Límites y continuidad

Cálculo diferencial e integral en una variable

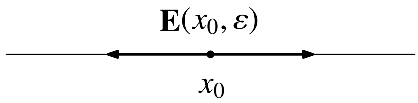
1. Límites

1.1. Entornos

Las nociones de *continuidad* y de *límite* de una función f en un punto x_0 están íntimamente vinculadas con el comportamiento de dicha función "alrededor del punto x_0". En matemática, se formaliza la noción intuitiva de proximidad mediante la noción de entorno:

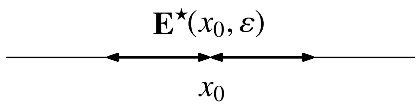
Definición 1 (Entorno de un punto)**.** Dados un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ y un número $\varepsilon > 0$, se llama *entorno de centro x_0 y de radio ε* al conjunto $\mathbf{E}(x_0, \varepsilon)$ definido por

$$\mathbf{E}(x_0, \varepsilon) \;:=\; \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \varepsilon\} \;=\; (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)\,.$$



De modo similar se define el *entorno reducido* $\mathbf{E}^\star(x_0, \varepsilon)$, excluyendo el punto x_0:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^\star(x_0, \varepsilon) \;&:=\; \mathbf{E}(x_0, \varepsilon) \setminus \{x_0\} \\ &=\; \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - x_0| < \varepsilon\} \;=\; (x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon)\,. \end{aligned}$$



Observación 2. Intuitivamente, el entorno $\mathbf{E}(x_0, \varepsilon)$ de centro x_0 y de radio $\varepsilon > 0$ representa el conjunto de las aproximaciones del número x_0 con precisión ε. Es claro que cuando se reemplaza el radio ε por otro radio $\varepsilon' \leq \varepsilon$ (es decir: por una precisión mejor), se obtiene un entorno contenido en el entorno anterior:

$$0 < \varepsilon' \leq \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E}(x_0, \varepsilon') \subset \mathbf{E}(x_0, \varepsilon)\,.$$

La observación anterior también vale para los entornos reducidos $\mathbf{E}^\star(x_0, \varepsilon)$ y $\mathbf{E}^\star(x_0, \varepsilon')$.

Definición 3 (Interior y clausura de un intervalo)**.** Sea un intervalo $I \subset \mathbb{R}$.

- El *interior de I* es el subintervalo $I^\circ \subset I$ obtenido excluyendo los extremos de I.
- La *clausura de I* es el supraintervalo $\bar{I} \supset I$ obtenido incluyendo los extremos de I.

La siguiente tabla resume la definición del interior y de la clausura de un intervalo en función del tipo del intervalo considerado:

Intervalo I	**Interior** I°	**Clausura** $\bar{I}$
$[a,b],\ [a,b),\ (a,b],\ (a,b),$ con $a<b$	(a,b)	$[a,b]$
$(-\infty,a],\ (-\infty,a)$	$(-\infty,a)$	$(-\infty,a]$
$[a,+\infty),\ (a,+\infty)$	$(a,+\infty)$	$[a,+\infty)$
$(-\infty,+\infty)\ (=\mathbb{R})$	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$
$\{a\}\ (=[a,a])$	$\varnothing$	$\{a\}$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$

Se observa que en todos los casos, tenemos que $I^\circ \subset I \subset \bar{I}$.

Definición 4 (Punto interior, punto adherente)**.** Dado un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, se dice que un número real x_0 es un *punto interior* de I cuando $x_0 \in I^\circ$, y que es un *punto adherente* a I cuando $x_0 \in \bar{I}$. Dicho de otro modo:

- un punto interior de I es un punto del intervalo I distinto de sus extremos;
- un punto adherente a I es o bien un punto del intervalo I, o bien uno de sus extremos (el «o» es inclusivo, pues los extremos del intervalo I pueden pertenecer a I).

