**Universidad de la República** | **Geometría y Álgebra Lineal 2**
**Facultad de Ingeniería - IMERL** | **Primer semestre 2024**

<u>Práctico 0</u>: Números Complejos

<u>Recuerda</u>:

- La **unidad imaginaria** es el número $i \in \mathbb{C}$ tal que $i^2 = -1$.
- Si $a + bi \in \mathbb{C}$ entonces su **conjugado** es $\overline{a+bi} = a - bi$.
- Si $a + bi \in \mathbb{C}$ entonces su **módulo** es $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$..

## 1. Operaciones en $\mathbb{C}$.

Ejercicio 1. Sean $z, w \in \mathbb{C}$ tales que $z = a + bi$ y $w = p + qi$. Verifica los resultados enunciados a continuación.

(a) $z + w = (a + p) + (b + q)i$

(b) $z.w = (ap - bq) + (aq + bp)i$

(c) $\dfrac{z}{w} = \dfrac{z.\overline{w}}{|w|^2} = \left(\dfrac{ap + bq}{p^2 + q^2}\right) + \left(\dfrac{bp - aq}{p^2 + q^2}\right) i$

Ejercicio 2. Simplifica las operaciones que se presentan a continuación hasta expresarlas como **un** número complejo.

(a) $(3 + 2i).(-2 + 3i)$

(b) $(-2 - i)^2 - (-3 - 4i)^2$

(c) $\dfrac{3 - 2i}{3 + 2i}$

(d) $(5 - 2i)^3 + 2i(\overline{1 - i})$

(e) $3(\overline{2 + i})(1 - 3i) - i(4 + i)^2$

(f) $(3 - 2i)^2 - (3 + 2i)^4$

Ejercicio 3. Calcula las raíces cuadradas complejas en cada caso.

(a) $\sqrt{-9}$

(b) $\sqrt{i}$

(c) $\sqrt{-4i}$

(d) $\sqrt{-8 + 6i}$

(e) $\sqrt{24 + 10i}$

## 2. Propiedades.

Ejercicio 4. Demuestra que $\forall z, w \in \mathbb{C}$ son verdaderas las propiedades enunciadas a continuación:

(a) $zw = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ó $w = 0$

(b) $z\overline{z} \in \mathbb{R}$ y $z + \overline{z} \in \mathbb{R}$

(c) $Re[z] = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ y $Im[z] = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$

(d) $\overline{\overline{z}} = z$

(e) $\overline{zw} = \overline{zw}$

(f) $|zw| = |z|.|w|$

(g) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$

(h) $|z + w| \leq |z| + |w|$

(i) $|z| = |\overline{z}| = |-z|$

## 3. Ecuaciones en $\mathbb{C}$.

Ejercicio 5. Encuentra el conjunto solución de cada una de las ecuaciones siguientes:

(a) $x^4 = 1$

(b) $x^2 + 9 = 0$

(c) $x^3 - ix = 0$

(d) $x^2 + 5x + 4 = 0$

(e) $ix^2 + 3x - 4i = 0$

(f) $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$

(g) $x^3 + 4x^2 - 2x - 20 = 0$

(h) $x^3 - x^2 - ix + i = 0$

(i) $x^3 + (1 - i)x^2 - (2 + i)x + 2i = 0$

¿Es cierto que toda ecuación polinomial que admite una raíz compleja, entonces admite la raíz conjugada? En caso de no serlo, ¿es cierto bajo alguna hipótesis adicional? ¿Cuál?

Ejercicio 6. Clasifica cada uno de los sistemas de ecuaciones complejos que aparecen a continuación. Encuentra la solución en los casos *compatible y determinado*.

(a) $\begin{cases} 3z - 5w = -7 + 8i \\ iz - 2w = -5 + 3i \end{cases}$

(b) $\begin{cases} v + w = 1 \\ iv + 2w = -4i \end{cases}$

(c) $\begin{cases} ix + y - z = -1 + 2i \\ x - iy - z = 1 + i \\ ix + y + iz = 1 + 3i \end{cases}$

Ejercicio 7. Determina el conjunto solución de cada una de las ecuaciones complejas siguientes. En la mayoría de ellas, podrás hacerlo razonando geométricamente. En cada caso de ser así, justifica tu respuesta y represéntalo.

(a) $|z| = 1$

(b) $z - \overline{z} = 1$

(c) $|z - i| = |z + i|$

(d) $(\overline{z} - 2z)^2 = 12 - 16i$

(e) $z.\overline{z} \leq 3$

(f) $|z - \overline{z}| = Re(z - 1)$

(g) $Re(z) = Im(z)$

(h) $2z - 3\overline{z} = 5 - 7i$

(i) $z.\overline{z} - 2iz = 4 + 2i$

## 4. Matrices con coeficientes en $\mathbb{C}$.

Ejercicio 8. Investiga si las matrices complejas siguientes tienen inversa (recuerda que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admite inversa si existe $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tales que $A.A^{-1} = A^{-1}.A = Id$, con $Id \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$). Si la respuesta es afirmativa, halla $A^{-1}$.

(a) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$

(b) $A_3 = \begin{pmatrix} i & -3 + 2i \\ 2 - 3i & -1 \end{pmatrix}$

(c) $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 + i & 2i \\ 1 - i & 4 & 2 - 3i \\ -2i & 2 + 3i & 7 \end{pmatrix}$

(d) $A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 + i & 0 \\ 3 + 2i & 0 & -4i \\ 0 & 4i & -3 \end{pmatrix}$