Universidad de la República **Geometría y Álgebra Lineal 2**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Primer semestre 2024**

PRÁCTICO 1: TRANSFORMACIONES LINEALES

Recuerda: Si $\mathbb{K}$ es un cuerpo (usualmente $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), entonces:

- $\mathbb{K}_n[x]$ denota el espacio de polinomios de grado menor $n+1$ con coeficientes en $\mathbb{K}$.
- $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ denota el espacio de matrices con coeficientes en $\mathbb{K}$ de m filas y n columnas.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$.

1. Transformaciones lineales y matriz asociada

EJERCICIO 1. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x,y,z) = (y-x, z+y)$.

1. Comprueba que T es lineal.
2. Encuentra la matriz asociada a ${}_{E'}(T)_E$ siendo $E \xrightarrow{b} \mathbb{R}^3$ y $E' \xrightarrow{b} \mathbb{R}^2$, ambas canónicas.
3. Sean $A = \{(1,0,1), (0,2,1), (-1,-1,2)\}$ y $B = \{(3,-1), (-1,3)\}$.
   Comprueba que $A \xrightarrow{b} \mathbb{R}^3$ y $B \xrightarrow{b} \mathbb{R}^2$ y encuentra la matriz ${}_B(T)_A$.

EJERCICIO 2. Considera un $\mathbb{R}$-espacio vectorial V de dimensión n, y $\mathcal{B}$ una base de V.

1. ¿Es cierto que $T : V \to \mathbb{R}^n$ tal que $T(v) = coord_{\mathcal{B}}(v)$ es lineal? Justifica.
2. En caso de serlo, encuentra la matriz asociada ${}_{\mathcal{E}}(T)_{\mathcal{B}}$, siendo $\mathcal{E}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

EJERCICIO 3. Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que

$$T(1) = (1,0), \quad T(x) = (1,1) \quad \text{y} \quad T(x^2) = (0,0).$$

1. Demuestra que T está bien definida.
2. Encuentra $T(p)$ para todo p.
3. Encuentra ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}}$, siendo $\mathcal{A} = \{1, x, x^2\}$ y $\mathcal{B} = \{(3,-3), (5,0)\}$.

EJERCICIO 4.

1. Investiga si existe alguna tranformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que
   $$T(1,0,0) = (2,1,0), \quad T(1,1,0) = (-1,2,3) \quad \text{y} \quad T(1,1,1) = (0,0,1).$$
   En caso afirmativo, encuéntralas todas.
2. Investiga si existe alguna tranformación lineal $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^2$ tal que
   $$T(1) = (1,0), \quad T(1+x) = (1,1), \quad T(1+x+x^2) = (0,0) \quad \text{y} \quad T(3+2x+x^2) = (2,1).$$
   En caso afirmativo, encuéntralas todas.

EJERCICIO 5. En los siguientes casos:

- Halla la forma general de las transformaciones lineales que cumplen las condiciones dadas.
- Encuentra la matriz asociada en las bases que se indiquen.

1. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que
   $$T(1,1,-1) = (2,1,0), \quad T(1,2,1) = (-1,2,3) \quad \text{y} \quad T(1,0,-3) = (0,0,1).$$
   Considera para ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}}$ las bases $\mathcal{A} = \{(1,2,0), (1,2,2), (1,1,0)\}$ y $\mathcal{B} = \{(-1,0,-3), (5,0,3), (0,1,0)\}$.

2. $T:\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\to\mathbb{R}^2$ tal que

$$T\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=(1,-1),\quad T\begin{pmatrix} 1 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}=(1,1),\quad T\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}=(1,1)\quad\text{y}\quad T\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 1 & 3\end{pmatrix}=(1,-3).$$

Considera $\mathcal{A}=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right\}$ y $\mathcal{B}=\{(1,1),(-1,1)\}$ para la matriz asociada ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}}$.

Ejercicio 6. Sea $T:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}^3$ tal que

$${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix},$$

donde $\mathcal{A}=\{1,x+1,(x+1)^2\}$ y $\mathcal{B}=\{(1,1,0),(1,2,3),(3,2,1)\}$.

1. Halla $T(x^2+x-1)$,
2. Halla la expresión general de $T(ax^2+bx+c)$, siendo ax^2+bx+c un polinomio genérico de $\mathbb{R}_2[x]$.

Ejercicio 7. Consideremos una matriz $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ y la transformación $T:\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida por

$$T(B)=A\cdot B.$$

1. Prueba que T es lineal.
2. ¿Existen bases en $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tal que la matriz asociada en dichas bases sea justamente A? Justifica la respuesta.
3. Para
$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix},$$
halla la matriz asociada a T en la base canónica de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Ejercicio 8. Sea $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$

$$T(x,y,z)=(2x-y+z,3y-z,x+2y+z).$$

Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por

$$\mathcal{A}=\{(1,0,1),(-1,1,2)\}.$$

Halla la matriz asociada de la restricción de T a S, $T|_S\colon S\to\mathbb{R}^3$, utilizando $\mathcal{A}$ como base de S y la base canónica $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 9. Sean $T:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$, la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$ y las bases

$$\mathcal{B}=\{(1,-1,1),(1,1,1),(1,0,0)\}\ \text{y}\ \mathcal{A}=\{(1,2,0),(2,1,0),(1,1,1)\}.$$

1. ¿ Queda T únicamente determinada por $A={}_{\mathcal{A}}(T)_{\mathcal{B}}$? Justifica tu respuesta.
2. En caso afirmativo, halla $T(x,y,z)$.

