

Sistemas de ecuaciones lineales

1. Estudiar los siguientes sistemas lineales en \mathbb{R} .

$$(a) \begin{cases} -x + y - z = -1 \\ 4x + 2y - z = 5 \\ x + z = 2 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

$$(h) \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y - z = 5 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ 6x + 3y - z = 2 \\ x + z = 3 \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x + 4y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$(i) \begin{cases} 2x + y - 4z = 1 \\ 2x - y = 3 \\ 4x - 3y + 2z = 7 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ 6x + 3y - z = 2 \\ x + z = 2 \end{cases}$$

$$(f) \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x + 4y - 2z = 1 \end{cases}$$

$$(j) \begin{cases} x + 2y - 3z = -4 \\ -1x + y + 5z = 1 \\ 2x - y - z = -2 \end{cases}$$

2. Resolver y discutir los siguientes sistemas de ecuaciones en función de $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$(a) \begin{cases} x + y - z = 2 \\ x + 2y + z = 3 \\ x + y + (\lambda - 5)z = 2 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 2x + 4y + z = 2 \\ 4x + 7y + (1 + \lambda)z = 3 \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} x + \mu y - z = 2\mu + 1 \\ x - \mu^2 y - z = \mu \\ \mu x + \mu y + \mu z = 1 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 2 \\ x + 3y + 2z = \lambda \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} x + y + \mu z = 1 \\ x + \mu y + z = 1 \\ \mu x + y + z = -2 \end{cases}$$

$$(f) \begin{cases} \mu x + y - z = \mu - 3 \\ (\mu + 1)x + (\mu + 1)z = 3\mu \\ x + \mu y + z = 0 \end{cases}$$

3. Resolver los siguientes problemas:

- Calcula un número sabiendo que la suma de sus dos cifras es 10; y que, si invertimos el orden de dichas cifras, el número obtenido es 36 unidades mayor que el inicial.
- La razón entre las edades de dos personas es de $2/3$. Sabiendo que se llevan 15 años, ¿Cuál es la edad de cada persona?
- Un número excede en 12 unidades a otro; y si restáramos 4 unidades a cada uno de ellos, entonces el primero sería igual al doble del segundo. Plantea un sistema y resuélvelo para hallar los dos números.
- La suma de las edades de un padre y de sus dos hijos es 48. Dentro de diez años el doble de la suma de las edades de los hijos excederá en 6 años a la edad del padre. Cuando nació el pequeño, la edad del padre excedía 26 unidades al triple de la edad que tenía el hijo mayor. Calcula la edad de los tres.
- Un grupo de personas se reúne para ir de excursión, juntándose un total de 20 entre hombres, mujeres y niños. Contando hombres y mujeres juntos, su número resulta ser el triple del número de niños. Además, si hubiera acudido una mujer más, su número igualaría al de hombres. ¿Cuántos hombres, mujeres y niños han ido de excursión?
- Una tienda posee tres tipos de conservas cárnicas: A, B y C. Un cliente compra el primer mes 30 unidades de A, 20 de B y 10 de C, teniendo que abonar \$84. Al mes siguiente compra 20 unidades de A y 25 de C y abona \$69. Sabiendo que el precio medio de los tres productos es \$1.5., encuentra el precio de cada una de las unidades.
- Un joyero tiene monedas de tres clases: A, B y C. Las monedas del tipo A tienen un gramo de oro, dos de plata y siete de cobre; las del tipo B tienen tres gramos de oro, dos de plata y cinco de cobre; finalmente, las del tipo C tienen cuatro gramos de oro, tres de plata y tres de cobre. ¿Cuántas monedas de cada tipo debe fundir para obtener una moneda de 22 gramos de oro, 22 de plata y 56 de cobre?

4. Determinar los valores de $m \in \mathbb{R}$ para los cuales el rango de la matriz ampliada del sistema S es igual al rango de la matriz de coeficientes asociada.

$$(a) \begin{cases} -x + 2y + z = 5 \\ x - y + 3z = -1 \\ -x + 3y + 5z = m \end{cases} \quad (b) \begin{cases} 3x + y - 10z = 1 \\ -x + 3y = -7 \\ x + mz = 1 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} -x + 2y + 4z = -7 \\ y + 2x = -3 \\ x - y + mz = 4 \end{cases}$$

5. Calcular el rango de la matriz M y deducir la naturaleza del sistema homogéneo $A.X = 0$

$$(a) M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \quad (b) M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad (c) M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

6. Dadas las ecuaciones $\begin{cases} 3x - y + z = 3 \\ x - 2y - 3z = 1 \end{cases}$ agregar una tercera ecuación de manera que el sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas resultante tenga a $(0, -2, 1)$ como única solución.

7. Encontrar, en cada caso, todos los valores de a y b , para los cuales el sistema cuya matriz ampliada es M , resulta compatible.

$$(a) M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \vdots & 1 \\ 2 & 2a & \vdots & b \end{pmatrix} \quad (b) M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & \vdots & b \\ 0 & a^2 - 9 & a - 3 & \vdots & a + b \end{pmatrix}$$

8. Se sabe que $(0, -2, 1)$ es una solución del sistema $\begin{cases} ax + y - bz = 1 \\ x - ay + z = 2 \end{cases}$ Encontrar todas las soluciones del sistema.