Universidad de la República **Geometría y Álgebra Lineal 2**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Primer semestre 2024**

PRÁCTICO 9: ISOMETRÍAS EN $\mathbb{R}^n$.

Recuerda: Si $\mathbb{K}$ es un cuerpo (usualmente $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), entonces:

- $\mathbb{K}_n[x]$ denota el espacio de polinomios de grado menor $n+1$ con coeficientes en $\mathbb{K}$.
- $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ denota el espacio de matrices con coeficientes en $\mathbb{K}$ de m filas y n columnas.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$.
- A menos que se indique lo contrario, considera en $\mathbb{R}^n$ y en $\mathbb{C}^n$ los productos internos usuales, en $\mathbb{R}_n[x]$ el producto interno $\langle p,q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$, y en $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ el producto interno $\langle A,B\rangle = tr(AB^t)$.

EJERCICIO 1. Sea $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ una simetría especular con respecto a un plano α que pasa por el origen. Indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones justificando las respuestas.

a. Existe $\mathbb{B}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ tal que ${}_{\mathbb{B}}(T)_{\mathbb{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

b. Si $\mathbb{B}$ y $\mathbb{B}'$ son bases ortonormales de $\mathbb{R}^3$, entonces existe una matriz ortogonal P para la cual se cumple $P.{}_{\mathbb{B}}(T)_{\mathbb{B}}.P^T = {}_{\mathbb{B}'}(T)_{\mathbb{B}'}$

c. T^3 es una rotación axial de ángulo $\frac{\pi}{2}$ y eje normal a α.

EJERCICIO 2. Sea $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2 \,/\, T(v) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.v$

Demuestra que es una isometría, clasífícala y determina todos sus elementos.

EJERCICIO 3. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno.
Sea $S\subset V$ un subespacio vectorial no trivial y $P_S:V\to V$ la proyección ortogonal sobre S.
Se define $T:V\to V \,/\, T = Id - 2P_S$.

Indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones justificando las respuestas.

a. Existe $\mathbb{B}$ una base ortonormal de V tal que ${}_{\mathbb{B}}(T)_{\mathbb{B}} = \begin{pmatrix} Id & 0 \\ 0 & -Id \end{pmatrix}$.

b. T es autoadjunta.

c. T es unitaria.

EJERCICIO 4. Sea $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que para cierta base ortonormal $\mathbb{B}=\{e_1,e_2,e_3\}$ se conoce la matriz asociada ${}_{\mathbb{B}}(T)_{\mathbb{B}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Demuestra que T es una isometría, clasífícala y determina todos sus elementos.

EJERCICIO 5. Sea $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ una simetría especular con respecto al plano $\alpha: x+y-z=0$.
Considera las bases

$$\mathbb{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,1), \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1) \right\}, \quad \mathbb{E} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

Encuentra la matriz asociada ${}_{\mathbb{E}}(T)_{\mathbb{E}}$ e investiga si existe una matriz ortogonal P para la cual se cumple que $P.{}_{\mathbb{B}}(T)_{\mathbb{B}}.P^T = {}_{\mathbb{E}}(T)_{\mathbb{E}}$. Justifica.

Ejercicio 6. Se consideran

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \ / \ T(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y, x + y), \qquad S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \ / \ S(x, y) = (y, x)$$

Demuestra que $S \circ T^2$ es una isometría, clasifícala y encuentra todos sus elementos.

Ejercicio 7. Se considera

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \ / \ T(x, y, z) = (ax + y, x, z)$$

Encuentra a para que T sea ortogonal y clasifícala, estudiándola completamente para el valor hallado de a.