

PRÁCTICO 4: PRODUCTO INTERNO, NORMA INDUCIDA Y ORTOGONALIDAD..

Recuerda: Si \mathbb{K} es un cuerpo (usualmente \mathbb{R} o \mathbb{C}), entonces:

- $\mathbb{K}_n[x]$ denota el espacio de polinomios de grado menor $n + 1$ con coeficientes en \mathbb{K} .
- $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ denota el espacio de matrices con coeficientes en \mathbb{K} de m filas y n columnas.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$.

1. Producto interno y norma inducida.

EJERCICIO 1. En cada caso, prueba que $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ es un producto interno en V .

1. $V = \mathbb{R}^3$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\langle (x, y, z), (x', y', z') \rangle = xx' + 2yy' + 3zz'$.
2. $V = \mathbb{C}^2$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, y $\langle (x, y), (x', y') \rangle = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{x'} \\ \overline{y'} \end{pmatrix}$
3. $V = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^t)$. ¿Es posible *ajustar* este producto interno para que funcione para las matrices complejas? ¿Cómo?

EJERCICIO 2. En cada caso, prueba que $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ **no** es un producto interno en V .

1. $V = \mathbb{R}_3[x]$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\langle p, q \rangle = p(1)q(1)$.
2. $V = \mathbb{R}^2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\langle (x, y), (x', y') \rangle = x|x'| + y|y'|$.
3. $V = \mathbb{R}^2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\langle (a, b), (c, d) \rangle = ac - bd$.
4. $V = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A + B)$.
5. $V = C[0, 1]$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\langle f, g \rangle = \int_0^{1/2} f(t)g(t)dt$.

EJERCICIO 3. Indica si las siguientes afirmaciones sobre un espacio vectorial con producto interno son verdaderas o falsas. Justifica tus respuestas.

1. Un producto interno es lineal en ambas componentes.
2. $\langle v_1 + v_2, w_1 + w_2 \rangle = \langle v_1, w_1 \rangle + \langle v_2, w_2 \rangle \quad \forall v_1, v_2, w_1, w_2 \in V$.
3. Si $\langle v, w \rangle = 0 \quad \forall w \in V$, entonces $v = \mathbf{o}$.

EJERCICIO 4. Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un producto interno cualquiera.

1. Prueba que existe una matriz $A := (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $\forall \vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ y $\forall \vec{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$,

se satisface $\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle = \vec{X}^t A \vec{Y}$. Para la prueba, observa que si $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ es base canónica de \mathbb{R}^n , entonces $\vec{X} = \sum_{i=1}^n a_i^X \cdot e_i$ e $\vec{Y} = \sum_{j=1}^n a_j^Y \cdot e_j$. Aplicando la definición de producto interno podrás encontrar ciertos $a_{ij} \in \mathbb{R} \quad \forall i, j = 1, \dots, n$ tales que

$$\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle = a_{11}x_1y_1 + \dots + a_{1n}x_1y_n + a_{21}x_2y_1 + \dots + a_{2n}x_2y_n + \dots + a_{n1}x_ny_1 + \dots + a_{nn}x_ny_n.$$

2. ¿Cuál producto interno se define si se considera que A es la matriz identidad?

EJERCICIO 5. Sea V un espacio vectorial real con producto interno y $\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}$ su norma inducida.

1. Ayúdate de una interpretación geométrica para probar:
 - a. La *Regla del paralelogramo*: $\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2, \forall v, w \in V.$
 - b. La *Fórmula de polarización*: $4\langle v, w \rangle = \|v + w\|^2 - \|v - w\|^2, \forall v, w \in V.$
2. Analiza si alguna de las propiedades anteriores sigue valiendo en un espacio vectorial complejo.

EJERCICIO 6. En los espacios vectoriales que se indican, calcula $\langle v, w \rangle, \|v\|^2, \|w\|^2$ y $\|v + w\|^2$. Verifica explícitamente que se satisfacen la *desigualdad de Cauchy-Schwarz* y también la *desigualdad triangular* para estos casos.

1. $V = \mathbb{C}^3$ con el producto interno habitual, $v = (2, 1 + i, i)$ y $w = (2 - i, 2, 1 + 2i)$.
2. $V = C[0, 1]$ con el producto interno $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$, $v : v(t) = t$ y $w : w(t) = e^t$.

2. Conjuntos ortogonales y ortonormales

EJERCICIO 7. Considera un espacio vectorial real V con producto interno y la norma inducida por él. Ayúdate de interpretaciones geométricas para:

1. Probar que si $v + w$ y $v - w$ son ortogonales, entonces v y w tienen la misma norma.
2. Probar que si u y v son ortogonales, entonces $\|u + \lambda v\| \geq \|u\| \forall \lambda \in \mathbb{R}.$

EJERCICIO 8. Considera $V = \mathbb{R}_2[t]$, con el producto interno $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(t)q(t)dt$.

Usa el método de Gram-Schmidt para construir una base ortonormal de V a partir de $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$.

EJERCICIO 9. En cada uno de los espacios vectoriales con producto interno que siguen, construye una base ortonormal del subespacio S que se indica.

1. $V = \mathbb{R}^4$ con el producto interno habitual y $S = [(1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 1), (-1, 0, 2, 1)]$.
2. $V = \mathbb{C}^3$ con el producto interno habitual y $S = [(1, i, 0), (1, 1, 1)]$.

EJERCICIO 10. Sea A en $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$. Prueba que si las columnas de A forman un conjunto ortonormal de vectores de \mathbb{R}^m con el producto interno habitual, entonces $A^t A = I_n$.

EJERCICIO 11. Define un producto interno en V para el cual la base \mathcal{B} resulta ser ortonormal. Observa que el resultado del ejercicio 4 puede ser especialmente útil para esta construcción.

1. $V = \mathbb{R}^2, \mathcal{B} = \{(1, 1), (2, -1)\}$.
2. $V = \mathbb{C}^2, \mathcal{B} = \{(1, i), (-1, i)\}$.
3. $V = \mathbb{C}^3, \mathcal{B} = \{(1, i, 1), (0, 0, 1), (0, 1, i)\}$.

EJERCICIO 12. Sea $\mathbb{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de un \mathbb{R} -espacio vectorial V con producto interno.

Prueba que si $\forall w = \sum_{i=1}^n a_i v_i \in V$, vale $\langle w, w \rangle = \sum_{i=1}^n a_i^2$, entonces \mathbb{B} es una base ortonormal de V .

EJERCICIO 13. En un espacio vectorial V con producto interno y considerando su norma inducida, prueba que si $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ es una base ortogonal, entonces se satisfacen:

1. $coord_{\mathcal{B}}[v] = \left(\frac{\langle v, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2}, \dots, \frac{\langle v, u_n \rangle}{\|u_n\|^2} \right), \forall v \in V.$
2. $\langle v, w \rangle = \frac{\langle v, u_1 \rangle \langle u_1, w \rangle}{\|u_1\|^2} + \dots + \frac{\langle v, u_n \rangle \langle u_n, w \rangle}{\|u_n\|^2}, \forall v, w \in V.$