35. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 4x + 6 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

(a) Encuentre $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ y $\lim_{x \to 2^+} f(x)$.
(b) ¿Existe el $\lim_{x \to 2} f(x)$?
(c) Trace la gráfica de f.

36. Sea

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ 8 - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

(a) Evalúe cada límite si existe.

(i) $\lim_{x \to 0^+} h(x)$ (iv) $\lim_{x \to 2^-} h(x)$
(ii) $\lim_{x \to 0} h(x)$ (v) $\lim_{x \to 2^+} h(x)$
(iii) $\lim_{x \to 1} h(x)$ (vi) $\lim_{x \to 2} h(x)$

(b) Trace la gráfica de h.

DESCUBRIMIENTO ▪ DISCUSIÓN ▪ REDACCIÓN

37. Cancelación y límites

(a) ¿Qué hay de mal en la siguiente ecuación?

$$\frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = x + 3$$

(b) En vista del inciso (a), explique por qué la ecuación

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 3)$$

es correcta.

38. La contracción de Lorentz En la teoría de relatividad, la fórmula de la contracción de Lorentz

$$L = L_0\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

expresa la longitud L de un cuerpo como función de su velocidad v con respecto a un observador, donde L_0 es la longitud del cuerpo en reposo y c es la velocidad de la luz. Encuentre $\lim_{v \to c^-} L$ e interprete el resultado. ¿Por qué es necesario un límite izquierdo?

39. Límites de sumas y productos

(a) Demuestre, por medio de un ejemplo, que $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)]$ puede existir aun cuando $\lim_{x \to a} f(x)$ ni $\lim_{x \to a} g(x)$ exista.
(b) Demuestre, por medio de un ejemplo, que $\lim_{x \to a} [f(x)g(x)]$ puede existir aun cuando $\lim_{x \to a} f(x)$ ni $\lim_{x \to a} g(x)$ exista.

13.3 RECTAS TANGENTES Y DERIVADAS

| El problema de una tangente ▶ Derivadas ▶ Rapidez de cambio instantánea

En esta ocasión vemos cómo surgen límites cuando tratamos de hallar la recta tangente a una curva o la rapidez de cambio instantánea de una función.

▼ El problema de una tangente

Una *recta tangente* es una recta que *apenas* toca una curva. Por ejemplo, la Figura 1 muestra la parábola $y = x^2$ y la recta tangente t que toca la parábola en el punto $P(1, 1)$. Estaremos en aptitud de hallar una ecuación de la recta tangente t tan pronto como conozcamos su pendiente m. La dificultad es que conocemos sólo un punto P, en t, mientras que necesitamos dos puntos para calcular la pendiente. Pero, observe que podemos calcular una aproximación a m si escogemos un punto cercano $Q(x, x^2)$ en la parábola (como en la Figura 2) y calculamos la pendiente m_{PQ} de la recta secante PQ.

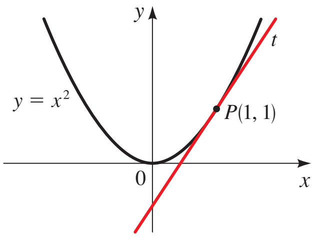


FIGURA 1

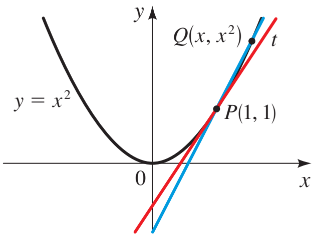


FIGURA 2

Escogemos $x \neq 1$ de modo que $Q \neq P$. Entonces

$$m_{PQ} = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Ahora hagamos que x se aproxime a 1, de modo que Q se aproxima a P a lo largo de la parábola. La Figura 3 muestra la forma en que las rectas secantes correspondientes giran alrededor de P y se aproximan a la recta tangente t.

