Matemática Inicial

Prueba Final, 24 de noviembre 2021.

No Prueba	Apellido y Nombre	Cédula	Grupo

Ejercicio 1 (8 puntos) *Para hacer una* conversión *en rugby (vale dos puntos), el jugador debe patear el balón desde el suelo y este debe pasar entre dos postes verticales y por encima del travesaño que está a 3m de altura (ver Figura 1).*

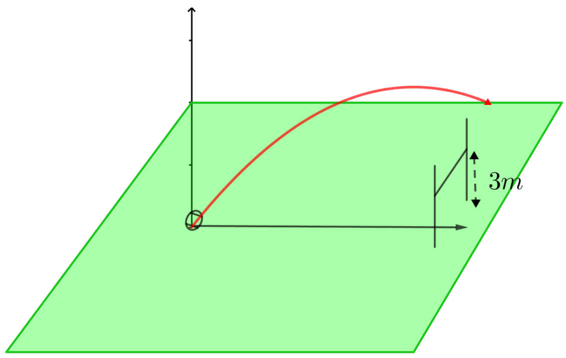

Figura 1: Figura del ejercicio 1

Se sabe que la trayectoria (altura en metros) del balón para un cierto intento de conversión *en función del tiempo (medido en segundos), está dada por la función:*

$$h(t) = -\frac{3}{2}t^2 + 6t$$

1. *Determinar la altura máxima que alcanzará el balón y el tiempo que demora en alcanzarla.*
2. *Hallar el tiempo en que el balón vuelve a tocar el suelo.*
3. *¿En qué tiempos el balón supera los 3m de altura?*
4. *Si se sabe que el balón cruza el travesaño al segundo del puntapié, hallar la velocidad instantanéa al momento de cruzar el travesaño.*

Ejercicio 2 (8 puntos) *Sea* $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = 2\sqrt{2x-1}$.

1. *Probar que* f *es inyectiva.*
2. *Hallar* $\mathrm{Im}(f)$ *el conjunto imagen de* f.
3. *Probar que* $f : [1, +\infty) \to \mathrm{Im}(f)$ *es invertible y hallar* f^{-1}.

Ejercicio 3 (8 puntos)

1. *Se consideran las funciones:*
   - $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ *definida por* $f(x)=3x^2-\sqrt{9x^2+6x}$,
   - $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *definida por* $g(x)=x$.

   Indicar si f es un infinito de mayor orden que g. Justificar.

2. *Se consideran las funciones:*
   - $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *definida por* $f(x)=\frac{1}{4}(x^2-1)^2(x+3)$,
   - $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *definida por* $g(x)=x^3+x^2-5x+3$.

   Indicar si f y g son infinitésimos equivalentes en $x=1$. Justificar.

Ejercicio 4 (10 puntos) *Sea* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *definida por* $f(x)=\begin{cases}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4} & \text{si } x\geq -1,\\ |x+1| & \text{si } x<-1.\end{cases}$

1. *Bosquejar el gráfico de f.*
2. *Analizar si f es continua en $\mathbb{R}$. Justificar.*
3. *Hallar un intervalo I tal que $f:I\to\mathbb{R}$ esté en las hipótesis del teorema de Bolzano.*
4. *Enunciar el recíproco del teorema de Bolzano. ¿Es verdadero? Justificar.*

Ejercicio 5 (8 puntos) *Sea la función* $f:\mathbb{R}\setminus\{-2\}\to\mathbb{R}$ *definida por* $f(x)=\frac{x^3+x^2-x-1}{x+2}$.

1. *Usando la definición de derivada como límite del cociente incremental, hallar $f'(1)$.*
2. *Hallar la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en $x=1$.*

Ejercicio 6 (8 puntos) *Sea* $f:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$ *definida por* $f(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ *y sea* $g:\left(-\sqrt{\frac{\pi}{2}},\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)\to\mathbb{R}$ *definida por* $g(x)=x^2$.

1. *Hallar la función compuesta $h=f\circ g$. Justificar que está bien definida.*
2. *Calcular $h'(x)$ la derivada de $h(x)$.*