PRÁCTICO 7: OPERADORES AUTOADJUNTOS.

Recuerda: Si $\mathbb{K}$ es un cuerpo (usualmente $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), entonces:

- $\mathbb{K}_n[x]$ denota el espacio de polinomios de grado menor $n+1$ con coeficientes en $\mathbb{K}$.
- $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ denota el espacio de matrices con coeficientes en $\mathbb{K}$ de m filas y n columnas.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$.
- A menos que se indique lo contrario, considera en $\mathbb{R}^n$ y en $\mathbb{C}^n$ los productos internos usuales, en $\mathbb{R}_n[x]$ el producto interno $\langle p, q\rangle = \displaystyle\int_0^1 p(x)q(x)dx$, y en $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ el producto interno $\langle A, B\rangle = tr(AB^t)$.

1. Operadores autoadjuntos

Ejercicio 1. En un $\mathbb{R}$-espacio vectorial V de dimensión finita con producto interno, se considera el operador lineal $T : V \to V$ tal que $T(v) = \langle v, u_0\rangle\, u_1$ donde u_0 y u_1 son vectores no nulos (fijos) de V. Hallar T^*. ¿Qué condiciones tienen que cumplir los vectores u_0 y u_1 para que T sea autoadjunto?

Ejercicio 2. Sean T_1 y T_2 operadores autoadjuntos

a. Probar que $T_1 + T_2$ es autoadjunto y que αT_1 es autoadjunto $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
b. Dar un ejemplo que muestre que $T_1 \circ T_2$ no tiene por que ser autoadjunto.
c. Probar que $T_1 \circ T_2$ es autoadjunto $\Leftrightarrow$ T_1 y T_2 conmutan.

2. Representación matricial, matrices simétricas y matrices hermíticas.

Ejercicio 3.

a. En $\mathbb{R}^3$ con el producto interno habitual se considera
   i. el operador lineal T tal que

$$_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

   siendo $\mathcal{B} = \{(1,1,0), (0,1,0), (1,0,1)\}$. Probar que T es autoadjunta.
   ii. el operador lineal S tal que

$$_{\mathcal{B}}(S)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   siendo $\mathcal{B} = \{(1,1,0), (0,1,0), (1,0,1)\}$. ¿Es S autoadjunta?

b. En $\mathbb{C}^2$ con el producto interno habitual se considera el operador lineal T tal que

$$_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1+i & i \\ -2i & 1-i \end{pmatrix}$$

siendo $\mathcal{B} = \{(1,1), (0,1)\}$. Probar que T es autoadjunta.

c. Se considera en $\mathbb{R}^3$ el producto interno habitual. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineal dada por:

$$T(1,1,0) = (5,8,-1), \;\; T(1,-1,1) = (10,-14,10), \;\; T(2,1,1) = (13,a,b)$$

Hallar a y b para que T sea autoadjunta.

3. Teoría Espectral de operadores autoadjuntos.

Ejercicio 4. En los siguientes casos probar que T es autoadjunto, hallar su forma diagonal y una base ortonormal del espacio formada por vectores propios de T.

a. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x,y,z) = \left(\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}z, 2y, \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}z\right)$.

b. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x,y,z) = \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}z, -y, -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}z\right)$.

Ejercicio 5.

a. Para cada matriz A verificar es simétrica real y hallar una matriz P ortogonal (esto es $P^{-1} = P^t$) tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal

$$\text{(i) } A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{(ii) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(iii) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

b. Verificar que $A = \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 1 & 1-i \end{pmatrix}$ es una matriz simétrica compleja **no** diagonalizable.

c. Para cada matriz A verificar que es hermítica y hallar una matriz P unitaria (esto es $P^{-1} = \overline{P}^t$) tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal:

$$\text{(i) } A = \begin{pmatrix} 4 & 1-i \\ 1+i & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{(ii) } A = \begin{pmatrix} 3 & -i \\ i & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{(iii) } A = \begin{pmatrix} 6 & 2+2i \\ 2-2i & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{(iv) } A = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ -i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 6. Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ simétrica y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ los valores propios de A.

a. Probar que $tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$ y $det(A) = \lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_n$

b. (i) Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ son no nulos y $\lambda_{r+1} = \lambda_{r+2} = \cdots = \lambda_n = 0$ probar que $rg(A) = r$.
(ii) Si además A es idempotente (esto es $A^2 = A$) demostrar que $rg(A) = tr(A)$.

Ejercicio 7. Sea $A \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ una matriz simétrica. Se sabe que λ y μ son valores propios distintos de A, con $mg(\lambda) = mg(\mu) = 2$. Además se sabe que los vectores $(1,1,0,0)$ y $(1,1,1,1)$ pertenecen a S_λ (subespacio propio asociado a λ). Entonces una base de S_μ (subespacio propio asociado a μ) es:

a. $\mathcal{B} = \{(1,-1,0,0), \ (0,1,-1,0)\}$.
b. $\mathcal{B} = \{(0,1,-1,0), \ (0,0,1,-1)\}$.
c. $\mathcal{B} = \{(0,0,1,-1), \ (-1,0,0,1)\}$.
d. $\mathcal{B} = \{(-1,0,0,1), \ (1,-1,0,0)\}$.
e. $\mathcal{B} = \{(1,-1,0,0), \ (0,0,1,-1)\}$.

Ejercicio 8. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno. Sea S un subespacio de V y $T : V \to V$ un operador lineal. Probar que si T es autoadjunto y S es invariante por T entonces existe una base ortonormal de S formada por vectores propios de T.

EJERCICIO 9. [2do parcial curso 2005] En $\mathbb{R}^3$ con el producto interno usual consideramos la base $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ tal que $\langle u_1, u_2\rangle = \langle u_1, u_3\rangle = 0$, $\langle u_2, u_3\rangle = \dfrac{1}{2}$ y los operadores T y S definidos por

$$_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad _{\mathcal{B}}(S)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Estudiar si T y S son operadores autoadjuntos.

EJERCICIO 10. [Examen Diciembre 2005] En $\mathbb{R}^3$ con el producto interno usual consideramos el operador autoadjunto $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

a. $T(x, y, z) = 4(x, y, z)$ para todo $(x, y, z) \in U = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ 3x + 2z = 0\big\}$.
b. $\det(T) = -48$.

Calcular $T(3, 0, 2)$.

EJERCICIO 11. Se consideran los operadores lineales $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ y $S : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tales que

$$_{\mathcal{C}}(T)_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad _{\mathcal{C}}(S)_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

siendo $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{R}^4$.
Hallar una base $\mathbb{R}^4$ formada por vectores propios de ambos operadores.

EJERCICIO 12.

a. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $\mathcal{B}$ una base de V cualquiera. Probar que existe un producto interno $\langle\ ,\ \rangle$ en V para el cual $\mathcal{B}$ es ortonormal.
b. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$ y $T : V \to V$ una transformación lineal. Probar que T es diagonalizable si, y sólo si, existe un producto interno en V para el cual T es autoadjunta.
c. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$ y $T : V \to V$ una transformación lineal diagonalizable. Si $S \subset V$ es un subespacio invariante bajo $T \Rightarrow S$ tiene una base formada por vectores propios de T.