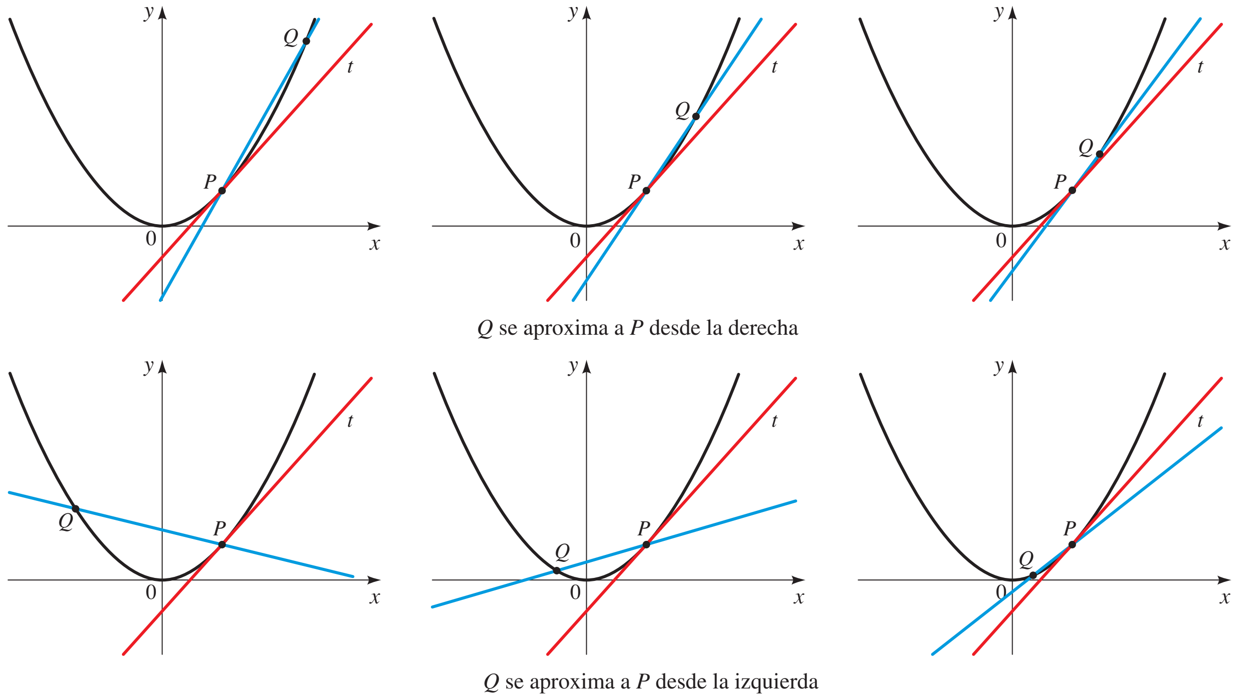


FIGURA 3

La pendiente de la recta tangente es el límite de las pendientes de las rectas secantes:

$$m = \lim_{Q \to P} m_{PQ}$$

Entonces, usando el método de la Sección 13.2, tenemos

$$m = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2$$

La forma de punto pendiente para la ecuación de una recta que pasa por el punto (x_1, y_1) con pendiente m es

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

(Vea Sección 1.10.)

Ahora que sabemos que la pendiente de la recta tangente es $m = 2$, podemos usar la forma de punto pendiente de la ecuación de una recta para hallar su ecuación.

$$y - 1 = 2(x - 1) \qquad \text{o} \qquad y = 2x - 1$$

A veces nos referimos a la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto como la **pendiente de la curva** en el punto. La idea es que si hacemos suficiente acercamiento hacia el punto, la curva se ve casi como una recta. La Figura 4 ilustra este procedimiento para la curva $y = x^2$. Cuanto más acercamiento hagamos, la parábola se ve más como una recta. En otras palabras, la curva se hace casi imposible de distinguir de su recta tangente.

