PRÁCTICO 3: GERSCHGORIN Y JORDAN.

Recuerda: Si $\mathbb{K}$ es un cuerpo (usualmente $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), entonces:

- $\mathbb{K}_n[x]$ denota el espacio de polinomios de grado menor $n+1$ con coeficientes en $\mathbb{K}$.
- $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ denota el espacio de matrices con coeficientes en $\mathbb{K}$ de m filas y n columnas.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$.

1. Teorema de Gerschgorin

EJERCICIO 1. Considera $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j = \emptyset \quad (i \neq j)$, donde $\mathcal{C}_i$ son los círculos de Gerschgorin de A, con $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Prueba que todas las raíces del polinomio característico de A son reales y distintas.

EJERCICIO 2. ¿Es posible decidir si si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 \\ -3/2 & -1 \end{pmatrix}$ es diagonalizable utilizando únicamente el Teorema de Gerschgorin? Justifica.

EJERCICIO 3. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 14 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -9 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -20 \end{pmatrix}$.

1. Prueba que A es diagonalizable.
2. Determina el signo de los valores propios de A y deduce que A es invertible.

EJERCICIO 4.

1. Usando el teorema de Gerschgorin, extrae toda la información que puedas sobre los valores propios de la matriz $A = \begin{pmatrix} \frac{11}{2} & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -7 \end{pmatrix}$.
2. Usando el teorema de Gerschgorin, extrae toda la información que puedas sobre los valores propios de la matriz $B = \begin{pmatrix} \frac{11}{2} & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -7 \end{pmatrix}$.
3. Investiga si alguna de ellas es diagonalizable. Justifica.

EJERCICIO 5.

1. Utiliza el Teorema de Gerschgorin para acotar los valores propios de la matriz a continuación.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -10^{-5} & 2\times 10^{-5} \\ 4\times 10^{-5} & 0,5 & -3\times 10^{-5} \\ -10^{-5} & 3\times 10^{-5} & 0,1 \end{pmatrix}.$$
2. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $S = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Encuentra los círculos de Gerschgorin de la matriz $S^{-1}AS$.
3. Halla α de modo que el radio r_1 del círculo con centro en $(S^{-1}AS)_{1,1}$ sea tan pequeño como sea posible sin que este círculo se interseque con los otros dos.

4. Localiza el valor propio λ_1 de la matriz A en un círculo tan pequeño como sea posible. (Observa que los valores propios de A y $S^{-1}AS$ son los mismos).
5. Utiliza matrices análogas a S para obtener mejores aproximaciones de λ_2 y λ_3

Ejercicio 6. Sea $A = \begin{pmatrix} 15+3i & 1 & 1 \\ 2 & 7-4i & 1 \\ 1 & 2 & -5-5i \end{pmatrix}$.
Justifica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

1. A es diagonalizable.
2. A es invertible.
3. A tiene al menos un valor propio real.

2. Forma de Jordan

2.1. Subespacios invariantes

Recuerda: Si $T : V \to V$ es una transformación lineal y $S \subset V$ es un subespacio de V, decimos que S es un *subespacio invariante bajo* T (o T-invariante) si $T(s) \in S$ para todo vector $s \in S$.

Ejercicio 7. Sea $T : V \to V$ una transformación lineal.

1. Si W_1 y W_2 son subespacios de V invariantes bajo T, probar que $W_1 \cap W_2$ y $W_1 + W_2$ son dos subespacios invariantes bajo T.
2. Probar que si λ es valor propio de T, entonces el subespacio propio S_λ es un subespacio invariante bajo T.
3. Probar que si λ es valor propio de T y $W = [v_1, v_2]$, con $v_1 \in S_\lambda$ y $T(v_2) = v_1$, entonces W es un subespacio invariante bajo T.
4. Si W es un subespacio de V invariante bajo T y $dim(W) = 1$.
   a) Probar que los vectores no nulos de W son vectores propios de T.
   b) ¿W es un subespacio propio T? Justifique la respuesta.
5. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal para la cual son T-invariantes los siguientes subespacios:
   - $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x + 2y - z = 0\}$,
   - $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x + y + z = 0\}$
   - $W_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x + y - 2z = 0\}$

   a. Prueba que T es diagonalizable.
   b. Si se sabe que $2T - T^2 = Id$ en W_1 y $T = 2Id$ en $W_2 \cap W_3$, halla los valores propios de T.

Ejercicio 8. Considera una transformación lineal T cuya matriz asociada en la base canónica $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$ es

$$_{\mathcal{E}}(T)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a. Halla los subespacios invariantes de T.
b. Halla los valores propios de T.
c. Discute según θ si T es diagonalizable.

2.2. Forma canónica de Jordan

Ejercicio 9. Halla la forma canónica y una base de Jordan para los siguientes operadores:

1. $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tal que $T(x,y,z)=(-y-2z,\ x+3y+z, x+3z)$.
2. $S:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tal que $T(x,y,z)=(3x+2y-2z, 4y-z, y+2z)$.
3. $F:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ tal que $F(x,y,z,t)=(2y,-2x+4y,z+t,z+t)$.

Ejercicio 10. Hallar la forma canónica y una base de Jordan para las matrices siguientes. Observa el trabajo realizado en el ejercicio 9 antes de comenzar a efectuar cálculos:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -6\\ 2 & -4\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix} 0 & 2\\ -2 & 4\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2\\ 0 & 4 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

Ejercicio 11. Prueba que para todo $n\in I\!N$, $\begin{pmatrix} a & 0\\ 1 & a\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} a^n & 0\\ na^{n-1} & a^n\end{pmatrix}$ y calcula $\begin{pmatrix} 3 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}^{10}$.

Ejercicio 12. Sean $a\in\mathbb{R}$ y una matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0\\ 1 & a & 1\\ 0 & a & 2\end{pmatrix}$.

1. Discutir según a si A es diagonalizable, justificando las respuestas con cuidado.
2. Para los casos en que A no es diagonalizable y $|a|\geq 2$, encuentra su forma canónica de Jordan. Justifica.

Ejercicio 13. ¿Las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ son semejantes?

Ejercicio 14. Sea V un espacio vectorial de dimensión 6 y $T:V\to V$ una transformación lineal que cumple lo siguiente:

- El polinomio característico de T tiene todas sus raíces en el cuerpo,
- El polinomio $(t-2)^3$ divide al polinomio característico de T,
- $N(T-3Id)\neq\{\mathbf{o}\}$,
- La multiplicidad algebraica de 4 es mayor que 1.

Calcular la traza de T.

Ejercicio 15. Sea $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tal que:

$$T(1,1,0)=T(-1,0,1)=(2,-2,0)\ \text{y}\ \ T(0,-1,1)=(-6,2,-4).$$

1. Indica si T es diagonalizable. En caso de serlo, encuentra una base de vectores propios. En caso de que no, encuentra una base de Jordan.
2. Indica todos los subespacios invariantes bajo T que sean de dimensión 1.
3. ¿Existen subespacios invariantes bajo T de dimensión 2? En caso de existir, indica al menos uno de ellos.