Universidad de la República **Geometría y Álgebra Lineal 2**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Primer semestre 2024**

PRÁCTICO 5: COMPLEMENTO ORTOGONAL, PROYECCIÓN ORTOGONAL.

Recuerda: Si $\mathbb{K}$ es un cuerpo (usualmente $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), entonces:

- $\mathbb{K}_n[x]$ denota el espacio de polinomios de grado menor $n+1$ con coeficientes en $\mathbb{K}$.
- $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ denota el espacio de matrices con coeficientes en $\mathbb{K}$ de m filas y n columnas.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$.

1. Complemento ortogonal

EJERCICIO 1. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno.

1. Prueba que para todo par de subconjuntos A y B de V, valen:
   a) Si $A \subset B \quad \Rightarrow \quad B^\perp \subset A^\perp$,
   b) $A^\perp = [A]^\perp$,
   c) $A \subset (A^\perp)^\perp$.
2. Prueba que para todo par de subespacios S y W de V, valen:
   a) $S = (S^\perp)^\perp$,
   b) $(S+W)^\perp = S^\perp \cap W^\perp$,
   c) $(S\cap W)^\perp = S^\perp + W^\perp$.
3. Haz una interpretación geométrica de los resultados anteriores.

EJERCICIO 2.

1. En $\mathbb{C}^3$, con el producto interno habitual, se considera el subespacio $S = \big[(i,0,1)\big]$.
   Halla una base del subespacio $S^\perp$.
2. En $\mathbb{R}^3$, se considera el subespacio $S = \big[(1,2,1)\big]$. Calcula $S^\perp$ con:
   a) el producto interno habitual de $\mathbb{R}^3$;
   b) el producto interno $\big\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\big\rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1$.

EJERCICIO 3.

1. Sea $S = [(3,5,1)] \cup \{(0,1,1)\}$ un subconjunto de $\mathbb{R}^3$.
   Calcula $S^\perp$ para el producto interno en $\mathbb{R}^3$ dado por $\langle (x,y,z),(x',y',z')\rangle = xx' + 2yy' + 3zz'$.
2. Sea el conjunto $A = \big\{(n,2n,4n) : n \in \mathbb{N}\big\} \cup \big\{(1,1,1)\big\}$ en $\mathbb{R}^3$. Calcula $A^\perp$ para el producto interno dado por $\big\langle (x,y,z),(x',y',z')\big\rangle = xx' + 2yy' + 3zz'$.

EJERCICIO 4. Sea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ con el producto interno dado por $\langle A,B\rangle = tr(AB^t)$.

1. Halla una base ortonormal de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ para este P.I.
2. Sea $\mathcal{D}$ el subespacio de las matrices diagonales, halla $\mathcal{D}^\perp$.
3. Sea $\mathcal{S}$ el subespacio de las matrices simétricas, halla $\mathcal{S}^\perp$.

EJERCICIO 5.

1. Sea V es un espacio vectorial con producto interno y sea S un subespacio vectorial de V.
   Si $\{s_1,s_2,\dots,s_r\}$ es una base ortonormal de S y $\{s_1,s_2,\dots,s_r,v_{r+1},\dots,v_n\}$ una base ortonormal de V, prueba que entonces $\{v_{r+1},\dots,v_n\}$ es una base ortonormal de $S^\perp$.
2. Se considera $\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + \alpha x_3y_3 + x_1y_3 + x_3y_1$ un producto interno en $\mathbb{R}^3$ y los vectores $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (1,0,-1)$ y $v_3 = (0,0,1)$.

a. Halla α para que v_1 y v_2 sean ortogonales.
b. Para el α hallado, utiliza el método de Gram-Schmidt para construir una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ a partir de $\{v_1, v_2, v_3\}$.
c. Para el α hallado, halla una base de $[(1,1,1)]^{\perp}$.