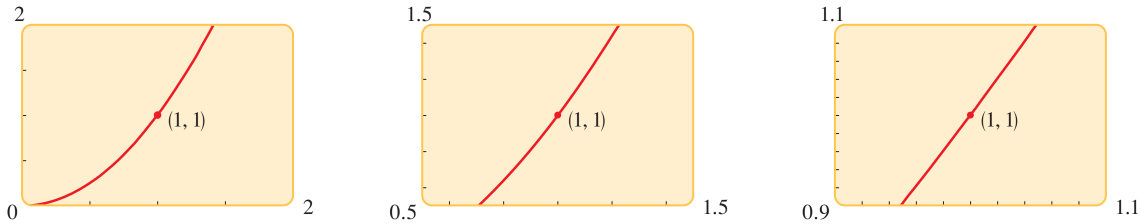


FIGURA 4 Acercamiento hacia el punto (1, 1) en la parábola $y = x^2$

Si tenemos una curva general C con ecuación $y = f(x)$ y deseamos hallar la recta tangente a C en el punto $P(a, f(a))$, entonces consideramos un punto cercano $Q(x, f(x))$, donde $x \neq a$, y calculamos la pendiente de la recta secante PQ.

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

A continuación hacemos que Q se aproxime a P a lo largo de la curva C haciendo que x se aproxime a a. Si m_{PQ} se aproxima a un número m, entonces definimos la *tangente* t como la recta que pasa por P con pendiente m. (Esto quiere decir que la recta tangente es la posición límite de la recta secante PQ cuando Q se aproxima a P. Vea Figura 5.)

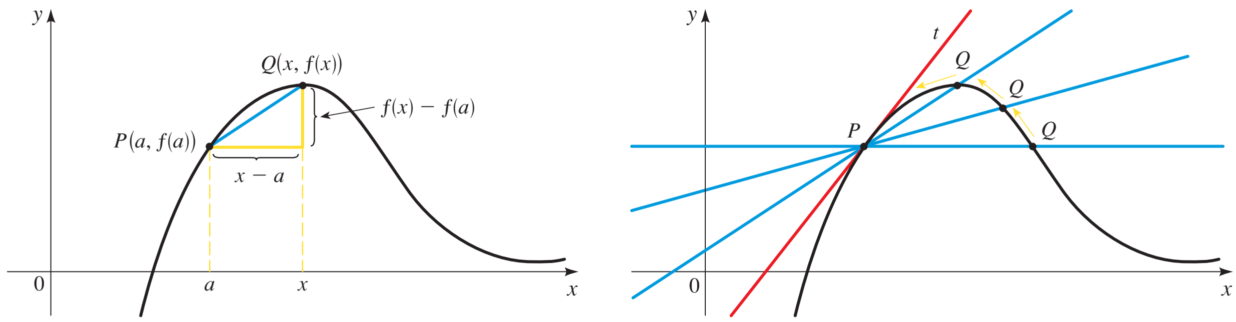


FIGURA 5

DEFINICIÓN DE UNA RECTA TANGENTE

La **recta tangente** a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(a, f(a))$ es la recta que pasa por P con pendiente

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

siempre que este límite exista.

EJEMPLO 1 | Hallar una recta tangente a una hipérbola

Encuentre una ecuación de la recta tangente a la hipérbola $y = 3/x$ en el punto $(3, 1)$.

SOLUCIÓN Sea $f(x) = 3/x$. Entonces la pendiente de la recta tangente en $(3, 1)$ es

$$\begin{aligned}
m &= \lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} && \text{Definición de } m \\
&= \lim_{x \to 3} \frac{\frac{3}{x} - 1}{x - 3} && f(x) = \frac{3}{x} \\
&= \lim_{x \to 3} \frac{3 - x}{x(x - 3)} && \text{Multiplique numerador y denominador por } x \\
&= \lim_{x \to 3} \left(-\frac{1}{x}\right) && \text{Cancele } x - 3 \\
&= -\frac{1}{3} && \text{Sea } x \to 3
\end{aligned}$$

Por lo tanto, una ecuación de la tangente en el punto $(3, 1)$ es

$$y - 1 = -\tfrac{1}{3}(x - 3)$$

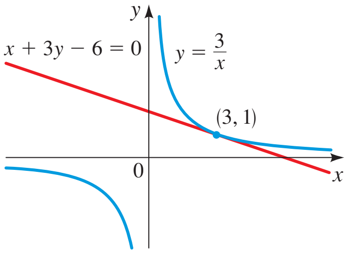


FIGURA 6

que se simplifica a

$$x - 3y - 6 = 0$$

La hipérbola y su tangente se muestran en la Figura 6.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **11**