Ejercicio 5 (Caracterización de los puntos interiores y adherentes)**.** Dados un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ y un número real x_0, se consideran las siguientes dos equivalencias:

(a) x_0 es un punto interior de I si y sólo si existe $\varepsilon > 0$ tal que $E(x_0, \varepsilon) \subset I$.
(b) x_0 es un punto adherente a I si y sólo si $E(x_0, \varepsilon) \cap I \neq \varnothing$ para todo $\varepsilon > 0$.

Para cada uno de los diez tipos de intervalos, demostrar que ambas equivalencias se cumplen.

Convención 6. En lo siguiente, sólo consideraremos funciones definidas en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ cuyo interior no es vacío, es decir, tal que $I^\circ \neq \varnothing$. Así, cuando escribiremos

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$...

habrá que leer:

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ tal que $I^\circ \neq \varnothing$...

En la práctica, la convención anterior sólo excluye las funciones definidas en el intervalo vacío $I = \varnothing$ y en los intervalos $I = \{a\}$ $(= [a,a])$ reducidos a un punto, que tienen poco interés en análisis. El lo que sigue, usaremos a menudo la siguiente propiedad, que sólo se cumple para los intervalos cuyo interior no es vacío:

Proposición 7. *Si $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo cuyo interior no es vacío ($I^\circ \neq \varnothing$), entonces para todo punto x_0 adherente a I y para todo $\varepsilon > 0$, tenemos que* $\mathbf{E}^\star(x_0, \varepsilon) \cap I \neq \varnothing$.

Ejercicio 8. Demostrar la propiedad anterior, distinguiendo los casos en función del tipo del intervalo considerado. ¿Qué pasa cuando el intervalo está reducido a un punto?

1.2. Noción de límite

Definición 9 (Límite de una función en un punto)**.** Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función real definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Dados un punto $x_0 \in \bar{I}$ y un número $L \in \mathbb{R}$, se dice que $f(x)$ *tiende a* L *cuando* x *tiende a* x_0, o que f *tiene límite* L *en el punto* x_0 cuando:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I, \quad 0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - L| < \varepsilon\,.$$

En este caso, se escribe

$$f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} L \qquad \text{o bien} \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$

Observaciones 10. (1) Formalmente, tenemos que

$$f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} L \qquad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \qquad \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I, \quad 0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - L| < \varepsilon$$

es decir, usando las notaciones para los entornos:

$$f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} L \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in \mathbf{E}^\star(x_0, \delta) \cap I, \quad f(x) \in \mathbf{E}(L, \varepsilon)\,.$$

Así, la definición de límite expresa la idea intuitiva que $f(x)$ es arbitrariamente cercano a L en cuanto x sea suficientemente cercano a x_0 (sin ser igual a x_0). Más precisamente:

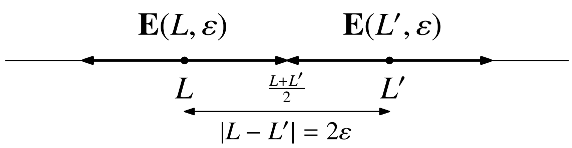
$\forall \varepsilon > 0,$	"Dada una precisión $\varepsilon > 0$ arbitraria,
$\exists \delta > 0,$	existe un radio $\delta > 0$ (suficientemente pequeño) tal que
$\forall x \in \mathbf{E}^\star(x_0, \delta) \cap I,$	todo punto $x \in I$, $x \neq x_0$ cercano a x_0 (a menos del radio δ)
$f(x) \in \mathbf{E}(L, \varepsilon)$	tiene imagen $f(x)$ cercana a L (a menos de la precisión ε)."

(2) La definición de límite sólo examina los valores tomados por la función f en los entornos *reducidos* del punto x_0 —que excluyen el punto x_0—, y nunca examina el valor de f en el propio punto x_0, cuando dicho valor existe[1]. Así, el valor tomado por la función f en el punto x_0 (cuando dicho valor existe) no influye ni en la existencia del límite, ni en el valor de dicho límite. La exclusión sistemática del punto x_0 del dominio de la observación también explica por qué se puede considerar el límite de la función f en cualquier extremo del intervalo I, incluso cuando la función f no está definida en dicho extremo.