2. Matriz asociada a la composición de transformaciones lineales

EJERCICIO 10. Se consideran las siguientes transformaciones lineales:

$$T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{tal que} \quad T(1,0) = (1,1) \quad \text{y} \quad T(0,1) = (-1,1).$$

$$S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{tal que} \quad S(1,1) = (1,-1,1) \quad \text{y} \quad S(-1,1) = (0,2,-1).$$

Halla $T(x,y)$, $S(a,b)$ y $(S \circ T)(x,y)$.

EJERCICIO 11. Se consideran las siguientes transformaciones lineales:

$$T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{tal que} \quad T(1,1) = (1,2) \quad \text{y} \quad T(-1,1) = (0,1).$$

$$S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{tal que} \quad S(1,1) = (1,1) \quad \text{y} \quad S(0,1) = (0,4).$$

Halla $S \circ T$, $T \circ S$, S^2 y T^2 (observa que $T^2 = T \circ T$).

3. Núcleo e imagen de transformaciones lineales

EJERCICIO 12. Usa la definición para hallar el núcleo e imagen de las siguientes transformaciones lineales:

1. $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(p) = (p(1) + p(-1), p(0))$.
2. $T : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ tal que $T(A) = tr(A)$.

EJERCICIO 13. Se consideran las transformaciones $T : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tal que

$$T(x,y,z) = \begin{pmatrix} x-y & y \\ y & y-z \end{pmatrix},$$

y $S : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_3[x]$ definida por

$$(S(A))(x) = (1 \quad x) A \begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix}.$$

1. Verifica que T y S son lineales.
2. Halla el núcleo y la imagen de T, S y $S \circ T$.
3. Considera $\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, $\mathcal{B} = \{(1,2,1), (1,2,-1), (-1,1,-2)\}$ y $\mathcal{C} = \{x^3, 1+x^3, x^2-1, -x\}$.
    - Encuentra ${}_{\mathcal{A}}(T)_{\mathcal{B}}$.
    - Encuentra ${}_{\mathcal{C}}(S)_{\mathcal{A}}$.
    - Encuentra ${}_{\mathcal{C}}(S \circ T)_{\mathcal{B}}$.

EJERCICIO 14. Dada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, definimos la transformación lineal $T : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ como

$$T(M) = AM.$$

Prueba que T es invertible si, y sólo si, A es invertible.

4. Teorema de las dimensiones

Ejercicio 15. Sean $T : V \to \mathbb{R}$ y $S : V \to \mathbb{R}$ transformaciones lineales, donde $\dim(V) = n$.

1. Escribe una prueba para las afirmaciones a continuación:
   a. $\dim(N(T)) = n$ ó $\dim(N(T)) = n - 1$.
   b. $N(T) = N(S)$ si, y sólo si, existe un número real $\alpha \neq 0$ tal que $T = \alpha S$.
2. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $T(x, y, z) = x+y+z$. Encuentra una transformación lineal $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sabiendo que satisface $S(1, 0, 0) = 2$ y que $N(T) = N(S)$.

Ejercicio 16. Decide si las afirmaciones siguientes son verdaderas o falsas, dando una demostración o un contraejemplo según corresponda.

1. Si $T\colon V \to W$ transformación lineal es tal que existe un conjunto $A = \{v_1, \ldots, v_r\} \subset V$ linealmente independiente que cumple que $T(A) = \{T(v_1), \ldots, T(v_r)\}$ es también linealmente independiente, entonces es inyectiva.
2. Si $T\colon V \to W$ transformación lineal es tal que existe una base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de V, que cumple que $T(B) = \{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ es también linealmente independiente, entonces es inyectiva.

Ejercicio 17. Sean V y W espacios vectoriales con $\dim(V) < \dim(W)$ y dos transformaciones lineales $T : V \to W$ y $S : W \to V$.

1. Demuestra que T no es sobreyectiva.
2. Demuestra que S no es inyectiva.

5. Transformaciones lineales complejas

En los siguientes dos ejercicios, consideramos a $\mathbb{C}$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Ejercicio 18. Sea $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $T(z) = iz$.

1. Comprueba que T es lineal y que preserva el módulo; es decir, $|T(z)| = |z|$, $\forall z \in \mathbb{C}$.
2. Encuentra la matriz asociada a T en la base canónica $\mathcal{A} = \{1, i\}$ de $\mathbb{C}$.
3. Haz una interpretación geométrica de la transformación T.

Ejercicio 19. Sea $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ tal que $T(z, w) = w - 2z$.

1. Comprueba que T es lineal.
2. Encuentra el núcleo y la imagen de T, y haz una intepretación geométrica de los resultados.
3. Encuentra la matriz asociada ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}}$ en las bases $\mathcal{A} = \{(1, i), (1, -i), (1 + i, 1), (1 - i, -2i)\}$ de $\mathbb{C}^2$ y $\mathcal{B} = \{2 - i, 3 + 5i\}$ de $\mathbb{C}$.

Observa los dos ejercicios anteriores. ¿Cambiarían en algo los resultados si consideráramos a $\mathbb{C}$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial? ¿Cómo? Justifica tus respuestas.