Hay otra expresión para la pendiente de una recta tangente que a veces es más fácil de usar. Sea $h = x - a$. Entonces $x = a + h$, de modo que la pendiente de la recta secante PQ es

$$m_{PQ} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Vea la Figura 7, en la que el caso $h > 0$ está ilustrado y Q es la recta de P, pero si ocurre que $h < 0$ entonces Q estaría a la izquierda de P.

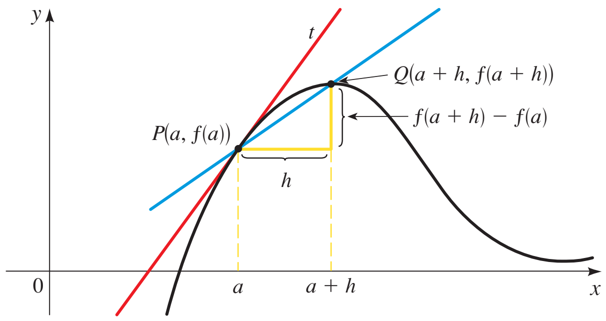


FIGURA 7

Observe que cuando x se aproxima a a, h se aproxima a 0 (porque $h = x - a$), de modo que la expresión para la pendiente de la recta tangentes se convierte en

$$\boxed{m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

Newton y límites
En 1687 Newton (vea página 852) publicó su obra maestra *Principia Mathematica.* En este trabajo, el más grande tratado científico jamás escrito, Newton enunció su versión de cálculo y la usó para investigar la mecánica, dinámica de fluidos y movimiento ondulatorio, así como para explicar el movimiento de planetas y cometas.

Los inicios de cálculo se encuentran en los cálculos de áreas y volúmenes que hicieron sabios griegos como Eudoxio y Arquímedes. Aun cuando aspectos de la idea de un límite están implícitos en el "método de agotamiento", Eudoxio y Arquímedes nunca formularon explícitamente el concepto de un límite. Del mismo modo, matemáticos como Cavalieri, Fermat y Barrow, inmediatos precursores de Newton en el desarrollo del cálculo, nunca usaron realmente límites. Fue Isaac Newton el primero que explícitamente habló de límites, explicó que la idea principal que hay detrás de límites es que las cantidades "se aproximan más por cualquier diferencia determinada". Newton dijo que el límite era el concepto básico en cálculo, pero dejó a matemáticos posteriores como Cauchy y Weierstrass que aclararan estas ideas.

EJEMPLO 2 | Hallar una recta tangente

Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 - 2x + 3$ en el punto (1, 2).

SOLUCIÓN Si $f(x) = x^3 - 2x + 3$, entonces la pendiente de la recta tangente donde $a = 1$ es

$$\begin{aligned}
m &= \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} && \text{Definición de } m \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{[(1+h)^3 - 2(1+h) + 3] - [1^3 - 2(1) + 3]}{h} && f(x) = x^3 - 2x + 3 \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1 + 3h + 3h^2 + h^3 - 2 - 2h + 3 - 2}{h} && \text{Expanda numerador} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{h + 3h^2 + h^3}{h} && \text{Simplifique} \\
&= \lim_{h \to 0} (1 + 3h + h^2) && \text{Cancele } h \\
&= 1 && \text{Sea } h \to 0
\end{aligned}$$

Entonces la ecuación de la recta tangente en (1, 2) es

$$y - 2 = 1(x - 1) \qquad \text{o} \qquad y = x + 1$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **9**

Derivadas

Hemos visto que la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ se puede escribir como

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Resulta que esta expresión también aparece en muchos otros contextos, por ejemplo hallar velocidades y otras magnitudes de rapidez de cambio. Debido a que este tipo de límite se presenta en forma tan general, se le ha dado un nombre y notación especiales.