2. Proyección ortogonal

EJERCICIO 6. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno, $S \subset V$ un subespacio vectorial y $P_S(v)$ la proyección ortogonal de v sobre S. Es decir, $P_S(v)$ es el único vector que verifica que $P_S(v) \in S$ y $v - P_S(v) \in S^{\perp}$.
Prueba que:

1. $P_S(s) = s \ \forall s \in S$.
2. $P_S(v) = \vec{0} \ \forall v \in S^{\perp}$.
3. La función $P_S : V \to V$ dada por $v \overset{P_S}{\mapsto} P_S(v)$ es una transformación lineal.
4. Hallar la matriz asociada de P_S en una base construída uniendo una base de S con una de $S^{\perp}$.
5. Hallar el núcleo y la imagen de P_S.
6. Hallar valores propios y subespacios propios de P_S, ¿Es P_S diagonalizable?
7. $||v||^2 = ||P_S(v)||^2 + ||P_{S^{\perp}}(v)||^2 \quad \forall v \in V$.
8. $||P_S(v)|| \leq ||v||$.
9. $\langle v, P_S(v)\rangle = ||P_S(v)||^2 \quad \forall v \in V$.

EJERCICIO 7. Encuentra $P_S(v)$ para el producto interno, el subespacio S y el vector v dados en cada caso.

1. $V = \mathbb{R}^4$ con el P.I. habitual; $S = \big[(1,-1,1,1),(2,1,0,3)\big]$ y $v = (x,y,z,t)$ cualquiera.
2. $V = \mathbb{R}^3$ con el P.I. dado por $\big\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\big\rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2 + x_3y_3$; $S = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ y - z = 0\big\}$ y $v = (1,-1,0)$.
3. $V = \mathbb{C}^3$ con el P.I. habitual; $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 : \ \ x + (1+i)y - z = 0\}$ y $v = (0,1,i)$.

EJERCICIO 8. En los siguientes casos consideramos los productos internos usuales.

1. Sea $P_S : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la proyección ortogonal sobre el plano $S = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ \ x - 2y + z = 0\big\}$. Halla la matriz asociada a P_S en las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$.
2. Sea $P_S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la proyección ortogonal sobre la recta $S = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^{:} \ \ y = 3x\big\}$. Halla la matriz asociada a P_S en las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$.

EJERCICIO 9. Consideramos en $\mathbb{R}_3[t]$ el producto interno dado por $\langle p, q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} p(t)q(t)\,dt$.

1. Halla una base ortonormal del subespacio $\mathbb{R}_2[t] \subset \mathbb{R}_3[t]$.
2. Halla la proyección ortogonal del polinomio $p : p(t) = t^3$ sobre el subespacio $\mathbb{R}_2[t]$.
3. Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que
$$F(a,b,c) = \int_{-1}^{1} (at^2 + bt + c - t^3)^2 \, dt$$
Halla el mínimo de F en $\mathbb{R}^3$ utilizando herramientas del álgebra lineal. En este caso, eligiendo una proyección adecuada.

EJERCICIO 10. Se considera un sistema de ecuaciones $A\vec{X} = \vec{b}$. La existencia de una solución $\vec{X}_0$ del sistema, equivale a decir que el vector $\vec{b}$ puede expresarse como combinación lineal de las columnas de la matriz A, siendo las componentes de $\vec{X}_0$ los coeficientes de dicha combinación lineal.
Cuando el sistema es incompatible, se llama solución aproximada a aquel vector $\vec{w}$ perteneciente al

subespacio generado por las columnas de A que está más cerca del vector $\vec{b}$, o sea, que minimiza $||\vec{w} - \vec{b}||$. Teniendo esto en mente, resuelve el siguiente problema:

En una carrera de autos hay tres tipos de autos, los cuales consumen 4 tipos de combustibles A,B,C y D. La siguiente tabla muestra cuánto de cada combustible necesita cada tipo de auto para una carrera, expresado en litros:

Tipo de auto	Tipo A	Tipo B	Tipo C	Tipo D
Fiat	25	30	40	25
Ford	10	45	35	20
Chevrolet	15	30	20	45

Si en total se disponen de 150 litros del combustible A, 220 del B, 210 del C y 170 del D para realizar la carrera, ¿Cuántos autos de cada tipo pueden participar?. Se asume que todo el combustible es consumido y que ningún auto choca durante la carrera.

EJERCICIO 11. En un experimento se midió según el tiempo, una cierta magnitud y, obteniéndose los siguientes valores:

t	0	1	3	4
y	0	1	2	5

1. Grafica y contra t.
2. Aplicando el método de mínimos cuadrados halla la "mejor recta" que ajusta los datos anteriores ($y = \alpha t + \beta$) y grafica la solución.
3. Aplicando el método de mínimos cuadrados halla la "mejor parábola" que ajusta los datos anteriores ($y = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$) y grafica la solución.