(3) Una función $f : I \to \mathbb{R}$ no siempre tiene límite en un punto $x_0 \in \bar{I}$ (veremos contraejemplos más adelante), pero cuando tiene límite, éste es único:

Proposición 11 (Unicidad del límite)**.** *Sean una función* $f : I \to \mathbb{R}$ *definida en un intervalo* $I \subset \mathbb{R}$ *y un punto* $x_0 \in \bar{I}$*. Si* f *tiene límites* L *y* L' *en el punto* x_0*, entonces* $L = L'$*.*

Demostración. Supongamos (por el absurdo) que $L \neq L'$. Se considera la precisión $\varepsilon > 0$ definida por $\varepsilon := |L - L'|/2$, de tal modo que los entornos $\mathbf{E}(L, \varepsilon)$ y $\mathbf{E}(L', \varepsilon)$ sean disjuntos:



[1] Recordemos que el punto x_0 puede no estar en el intervalo de definición I.

Como f tiene límite L en el punto x_0, existe un radio $\delta > 0$ tal que $f(x) \in \mathbf{E}(L, \varepsilon)$ para todo $x \in \mathbf{E}^\star(x_0, \delta) \cap I$. Y como f también tiene límite L' en el punto x_0, existe otro radio $\delta' > 0$ tal que $f(x) \in \mathbf{E}(L', \varepsilon)$ para todo $x \in \mathbf{E}^\star(x_0, \delta') \cap I$. Ahora, se elige un punto $x \in I$ tal que $0 < |x - x_0| < \min(\delta, \delta')$ (tal punto existe por la Prop. 7), de tal modo que $x \in \mathbf{E}^\star(x_0, \delta) \cap I$ y $x \in \mathbf{E}^\star(x_0, \delta') \cap I$. Por lo anterior, se deduce que $f(x) \in \mathbf{E}(L, \varepsilon)$ y $f(x) \in \mathbf{E}(L', \varepsilon)$, lo que es absurdo pues ambos conjuntos $\mathbf{E}(L, \varepsilon)$ y $\mathbf{E}(L', \varepsilon)$ son disjuntos. □

Notación 12. Cuando la función $f : I \to \mathbb{R}$ tiene límite en el punto $x_0 \in \bar{I}$, dicho límite es único y se escribe $\lim_{x \to x_0} f(x)$. ¡Cuidado! Esta notación sólo tiene sentido cuando la función f tiene límite en el punto x_0, y no está definida si no.

Observación 13. En el caso donde $x_0 \in I$, tenemos tres situaciones posibles:

- o bien f no tiene límite en el punto x_0: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ no existe;
- o bien f tiene límite distinto de $f(x_0)$ en el punto x_0: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$;
- o bien f tiene límite igual a $f(x_0)$ en el punto x_0: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

En el último caso, diremos que la función f es *continua* en el punto x_0. Formalmente:

Definición 14 (Función continua en un punto)**.** Se dice que una función $f : I \to \mathbb{R}$ es *continua* en un punto $x_0 \in I$ cuando tiene límite igual a $f(x_0)$ en el punto x_0:

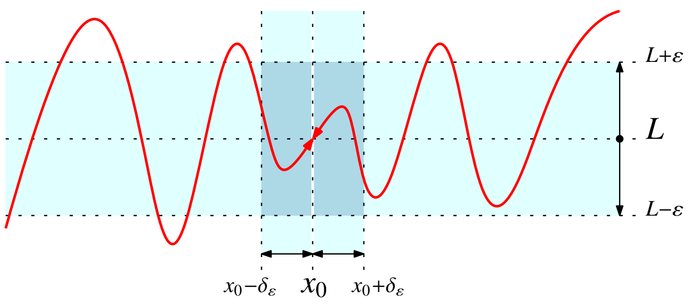
$$f \text{ continua en } x_0\ (\in I) \quad \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} f(x_0)\,.$$

En caso contrario, cuando la función f no tiene límite en el punto x_0, o cuando tiene límite distinto de $f(x_0)$ en el punto x_0, se dice que la función f es *discontinua* en el punto x_0.

