{\text{Traza}(\mathbf{A}) - a_{44}}$$

$$\text{HDOP} = \sqrt{a_{11} + a_{22}}$$

$$\text{VDOP} = \sqrt{a_{33}}$$

$$\text{TDOP} = \sqrt{a_{44}}$$

A manera de conclusión se puede establecer que el concepto de DOP es una herramienta poderosa para propósitos de planeación, tratándose de levantamientos de corta duración, así como en navegación. Se puede afirmar que todos los receptores GPS utilizan algún algoritmo basado en el GDOP para seleccionar el mejor conjunto de satélites a ser rastreados de entre todos los disponibles. La exactitud posicional se puede estimar como la exactitud de la medición multiplicada por un factor de dilución. El factor de dilución depende exclusivamente de la geometría satelital.

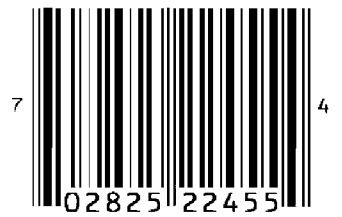
BIBLIOGRAFÍA

- Bannister, A. y Raymond, S. (1986). **TÉCNICAS MODERNAS EN TOPOGRAFÍA**. Editorial Alfaomega. México, DF.
- Blachut, T.; Chrzanowski, A. y Saastamoinen, J. (1981). **CARTOGRAFÍA Y LEVANTAMIENTOS URBANOS**. Instituto Panamericano de Geografía e Historia. México, DF.
- Gauss, C.F. (1820). **THEORIA COMBINATIONIS OBSERVATIONUM ERRORIBUS MINIMIS OBNOXIAE**. Pars prior. Pars Posterior. Supplementum. (**THEORY OF THE COMBINATION OF OBSERVATIONS LEAST SUBJECT TO ERRORS. Part one. Part Two. Supplement**). Traducción al inglés de G.W. Stewarts. Classics in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics. USA, Philadelphia.
- Hernández Navarro, A. y Reyes Ibarra, M.A. (1985). **TOPOGRAFÍA MODERNA**. División de Educación Continua, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México. México, DF.
- Kuang, S. (1996). **GEODETIC NETWORK ANALYSIS AND OPTIMAL DESIGN. Concepts and Applications**. Ann Arbor Press, Inc. USA, Michigan.
- Rüeger, J.M. (1996). **ELECTRONIC DISTANCE MEASUREMENT**. Cuarta edición. Springer-Verlag. Alemania, Berlín.

Sosa Torres, R. (1996). **BASES TEÓRICAS Y CÁLCULO DE AJUSTES EN INGENIERÍA TOPOGRÁFICA**. Segunda edición. Proyecto y Ejecución Editorial, SA de CV México, DF.

Wolf. R.P. y Ghilani, C.D. (1997). **ADJUSTMENT COMPUTATIONS. Statistics and Least Squares in Surveying and GIS**. Wiley Series in Surveying and Boundary Control. Jhon Wiley & Sons, Inc. USA, New York.

Esta publicación consta de 1 113 ejemplares y se terminó de imprimir en septiembre de 2009 en los talleres gráficos del **Instituto Nacional de Estadística y Geografía**
Av. Héroe de Nacozari Sur Núm. 2301, Puerta 11, Nivel Acceso
Fracc. Jardines del Parque, CP 20276
Aguascalientes, Ags.
México



INSTITUTO NACIONAL DE ESTADÍSTICA Y GEOGRAFÍA
www.inegi.org.mx
ISBN 970-607-494-022-0

MÉXICO