DEFINICIÓN DE UNA DERIVADA

La **derivada de una función *f* en un número *a***, denotada por $f'(a)$, es

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

si este límite existe.

EJEMPLO 3 | Hallar una derivada en un punto

Encuentre la derivada de la función $f(x) = 5x^2 + 3x - 1$ en el número 2.

SOLUCIÓN De acuerdo a la definición de una derivada, con $a = 2$, tenemos

$$\begin{aligned}
f'(2) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} && \text{Definición de } f'(2)\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{[5(2+h)^2 + 3(2+h) - 1] - [5(2)^2 + 3(2) - 1]}{h} && f(x) = 5x^2 + 3x - 1\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{20 + 20h + 5h^2 + 6 + 3h - 1 - 25}{h} && \text{Expanda}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{23h + 5h^2}{h} && \text{Simplifique}\\
&= \lim_{h\to 0} (23 + 5h) && \text{Cancele } h\\
&= 23 && \text{Sea } h \to 0
\end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **15**

Vemos de la definición de una derivada que el número $f'(a)$ es el mismo que la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$. Entonces el resultado del Ejemplo 3 muestra que la pendiente de la recta tangente a la parábola $y = 5x^2 + 3x - 1$ en el punto $(2, 25)$ es $f'(2) = 23$.

EJEMPLO 4 | Hallar una derivada

Sea $f(x) = \sqrt{x}$.

(a) Encuentre $f'(a)$.

(b) Encuentre $f'(1)$, $f'(4)$ y $f'(9)$.

SOLUCIÓN

(a) Usamos la definición de la derivada en a:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \qquad \text{Definición de derivada}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} \qquad f(x) = \sqrt{x}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} \cdot \frac{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} \qquad \text{Racionalice numerador}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(a+h) - a}{h\left(\sqrt{a+h} + \sqrt{a}\right)} \qquad \text{Diferencia de cuadrados}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{a+h} + \sqrt{a}\right)} \qquad \text{Simplifique numerador}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} \qquad \text{Cancele } h$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \qquad \text{Sea } h \to 0$$

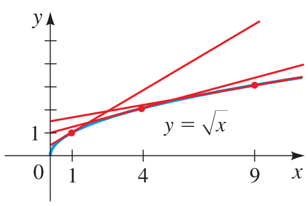


FIGURA 8

(b) Sustituyendo $a = 1$, $a = 4$ y $a = 9$ en el resultado del inciso (a), obtenemos

$$f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2} \qquad f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4} \qquad f'(9) = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6}$$

Estos valores de la derivada son las pendientes de las rectas tangentes que se muestran en la Figura 8.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **21**

Rapidez de cambio instantánea

En la Sección 2.3 definimos la rapidez promedio de cambio de una función f entre los números a y x como

$$\text{rapidez de cambio promedio} = \frac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Suponga que consideramos la rapidez promedio de cambio en intervalos cada vez más pequeños al hacer que x se aproxime a a. El límite de estas magnitudes de rapidez de cambio se denomina rapidez de cambio instantánea.

RAPIDEZ DE CAMBIO INSTANTÁNEA

Si $y = f(x)$, la **rapidez de cambio instantánea de y con respecto a x** en $x = a$ es el límite del promedio de magnitudes de rapidez de cambio cuando x se aproxima a a:

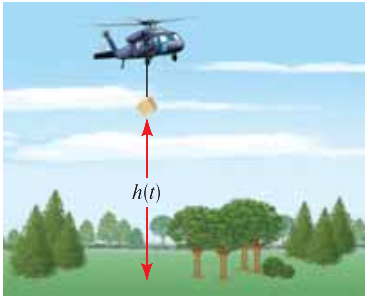
$$\text{rapidez de cambio instantánea} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

Nótese que ahora tenemos dos formas de interpretar la derivada:

- $f'(a)$ es la pendiente de la recta tangente a $y = f(x)$ en $x = a$
- $f'(a)$ es la rapidez de cambio instantánea de y con respecto a x en $x = a$

En el caso especial en que $x = t$ = tiempo y $s = f(t)$ = desplazamiento (distancia dirigida) en el tiempo t de un cuerpo que viaja en línea recta, la rapidez de cambio instantánea recibe el nombre de **velocidad instantánea**.