1.3. Ejemplos y contraejemplos

Para demostrar que una función $f : I \to \mathbb{R}$ tiene límite $L \in \mathbb{R}$ en un punto x_0 adherente a su intervalo de definición I, se necesita construir para cada precisión $\varepsilon > 0$ un radio $\delta_\varepsilon > 0$ (que depende en general de la precisión $\varepsilon > 0$) tal que:

$$(*) \qquad \forall x \in I, \quad 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \ \Rightarrow\ |f(x) - L| < \varepsilon\,.$$



Dicho de otro modo, se necesita construir alguna *función* $\varepsilon \mapsto \delta_\varepsilon$ (de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}^+$) que asocie a cada precisión $\varepsilon > 0$ un "radio de seguridad" $\delta_\varepsilon > 0$ que cumpla la condición $(*)$[2]. Los siguientes ejemplos muestran cómo se puede construir tal función en la práctica.

[2]Tal función no es única (véase Obs. 16 más adelante) y en la práctica, sólo se necesita construir alguna.

Ejemplo 15 (Función identidad)**.** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función identidad, definida por $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces para todo punto $x_0 \in \mathbb{R}$, tenemos que

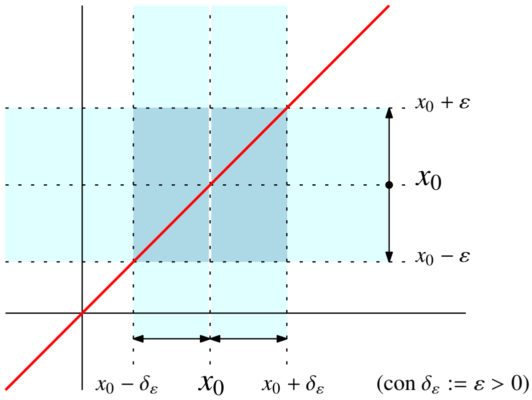
$$\lim_{x \to x_0} f(x) \; = \; x_0 \; \left(= \; f(x_0)\right).$$

Por lo tanto, la función identidad $f(x) = x$ es continua en todo punto $x_0 \in \mathbb{R}$.

Demostración. Dada una precisión $\varepsilon > 0$ fijada, se trata de hallar un radio $\delta_\varepsilon > 0$ tal que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \;\Rightarrow\; |f(x) - x_0| < \varepsilon\,.$$

Aquí, como $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, es natural tomar $\delta_\varepsilon := \varepsilon$.



En efecto, para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$, tenemos que $|x - x_0| < \varepsilon$ (pues $\delta_\varepsilon = \varepsilon$), es decir: $|f(x) - x_0| < \varepsilon$ (pues $f(x) = x$). □

Observación 16. En el ejemplo anterior, asociamos el radio $\delta_\varepsilon := \varepsilon$ a cada precisión $\varepsilon > 0$, pero también hubiéramos podido asociar cualquier radio menor o igual a ε, por ejemplo $\delta_\varepsilon := \varepsilon/2$ o $\delta_\varepsilon := \varepsilon/1000$. Más generalmente, dados una función $f : I \to \mathbb{R}$, un punto $x_0 \in \bar{I}$ y un número $L \in \mathbb{R}$, es claro que si un radio $\delta_\varepsilon > 0$ cumple la condición

$$\forall x \in I, \quad 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \;\Rightarrow\; |f(x) - L| < \varepsilon$$

para una precisión $\varepsilon > 0$ fijada, entonces cualquier radio $\delta'_\varepsilon > 0$ tal que $\delta'_\varepsilon \leq \delta_\varepsilon$ cumple la misma condición (reemplazando δ_ε por δ'_ε).

Ejercicio 17 (Función identidad modificada)**.** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ x & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \qquad \text{(para todo } x \in \mathbb{R}\text{)}$$

El objetivo del ejercicio es demostrar que $\lim_{x \to x_0} f(x) \;=\; x_0$ para todo $x_0 \in \mathbb{R}$.

(1) Demostrar que $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, asociando el radio $\delta_\varepsilon := \varepsilon$ a cada precisión $\varepsilon > 0$. Deducir que la función f es discontinua en el punto $x_0 = 0$.

