

PRÁCTICO 8: OPERADORES ORTOGONALES Y UNITARIOS.

Recuerda: Si \mathbb{K} es un cuerpo (usualmente \mathbb{R} o \mathbb{C}), entonces:

- $\mathbb{K}_n[x]$ denota el espacio de polinomios de grado menor $n + 1$ con coeficientes en \mathbb{K} .
- $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ denota el espacio de matrices con coeficientes en \mathbb{K} de m filas y n columnas.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$.
- A menos que se indique lo contrario, considera en \mathbb{R}^n y en \mathbb{C}^n los productos internos usuales, en $\mathbb{R}_n[x]$ el producto interno $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$, y en $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ el producto interno $\langle A, B \rangle = tr(AB^t)$.

1. Operadores ortogonales, operadores unitarios e isometrías.

EJERCICIO 1. Prueba que las siguientes transformaciones lineales son isometrías e investiga si son sobreyectivas.

a.

$$T : \mathbb{R}_1[x] \rightarrow \mathbb{R}^2 / T(a + bx) = \left(a + \frac{b}{2}, \frac{b}{2\sqrt{3}} \right)$$

b.

$$T : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^4 / T \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = \left(\frac{-a + 2b + 2c}{3}, \frac{2a - b + 2c}{3}, \frac{2a + 2b - c}{3}, d \right)$$

c.

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}) / T(x, y) = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 2.

a. Prueba que $T : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ dada por

$$T \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} d & a \\ b & c \end{pmatrix}.$$

es ortogonal.

b. Prueba que $T : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ dada por $T(1, 1) = (-i, i)$ y $T(1, -1) = (i, i)$ es unitaria.

c. Se considera \mathbb{R}^4 con el producto interno habitual y $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ dada por

$$\begin{aligned} T(2, 2, 2, 2) &= (4, 0, 0, 0), & T(2, 0, 2, 2) &= (3, -1, 1, 1), \\ T(2, 2, 0, 2) &= (3, 1, -1, 1), & T(2, 2, 2, 0) &= (3, 1, 1, -1). \end{aligned}$$

Investiga si T es ortogonal.

EJERCICIO 3. Prueba que la composición de transformaciones lineales unitarias (ortogonales) es unitaria (ortogonal).

EJERCICIO 4. ¿Existe un operador unitario $T : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ que cumpla que $T(1, 1) = e^{i(2+i)}(1, 1)$?

EJERCICIO 5. Sea V un espacio vectorial con producto interno sobre el cuerpo \mathbb{K} (\mathbb{C} o \mathbb{R}) y T un operador lineal en V . Prueba las propiedades que se enuncian a continuación:

- Si T es autoadjunto y unitario (u ortogonal) $\Rightarrow T^2 = Id$.
- Si T es autoadjunto y $T^2 = Id \Rightarrow T$ es unitario (u ortogonal).
- Si T es unitario (u ortogonal) y $T^2 = Id \Rightarrow T$ es autoadjunto.

EJERCICIO 6. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno sobre el cuerpo \mathbb{K} (\mathbb{C} o \mathbb{R}) y $S \subset V$ un subespacio no trivial.

- Prueba que si T es un operador unitario en V y S es invariante bajo T , entonces $T|_S$ es un operador unitario (u ortogonal) en S .
- Prueba que si $T : S \rightarrow V$ es una transformación lineal tal que $\|T(s)\| = \|s\| \quad \forall s \in S$, entonces existe un operador unitario (u ortogonal) $\tilde{T} : V \rightarrow V$ tal que $\tilde{T}(s) = T(s) \quad \forall s \in S$.

EJERCICIO 7. Sea $T : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ un operador lineal tal que $T(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$, $T(0, 1, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, i, i)$ y $T(0, 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1)$. Indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones justificando las respuestas.

- T es unitaria.
- T preserva la norma.
- $T|_S : S \rightarrow S$ es unitaria donde $S = \{(x, y, z) : x = 0\}$.

2. Representaciones matriciales: matrices ortogonales y matrices unitarias

EJERCICIO 8.

- Halla todas las matrices ortogonales cuya primera columna sea colineal con $(1, 1)$.
- Halla todas las matrices unitarias cuya primera columna sea colineal con $(1, 1 - i)$.

EJERCICIO 9. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Prueba que A es ortogonal $\Leftrightarrow A^t$ es ortogonal.
- Deduce que A es ortogonal \Leftrightarrow sus filas forman una base ortonormal de \mathbb{R}^n , considerado con el producto interno habitual.
- Enuncia y demuestra el resultado análogo para matrices complejas unitarias.

EJERCICIO 10.

- ¿Es cierto que la matriz $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\theta} & e^{-i\theta} \\ ie^{i\theta} & -ie^{-i\theta} \end{pmatrix}$ es unitaria para todo $\theta \in \mathbb{R}$? Justifica tu respuesta.
- Muestra que si P es una matriz ortogonal entonces $e^{i\theta}P$ es unitaria para todo $\theta \in \mathbb{R}$.

EJERCICIO 11. Demuestra que la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es unitaria y encuentra una matriz D diagonal y una matriz P unitaria tal que $A = PD\bar{P}^t$.

EJERCICIO 12.

- Verifica que la matriz A es unitaria y encuentra una matriz unitaria P tal que $D = \bar{P}^t A P$ sea diagonal.

$$(i) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (ii) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (iii) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- b. Observa que las matrices de las partes (ii) y (iii) son ortogonales. ¿Existe una matriz ortogonal P tal que $D = P^t A P$ sea diagonal?

EJERCICIO 13.

- A. Sea $\theta \in \mathbb{R}$, se considera en \mathbb{R}^2 con el producto interno usual, el operador $R_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por

$$c(R_\theta)c = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

donde \mathcal{C} es la base canónica de \mathbb{R}^2 .

- a) Prueba que R_θ es ortogonal $\forall \theta \in \mathbb{R}$.
 b) Determina los valores de $\theta \in \mathbb{R}$ para los cuales R_θ es diagonalizable.
- B. Se considera, en \mathbb{C}^2 con el producto interno usual, el operador lineal U dado por:

$$U(1, i) = (e^{i\theta}, ie^{i\theta}) \quad \text{y} \quad U(1, -i) = (e^{-i\theta}, -ie^{-i\theta}).$$

- a. Prueba que U es unitario.
 b. Halla una base ortonormal de \mathbb{C}^2 en la cual U se diagonaliza.
 c. Tomando combinaciones lineales de $(1, i)$ y $(1, -i)$ construye una base \mathcal{B} de \mathbb{C}^2 cuyas componentes sean reales y además verifique

$$_{\mathcal{B}}(U)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$