EJEMPLO 5 | Velocidad instantánea de un cuerpo en caída



Si un cuerpo se deja caer desde una altura de 3000 pies, su distancia sobre el suelo (en pies) después de t segundos está dada por $h(t) = 3000 - 16t^2$. Encuentre la velocidad instantánea después de 4 segundos.

SOLUCIÓN Después que hayan transcurrido 4 segundos, la altura es $h(4) = 2744$ pies. La velocidad instantánea es

$$\begin{aligned}
h'(4) &= \lim_{t\to 4} \frac{h(t) - h(4)}{t - 4} && \text{Definición de } h'(4)\\
&= \lim_{t\to 4} \frac{3000 - 16t^2 - 2744}{t - 4} && h(t) = 3000 - 16t^2\\
&= \lim_{t\to 4} \frac{256 - 16t^2}{t - 4} && \text{Simplifique}\\
&= \lim_{t\to 4} \frac{16(4 - t)(4 + t)}{t - 4} && \text{Factorice numerador}\\
&= \lim_{t\to 4} -16(4 + t) && \text{Cancele } t - 4\\
&= -16(4 + 4) = -128 \text{ ft/s} && \text{Sea } t \to 4
\end{aligned}$$

El signo negativo indica que la altura es *decreciente* a una rapidez de 128 pies/s.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **27**

EJEMPLO 6 | Estimar una rapidez de cambio instantánea

t	$P(t)$
1996	269,667,000
1998	276,115,000
2000	282,192,000
2002	287,941,000
2004	293,655,000

t	$\dfrac{P(t) - P(2000)}{t - 2000}$
1996	3,131,250
1998	3,038,500
2002	2,874,500
2004	2,865,750

Aquí, hemos estimado la derivada al promediar las pendientes de dos rectas secantes. Otro método es determinar la función de población y estimar la pendiente de la recta tangente cuando $t = 2000$.

Sea $P(t)$ la población de Estados Unidos en el tiempo t. La tabla del margen da valores aproximados de esta función, al dar estimaciones de población a mitad de año de 1996 a 2004. Interprete y estime el valor de $P'(2000)$.

SOLUCIÓN La derivada $P'(2000)$ quiere decir la rapidez de cambio de P con respecto a t cuando $t = 2000$, es decir, la rapidez de aumento de la población en 2000.

De acuerdo con la definición de una derivada, tenemos

$$P'(2000) = \lim_{t\to 2000} \frac{P(t) - P(2000)}{t - 2000}$$

Entonces calculamos y tabulamos valores del cociente de diferencia (el promedio de rapidez de cambio) como se muestra en la tabla del margen. Vemos que $P'(2000)$ se encuentra entre 3,038,500 y 2,874,500. (Aquí estamos haciendo una suposición razonable de que la población no fluctuó violentamente entre 1996 y 2004.) Estimamos que la rapidez de aumento de la población de Estados Unidos en 2000 fue el promedio de estos dos números, es decir,

$$P'(2000) \approx 2.96 \text{ millones de personas/año}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **33**

13.3 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. La derivada de una función f en un número a es

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{\square - \square}{\square}$$

si el límite existe. La derivada $f'(a)$ es la ______de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(\square, \square)$.

2. Si $y = f(x)$, la rapidez de cambio promedio de f entre los números x y a es $\dfrac{\square - \square}{\square - \square}$. El límite de la rapidez de cambio promedio cuando x se aproxima a a es el _____de rapidez de cambio de y con respecto a x en $x = a$; ésta es también la derivada $f'(\square)$.

HABILIDADES

3-8 ■ Encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto dado.