(2) Ahora, se considera un punto $x_0 \neq 0$. Demostrar que $\lim_{x \to x_0} f(x) = x_0$, asociando el radio $\delta_\varepsilon := \min(\varepsilon, |x_0|)$ a cada precisión $\varepsilon > 0$. ¿Por qué no se puede tomar $\delta_\varepsilon := \varepsilon$? Deducir que la función f es continua en cada punto $x_0 \neq 0$.

Ejemplo 18 (Función raíz cuadrada)**.** Sea $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ la función raíz cuadrada, definida por $f(x) = \sqrt{x}$ para todo $x \in [0, +\infty)$. Entonces para todo punto $x_0 \in [0, +\infty)$, tenemos que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \;=\; \sqrt{x_0} \;\; (= \; f(x_0))\,.$$

Por lo tanto, la función raíz cuadrada $f(x) = \sqrt{x}$ es continua en todo punto $x_0 \in [0, +\infty)$.

Demostración. Sea $x_0 \geq 0$. Dada una precisión $\varepsilon > 0$, se trata de hallar un radio $\delta_\varepsilon > 0$ tal que:

$$(*) \qquad \forall x \in [0, +\infty), \quad 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \;\; \Rightarrow \;\; \left|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\right| < \varepsilon\,.$$

Para ello, se distinguen dos casos:

- Caso donde $x_0 = 0$. En este caso, se puede tomar $\delta_\varepsilon := \varepsilon^2 > 0$. En efecto, para todo $x \in [0, +\infty)$ tal que $0 < |x - 0| < \delta_\varepsilon$, tenemos que $0 < x < \varepsilon^2$ (pues $|x - 0| = x \geq 0$ y $\delta_\varepsilon = \varepsilon^2$). Entonces, tenemos que $|\sqrt{x} - 0| = \sqrt{x} < \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$.
- Caso donde $x_0 > 0$. Queremos construir un radio $\delta_\varepsilon > 0$ tal que

  $$\forall x \in [0, +\infty), \quad 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \;\; \Rightarrow \;\; \sqrt{x_0} - \varepsilon < \sqrt{x} < \sqrt{x_0} + \varepsilon\,.$$

  Para evitar que el número $\sqrt{x_0} - \varepsilon$ sea negativo, se reemplaza la precisión $\varepsilon > 0$ por la precisión (más fina) $\varepsilon' := \text{mín}(\varepsilon, \sqrt{x_0}) > 0$, de tal modo que $\sqrt{x_0} - \varepsilon' \geq 0$, mientras $\varepsilon' \leq \varepsilon$. Luego, se observa que para todo $x \in [0, +\infty)$, tenemos que

  $$(**) \qquad \sqrt{x_0} - \varepsilon' \;<\; \sqrt{x} \;<\; \sqrt{x_0} + \varepsilon' \quad \Leftrightarrow \quad \left(\sqrt{x_0} - \varepsilon'\right)^2 \;<\; x \;<\; \left(\sqrt{x_0} + \varepsilon'\right)^2$$

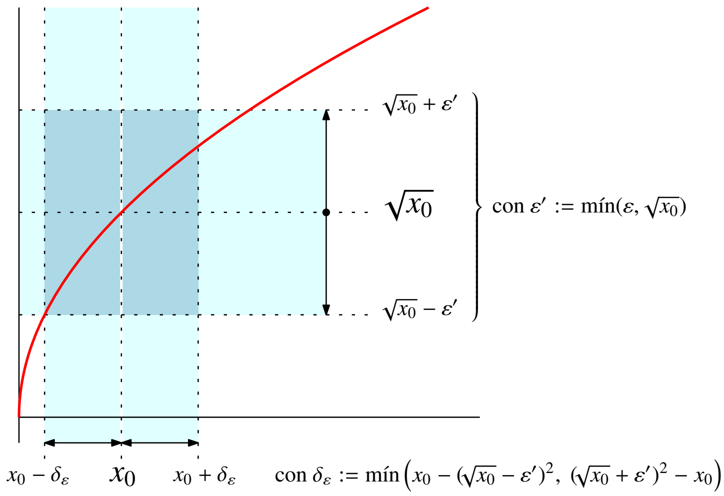
  pues los tres números $\sqrt{x_0} - \varepsilon'$, $\sqrt{x}$ y $\sqrt{x_0} + \varepsilon'$ son positivos o nulos. En particular, cuando $x = x_0$, se observa que

