Universidad de la República **Geometría y Álgebra Lineal 2**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Primer semestre 2024**

PRÁCTICO 10: FORMAS CUADRÁTICAS.

Recuerda: Si $\mathbb{K}$ es un cuerpo (usualmente $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), entonces:

- $\mathbb{K}_n[x]$ denota el espacio de polinomios de grado menor $n+1$ con coeficientes en $\mathbb{K}$.
- $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ denota el espacio de matrices con coeficientes en $\mathbb{K}$ de m filas y n columnas.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$.
- A menos que se indique lo contrario, considera en $\mathbb{R}^n$ y en $\mathbb{C}^n$ los productos internos usuales, en $\mathbb{R}_n[x]$ el producto interno $\langle p, q\rangle = \displaystyle\int_0^1 p(x)q(x)dx$, y en $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ el producto interno $\langle A, B\rangle = tr(AB^t)$.

Ejercicio 1. Para cada una de las matrices simétricas A que aparecen a continuación:

a. Encontrar una matriz P ortogonal tal que $P^t.A.P$ sea diagonal.
b. Clasificar la forma cuadrática asociada a A.

i- $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

ii- $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

iii- $\begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$

iv- $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

v- $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

vi- $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Ejercicio 2. Clasifica cada una de las formas cuadráticas que aparecen a continuación:

a. $q_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \;/\; q_1(x, y, z) = 6x^2 + 5y^2 + 7z^2 - 4xy + 4xz$
b. $q_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \;/\; q_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy - 2xz + 2yz$
c. $q_3 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} \;/\; q_3(x, y, z, t) = 9x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 8t^2 - 8yz - 4yt + 4zt$
d. $q_4 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} \;/\; q_4(x, y, z, t) = 2xy - 6xz - 6yt + 2zt$

Ejercicio 3. Utiliza el Teorema de Gershgorin para clasificar la forma cuadrática a la matriz siguiente:

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 9 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 6 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 6 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4. Considera una forma cuadrática $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida positiva, inducida por una matriz simétrica A.

a. Prueba que $\langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \;/\; \langle x, y\rangle = x^t.A.y$ es un producto interno.
b. Prueba que $\sqrt{q(x+y)} \leq \sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)}$

c. Sean D la matriz diagonal y P la matriz ortogonal tales que $P^t.A.P = D$. Prueba que las columnas de P son una base de $\mathbb{R}^n$ que es ortogonal con respecto al producto interno de la parte (a).

d. Encuentra una base de $\mathbb{R}^n$ que sea ortonormal con respecto al producto interno de la parte (a).

Ejercicio 5. Sea $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma cuadrática asociada a $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$, con $\lambda \in \mathbb{R}$.

a. Clasifica q discutiendo según λ.

b. Para el valor de λ que tiene a 0 como valor propio de A, encuentra una base del subespacio $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \ / \ q(x) = 0\}$

Ejercicio 6. Considera la forma cuadrática $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \ / \ q(x_1, ..., x_n) = n. \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right) - \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \right)^2$.

a. Prueba que q es semidefinida positiva.

b. Prueba que $q(x_1, ..., x_n) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = ... = x_n$
(sugerencia: aplicar la desigualdad de Cauchy-Schwarz a un par de vectores elegidos convenientemente).