3. $f(x) = 3x + 4$ en $(1, 7)$
4. $f(x) = 5 - 2x$ en $(-3, 11)$
5. $f(x) = 4x^2 - 3x$ en $(-1, 7)$
6. $f(x) = 1 + 2x - 3x^2$ en $(1, 0)$
7. $f(x) = 2x^3$ en $(2, 16)$
8. $f(x) = \dfrac{6}{x + 1}$ en $(2, 2)$

9-14 ■ Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado. Grafique la curva y la recta tangente.

9. $y = x + x^2$ en $(-1, 0)$
10. $y = 2x - x^3$ en $(1, 1)$
11. $y = \dfrac{x}{x - 1}$ en $(2, 2)$
12. $y = \dfrac{1}{x^2}$ en $(-1, 1)$
13. $y = \sqrt{x + 3}$ en $(1, 2)$
14. $y = \sqrt{1 + 2x}$ en $(4, 3)$

15-20 ■ Encuentre la derivada de la función en el número dado.

15. $f(x) = 1 - 3x^2$ en 2
16. $f(x) = 2 - 3x + x^2$ en -1
17. $g(x) = x^4$ en 1
18. $g(x) = 2x^2 + x^3$ en 1
19. $F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ en 4
20. $G(x) = 1 + 2\sqrt{x}$ en 4

21-24 ■ Encuentre $f'(a)$, donde a está en el dominio de f.

21. $f(x) = x^2 + 2x$
22. $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
23. $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}$
24. $f(x) = \sqrt{x - 2}$

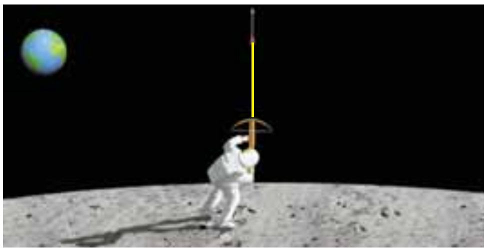
25. **(a)** Si $f(x) = x^3 - 2x + 4$, encuentre $f'(a)$.
(b) Encuentre ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de f en los puntos cuyas coordenadas x son 0, 1 y 2.
(c) Grafique f y las tres rectas tangentes.

26. **(a)** Si $g(x) = 1/(2x - 1)$, encuentre $g'(a)$.
(b) Encuentre ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de g en los puntos cuyas coordenadas x son -1, 0 y 1.
(c) Grafique g y las tres rectas tangentes.

APLICACIONES

27. **Velocidad de una pelota** Si una pelota es lanzada directamente hacia arriba con una velocidad de 40 pies/s, su altura (en pies) después de t segundos está dada por $y = 40t - 16t^2$. Encuentre la velocidad instantánea cuando $t = 2$.

28. **Velocidad en la Luna** Si una flecha es disparada hacia arriba en la Luna con una velocidad de 58 m/s, su altura (en metros) después de t segundos está dada por $H = 58t - 0.83t^2$.
(a) Encuentre la velocidad instantánea de la flecha después de un segundo.
(b) Encuentre la velocidad instantánea de la flecha cuando $t = a$.
(c) ¿En qué tiempo t regresará la flecha a la Luna?
(d) ¿Con qué velocidad llegará la flecha a la Luna?

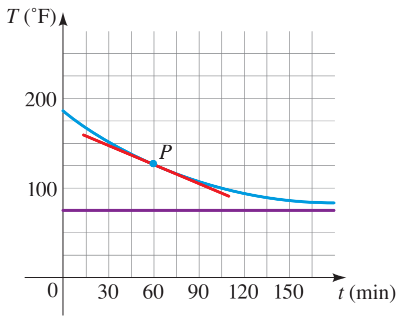


29. **Velocidad de una partícula** El desplazamiento s (en metros) de una partícula que se mueve en línea recta está dado por la ecuación de movimiento $s = 4t^3 + 6t + 2$, donde t se mide en segundos. Encuentre la velocidad instantánea de la partícula s en los tiempos $t = a$, $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$.

30. **Inflar un globo** Un globo esférico está siendo inflado. Encuentre la rapidez de cambio del área superficial $(S = 4\pi r^2)$ con respecto al radio r cuando $r = 2$ pies.