  $$\left(\sqrt{x_0} - \varepsilon'\right)^2 \;<\; x_0 \;<\; \left(\sqrt{x_0} + \varepsilon'\right)^2,$$

  lo que nos permite definir el radio $\delta_\varepsilon > 0$, escribiendo

  $$\delta_\varepsilon \;:=\; \text{mín}\left(x_0 - \left(\sqrt{x_0} - \varepsilon'\right)^2,\; \left(\sqrt{x_0} + \varepsilon'\right)^2 - x_0\right) \;> 0\,.$$

  Ahora, se trata de demostrar que el radio $\delta_\varepsilon > 0$ cumple la condición $(*)$ deseada.



Para ello, se considera un número $x \in [0, +\infty]$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$. Por hipótesis sobre x, tenemos que

$$\begin{array}{lllllll} x < x_0 + \delta_\varepsilon \leq x_0 + \left((\sqrt{x_0} + \varepsilon')^2 - x_0\right) & = & (\sqrt{x_0} + \varepsilon')^2 & \text{pues } \delta_\varepsilon \leq (\sqrt{x_0} + \varepsilon')^2 - x_0 \\ x > x_0 - \delta_\varepsilon \geq x_0 - \left(x_0 - (\sqrt{x_0} - \varepsilon')^2\right) & = & (\sqrt{x_0} - \varepsilon')^2 & \text{pues } \delta_\varepsilon \leq x_0 - (\sqrt{x_0} - \varepsilon')^2 \end{array}$$

es decir: $(\sqrt{x_0} - \varepsilon')^2 < x < (\sqrt{x_0} + \varepsilon')^2$. Por la equivalencia $(**)$, se deduce que

$$\sqrt{x_0} - \varepsilon' < \sqrt{x} < \sqrt{x_0} + \varepsilon', \qquad \text{es decir:} \qquad \left|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\right| < \varepsilon' \leq \varepsilon\,.$$

Lo que acaba demostrar la condición $(*)$ en el caso donde $x_0 > 0$. □

Observación 19 (Negación de la propiedad de límite)**.** Hasta ahora, sólo vimos ejemplos de funciones que tienen límites en todos los puntos de su intervalo de definición. Recordemos que una función $f : I \to \mathbb{R}$ tiene límite en un punto $x_0 \in \bar{I}$ si y sólo si:

$$\exists L \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I, \quad 0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - L| < \varepsilon\,.$$

Así, para demostrar que una función $f : I \to \mathbb{R}$ no tiene límite en un punto $x_0 \in \bar{I}$, se necesita demostrar la *negación* del enunciado anterior, es decir el enunciado:

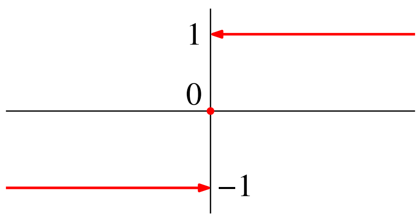
$$\forall L \in \mathbb{R},\ \exists \varepsilon > 0,\ \forall \delta > 0,\ \exists x \in I, \quad 0 < |x - x_0| < \delta\ \wedge\ |f(x) - L| \geq \varepsilon\,.$$

El siguiente ejemplo presenta una función que no tiene límite en el punto $x_0 = 0$.

Ejemplo 20 (Función signo)**.** Se considera la función $\mathrm{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ("signo"), definida por

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad \text{(para todo } x \in \mathbb{R})$$

Entonces la función sgn no tiene límite en el punto $x_0 = 0$.



