Matrices y determinantes

1. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

   calcular, cuando sea posible: A.B; B.A; B.C; C.B; (A.D).E; A.(D.E); A.E + B; E.A + B; C^2 + B; E.B + E.C; E.B - A.

2. Dados los conjuntos

   - $\{S_1 = A \in \mathcal{M}_{3\times3} : a_{ij} = a_{ji} \ 1 \leq i, \ j \leq 3\}$ (matrices simétricas)
   - $\{S_2 = A \in \mathcal{M}_{3\times3} : a_{ij} = -a_{ji} \ 1 \leq i, \ j \leq 3\}$ (matrices antisimétricas)
   - $\{S_3 = A \in \mathcal{M}_{3\times3} : a_{ij} = 0 \ si \ i > j\}$ (matrices triangulares superiores)
   - $\{S_4 = A \in \mathcal{M}_{3\times3} : a_{ij} = 0 \ si \ i \neq j\}$ (matrices diagonales)

   (a) Escribir 3 matrices que pertenezcan a cada uno de los conjuntos dados.

   (b) Investigar si las siguientes matrices pertenecen a uno, más de uno o ningún conjunto.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   - Una matriz A es simétrica $\iff$ $A^t = A$. Probar que $A + A^t$ es simétrica $\forall A \in \mathcal{M}_{nxn}$
   - Una matriz A es antisimética $\iff$ $A^t = -A$. Probar que $A - A^t$ es simétrica $\forall A \in \mathcal{M}_{nxn}$

3. Considere las matrices A= $\begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y C = $\begin{pmatrix} a & a^2+2 & 5 \\ -3a^2 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

   (a) Determine α para que la matriz A sea simétrica. En las próximas secciones trabaje con ese valor de α.

   (b) Determine B^t, $A * B$, $(A * B)^t$, $B^t * A^t$.

   (c) Determine $A^t * B^t$, si existe.

   (d) Determine a para que la matriz C sea simétrica.

4. Considere las matrices A= $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (a) Calcule la matriz inversa de A y resolver $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   (b) Calcule la matriz inversa de B y resolver $B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

5. Considere las matrices A= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

   (a) Calcule la matriz inversa de A.

   (b) Resuelva $AX - 2I = B$

6. Determinar en cada caso los valores de a, b, c que hacen que la matriz A, sea invertible.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

7. Calcule los siguientes determinantes:

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 3 \\ \frac{3}{2} & -1 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$

8. Calcule los siguientes determinantes desarrollando por la fila o columna más conveniente:

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -1 & -3 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 9 & 6 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

9. Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5$, determine los determinantes de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \\ -g & -h & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c \\ d-3a & e-3b & f-3c \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a+5c & 3b & c \\ d+5f & 3e & f \\ 2g+10i & 6h & 2i \end{pmatrix}$$

10. Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & 9 \\ d & 9 \end{vmatrix} = 5$, calcular $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 9 & a & 9 \\ 9 & d & 9 \end{vmatrix}$

11. (a) Dadas A = $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, calcular det(A.B)

(b) Dadas A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 2 & k+1 \\ k-2 & -1 \end{pmatrix}$, hallar los valores de $k \in \mathbf{R}$ para los cuales el det(A.B) $= 0$

(c) Si A = $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ y B = $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & k \\ 0 & k & 2 \end{vmatrix}$ determinar todos los valores de $k \in \mathbf{R}$ para los cuales A.B no admite inversa.

12. Si A = $\begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ y B = $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$, determinar los valores de $a \in \mathbf{R}$ para los cuales

(a) det(A+B) $= 3$

(b) $|A + A^t| = -29$

13. Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$

(a) Si $A^3 = A$. Calcular los posibles valores para el det(A).

(b) Si $|A| = 5$. Calcular $|B| / B = 2.A^2.A - 1$

14. Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, $B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ y $k \in \mathbf{R}$. Demostrar las siguientes propiedades o dar un contraejemplo en caso que no se cumplan.

(a) $|A + B| = |A| + |B|$

(b) $|kA| = k|A|$

(c) $|kA| = k^n|A|$