

PRÁCTICO 2: VALORES Y VECTORES PROPIOS.
DIAGONALIZACIÓN.

Recuerda: Si \mathbb{K} es un cuerpo (usualmente \mathbb{R} o \mathbb{C}), entonces:

- $\mathbb{K}_n[x]$ denota el espacio de polinomios de grado menor $n + 1$ con coeficientes en \mathbb{K} .
- $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ denota el espacio de matrices con coeficientes en \mathbb{K} de m filas y n columnas.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$.

1. Valores y vectores propios

EJERCICIO 1. Para las siguientes transformaciones lineales

$$T : \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^2 \quad T(x, y) = (-2x - 7y, x + 2y)$$

$$T : \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}^3, \quad T(x, y, z) = (x, z, y)$$

$$T : \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}^3, \quad T(x, y, z) = (x, z, -y),$$

1. Hallar valores propios y bases de los subespacios propios de T , si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
2. Hallar valores propios y bases de los subespacios propios de T , si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

EJERCICIO 2. Hallar los valores propios y bases de los subespacios propios de la transformación lineal $T : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tal que

$$T \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 4a + b + d & 2a + 3b + d \\ -2a + b + 2c - 3d & 2a - b + 5d \end{pmatrix}.$$

EJERCICIO 3. Sea $T : V \rightarrow V$ una transformación lineal. Probar que:

1. T es invertible $\Leftrightarrow 0$ no es valor propio de T .
2. Si T es invertible y λ es valor propio de $T \Rightarrow \lambda^{-1}$ es valor propio de T^{-1} .
3. Si λ es valor propio de $T \Rightarrow \lambda^n$ es valor propio de $T^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
4. Si T es invertible y λ es valor propio de $T \Rightarrow \lambda^{-n}$ es valor propio de $T^{-n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Nota: Existen resultados análogos para matrices cuadradas.

EJERCICIO 4. Sea A una matriz $n \times n$.

1. Probar que A y A^t tienen el mismo polinomio característico.
2. Deducir que A y A^t tienen los mismos valores propios.
3. ¿ A y A^t tienen los mismos vectores propios?

EJERCICIO 5. Sean A y B dos matrices $n \times n$ semejantes.

1. Probar que A y B tienen el mismo polinomio característico.
2. Deducir que A y B tienen los mismos valores propios.
3. ¿Qué relación existe entre los vectores propios de A y B ?

2. Diagonalización

EJERCICIO 6. Para las siguientes transformaciones lineales $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, hallar los valores propios, hallar bases de los subespacios propios e investigar si son diagonalizables.

1. $T(x, y, z) = (2y + z, 2x + z, x + y + z)$.

2. $T(x, y, z) = (4x - 5y + 2z, 5x - 7y + 3z, 6x - 9y + 4z)$.
3. $T(x, y, z) = (y, -4x + 4y, 2x + y + 2z)$.
4. $T(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$.

EJERCICIO 7. Dadas las matrices:

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 1-i \\ 1+i & 5 \end{pmatrix} \quad (b) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (c) \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1+i \\ 0 & -1-i & 0 \end{pmatrix}$$

1. Hallar los valores propios de A y bases de los subespacios propios de A .
2. Deducir que A es diagonalizable.
3. Hallar una matriz diagonal D semejante con A y la matriz invertible P tal que $D = P^{-1}AP$.

EJERCICIO 8. En cada caso, hallar los valores reales de a y b para que la matriz sea diagonalizable.

$$M = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 2 & a & 2 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

EJERCICIO 9. Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que su matriz asociada en la base canónica es simétrica. Probar que T es diagonalizable.

3. Otros ejercicios de diagonalización

EJERCICIO 10. Sea $T : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida como $T(M) = M + aM^t$ con $a \in \mathbb{R}$.

1. Hallar los valores y subespacios propios de T discutiendo según a .
2. Hallar los valores de a para los cuales T es invertible.
3. Hallar los valores de a para los cuales T es diagonalizable y hallar su forma diagonal.
4. Para $a = 1$, observar que es diagonalizable y hallar una base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formada por vectores propios de T .

EJERCICIO 11. Sea $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida como $T(p) = 2p' + p$.

1. Hallar los valores y subespacios propios de T .
2. Investigar si T es diagonalizable y si lo es hallar su forma diagonal y una base de \mathcal{P}_2 formada por vectores propios de T .

EJERCICIO 12. Sea $T : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida como $T(B) = BA - AB$ con $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Hallar los valores y subespacios propios de T .
2. Investigar si T es diagonalizable y si lo es hallar su forma diagonal y una base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formada por vectores propios de T .

EJERCICIO 13. Sea $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ una transformación lineal tal que:

$$\begin{aligned} T(1) &= 4 + 4x^2, \\ T(x) &= -1 + 2x - 3x^2, \\ T(x^2) &= b \quad \text{con } b \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

1. Determinar los valores de b para los cuales T es diagonalizable. Justificar

2. Para $b = 3$, observar que T es diagonalizable, hallar su forma diagonal y una base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ formada por vectores propios de T .

EJERCICIO 14. Sean V un \mathbb{R} -espacio vectorial de dimensión finita y $T : V \rightarrow V$ una transformación lineal con tres valores propios $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ y $S_{\lambda_1}, S_{\lambda_2}, S_{\lambda_3}$ los respectivos subespacios propios.

1. Sabiendo que $T = T^3$, hallar $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.
2. Sea $v \in V$, probar que
 1. $\frac{1}{2}T^2(v) - \frac{1}{2}T(v) \in S_{\lambda_1}$.
 2. $v - T^2(v) \in S_{\lambda_2}$.
 3. $\frac{1}{2}T(v) + \frac{1}{2}T^2(v) \in S_{\lambda_3}$.
3. Probar que $V = S_{\lambda_1} \oplus S_{\lambda_2} \oplus S_{\lambda_3}$.
4. Probar que T es diagonalizable.
5. Si $\dim(V) = 4$, hallar las posibles matrices diagonales asociadas a T .

EJERCICIO 15. Se considera la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que representa una simetría respecto el plano $\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 5y - 13z = 0\}$.

1. Probar que T es diagonalizable.
2. Calcular el determinante de la matriz asociada a T en las bases canónicas.

EJERCICIO 16. Probar que una matriz cuyas filas suman siempre el mismo número tiene vector propio $(1, \dots, 1)^t$. Diagonalizar las matrices A y B en $\mathcal{M}_6(\mathbb{R})$ (hallar la matriz diagonal y la matriz de semejanza).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 17. Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (-7y + z, 4y, -2x + y + 3z)$.

1. Probar que T es diagonalizable.
2. Calcular $\begin{pmatrix} 0 & -7 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^n, \forall n \in \mathbb{N}$.
3. Hallar, si es posible, una matriz F en $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tal que $F^2 = \begin{pmatrix} 0 & -7 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
4. Si $A = \begin{pmatrix} 0 & -7 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, calcular A^{-1}, A^5 y A^{-5} .