Demostración. Queremos demostrar que:

$$\forall L \in \mathbb{R},\ \exists \varepsilon > 0,\ \forall \delta > 0,\ \exists x \in \mathbb{R}, \quad 0 < |x - 0| < \delta\ \wedge\ |\mathrm{sgn}(x) - L| \geq \varepsilon\,.$$

Dado un número $L \in \mathbb{R}$ cualquiera, se trata de hallar una precisión $\varepsilon > 0$ tal que

$$\forall \delta > 0,\ \exists x \in \mathbb{R}, \quad 0 < |x - 0| < \delta\ \wedge\ |\mathrm{sgn}(x) - L| \geq \varepsilon$$

es decir, tal que: $$\forall \delta > 0,\ \exists x \in \mathbf{E}^\star(0, \delta), \quad |\mathrm{sgn}(x) - L| \geq \varepsilon$$

Se elige la precisión $\varepsilon := 1$. Dado un radio $\delta > 0$ cualquiera, queremos hallar un punto $x \in \mathbf{E}^\star(0, \delta)$ tal que $|f(x) - L| \geq 1$ $(= \varepsilon)$. Para ello, se distinguen dos casos:

- Caso donde $L \geq 0$. En este caso, se elige el punto $x = -\frac{\delta}{2} \in \mathbf{E}^\star(0, \delta)$, de tal modo que $\operatorname{sgn}(x) = -1$. Entonces, tenemos que

$$|\operatorname{sgn}(x) - L| \ = \ |-1 - L| \ = \ |L + 1| \ = \ L + 1 \ \geq 1 \qquad\qquad (\text{pues } L \geq 0)$$

- Caso donde $L \leq 0$. En este caso, se elige el punto $x = \frac{\delta}{2} \in \mathbf{E}^\star(0, \delta)$, de tal modo que $\operatorname{sgn}(x) = 1$. Entonces, tenemos que

$$|\operatorname{sgn}(x) - L| \ = \ |1 + (-L)| \ = \ 1 + (-L) \ \geq 1 \qquad\qquad (\text{pues } -L \geq 0)$$

Así para cada radio $\delta > 0$, logramos hallar un punto $x \in \mathbf{E}^\star(0, \delta)$ tal que $|\operatorname{sgn}(x) - L| \geq \varepsilon$ (con $\varepsilon = 1$). Por lo tanto, la función sgn no tiene límite en el punto $x_0 = 0$. □

Ejercicio 21. Acabar el estudio de la función $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (función "signo"), demostrando que es continua en todo punto $x_0 \neq 0$.

Observación 22. En el ejemplo anterior, se observa que la función sgn tiende a -1 (al ser igual a -1) cuando x tiende a 0 *por la izquierda*, mientras sgn tiende a 1 (al ser igual a 1) cuando x tiende a 0 *por la derecha*, lo que escribiremos:

$$\lim_{x \to 0^-} \operatorname{sgn}(x) = -1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 0^+} \operatorname{sgn}(x) = 1\,.$$

Así, la función sgn tiene límites laterales (por la izquierda y por la derecha) en el punto 0, pero como dichos límites laterales son distintos, la función sgn no tiene límite en el punto 0. Las nociones de *límites laterales* serán definidas formalmente en la sección 1.7.2.

Para acabar esta sección, se presenta un ejemplo de función tan irregular que no tiene límite en ningún punto de su dominio de definición:

Ejemplo 23 (Función de Dirichlet)**.** Sea $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función de Dirichlet, definida por

$$D(x) \ = \ \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \qquad\qquad (\text{para todo } x \in \mathbb{R})$$

Entonces la función D no tiene límite en ningún punto $x_0 \in \mathbb{R}$.