31. **Cambio de temperatura** Un pavo rostizado es sacado de un horno cuando su temperatura ha alcanzado 185°F, y es colocado en una mesa en un cuarto donde la temperatura es de 75°F. La gráfica muestra la forma en que la temperatura del pavo dis-

minuye y finalmente se aproxima a la temperatura del cuarto. Midiendo la pendiente de la tangente, estime la rapidez de cambio de la temperatura después de una hora.



32. Frecuencia cardíaca Un monitor se utiliza para medir la frecuencia cardíaca de un paciente después de una cirugía. Compila el número de pulsaciones después de t minutos. Cuando los datos de la tabla son graficados, la pendiente de la recta tangente representa la frecuencia cardíaca en pulsaciones por minuto.

t (min)	Pulsaciones
36	2530
38	2661
40	2806
42	2948
44	3080

(a) Encuentre el promedio de frecuencias cardíacas (pendientes de las rectas secantes) en los intervalos $[40, 32]$ y $[42, 44]$.
(b) Estime la frecuencia cardíaca del paciente después de 42 minutos promediando las pendientes de estas dos rectas secantes.

33. Flujo de agua Un tanque contiene 1000 galones de agua, que se drena por el fondo del tanque en media hora. Los valores de la tabla siguiente muestran el volumen V de agua que queda en el tanque (en galones) después de t minutos.

t (min)	V (gal)
5	694
10	444
15	250
20	111
25	28
30	0

(a) Encuentre la rapidez promedio a la que sale el agua del tanque (pendientes y rectas secantes) durante los intervalos $[10, 15]$ y $[15, 20]$.
(b) La pendiente de la recta tangente en el punto $(15, 250)$ representa la rapidez a la que el agua sale del tanque después de 15 minutos. Estime esta rapidez promediando las pendientes de las rectas secantes del inciso (a).

34. Crecimiento de la población mundial La tabla da la población mundial en el siglo XX.

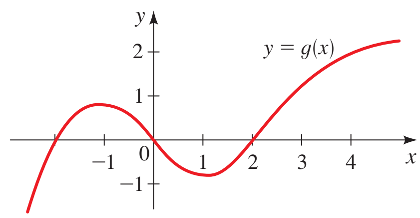
Año	Población (millones)	Año	Población (millones)
1900	1650	1960	3040
1910	1750	1970	3710
1920	1860	1980	4450
1930	2070	1990	5280
1940	2300	2000	6080
1950	2560		

Estime la rapidez de crecimiento de población en 1920 y en 1980 promediando las pendientes de dos rectas secantes.

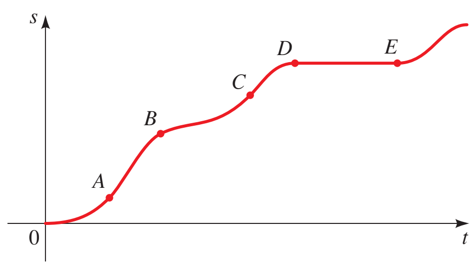
DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

35. Estimación de derivadas a partir de una gráfica Para la función g cuya gráfica se da, ordene los números siguientes en orden creciente y explique su razonamiento.

$$0 \qquad g'(-2) \qquad g'(0) \qquad g'(2) \qquad g'(4)$$



36. Estimación de velocidades a partir de una gráfica La gráfica muestra la función de la posición de un auto. Use la forma de la gráfica para explicar sus respuestas a las preguntas siguientes.
(a) ¿Cuál es la velocidad inicial del auto?
(b) ¿El auto corría más rápido en B o en C?
(c) ¿El auto reducía su velocidad o aceleraba en A, B y C?
(d) ¿Qué ocurrió entre D y E?



PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO **Diseño de una "montaña rusa"**

En este proyecto usamos derivadas para determinar cómo conectar diferentes partes de una "montaña rusa" en forma tal que se disfrute un viaje sin alteraciones bruscas. Se puede hallar el proyecto en el sitio web acompañante de este libro: **www.stewartmath.com**