Demostración. Dado $x_0 \in \mathbb{R}$ fijado, se trata de demostrar que

$$\forall L \in \mathbb{R},\ \exists \varepsilon > 0,\ \forall \delta > 0,\ \exists x \in \mathbf{E}^\star(x_0, \delta), \quad |D(x) - L| \geq \varepsilon\,.$$

Así, dado un número $L \in \mathbb{R}$ cualquiera, se trata de hallar una precisión $\varepsilon > 0$ tal que

$$\forall \delta > 0,\ \exists x \in \mathbf{E}^\star(x_0, \delta), \quad |D(x) - L| \geq \varepsilon$$

Se elige la precisión $\varepsilon := \frac{1}{2}$. Dado un radio $\delta > 0$, queremos hallar un punto $x \in \mathbf{E}^\star(x_0, \delta)$ tal que $|D(x) - L| \geq \frac{1}{2}$ ($= \varepsilon$). Para ello, se observa que el intervalo $(x_0, x_0 + \delta) \subset \mathbf{E}^\star(x_0, \delta)$ contiene a la vez números racionales y números irracionales (como todos los intervalos cuyo interior no es vacío), lo que nos permite elegir dos puntos $x_1, x_2 \in (x_0, x_0 + \delta) \subset \mathbf{E}^\star(x_0, \delta)$ tales que $x_1 \in \mathbb{Q}$ y $x_2 \notin \mathbb{Q}$. Ahora, se distinguen los siguientes dos casos:

- Caso donde $L \le \frac{1}{2}$. En este caso, se toma $x := x_1 \in \mathbf{E}^\star(x_0, \delta)$, de tal modo que $D(x) = 1$ (pues $x = x_1 \in \mathbb{Q}$). Se verifica que

$$|D(x) - L| \;=\; |1 - L| \;=\; 1 - L \;\ge\; \tfrac{1}{2} \qquad\qquad (\text{pues } L \le \tfrac{1}{2})$$

- Caso donde $L \ge \frac{1}{2}$. En este caso, se elige $x := x_2 \in \mathbf{E}^\star(x_0, \delta)$, de tal modo que $D(x) = 0$ (pues $x = x_2 \notin \mathbb{Q}$). Se verifica que

$$|D(x) - L| \;=\; |0 - L| \;=\; |L| \;=\; L \;\ge\; \tfrac{1}{2} \qquad\qquad (\text{pues } L \ge \tfrac{1}{2})$$

Así, para cada radio $\delta > 0$, logramos hallar un punto $x \in \mathbf{E}^\star(0, \delta)$ tal que $|D(x) - L| \ge \varepsilon$ (con $\varepsilon = \frac{1}{2}$). Por lo tanto, la función D no tiene límite en el punto x_0. □

1.4. Propiedades algebraicas de los límites

Antes de estudiar las propiedades de los límites, se necesita observar lo siguiente:

Observación 24. Dados una función $f : I \to \mathbb{R}$ definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, un punto $x_0 \in \bar{I}$ adherente al intervalo de definición y un número $L \in \mathbb{R}$, los tres enunciados

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L, \qquad \lim_{x\to x_0} (f(x) - L) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to x_0} |f(x) - L| = 0$$

son equivalentes.

Demostración. En efecto, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} f(x) = L \quad &\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad \forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall x \in \mathbf{E}^\star(x_0, \delta) \cap I,\ |f(x) - L| < \varepsilon \\
\lim_{x\to x_0} (f(x) - L) = 0 \quad &\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad \forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall x \in \mathbf{E}^\star(x_0, \delta) \cap I,\ \big|(f(x) - L) - 0\big| < \varepsilon \\
\lim_{x\to x_0} |f(x) - L| = 0 \quad &\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad \forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall x \in \mathbf{E}^\star(x_0, \delta) \cap I,\ \big||f(x) - L| - 0\big| < \varepsilon
\end{aligned}$$

Se concluye observando que $\big||f(x) - L| - 0\big| = |f(x) - L| = \big|(f(x) - L) - 0\big|$. □

Proposición 25 (Límite de una suma, una resta)**.** *Sean $f, g : I \to \mathbb{R}$ dos funciones definidas en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, un punto $x_0 \in \bar{I}$ y dos números $L, L' \in \mathbb{R}$.*

(1) *Si* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ *y* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L'$, *entonces* $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = L + L'$.

(2) *Si* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ *y* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L'$, *entonces* $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) - g(x)) = L - L'$.

Demostración. (1) Supongamos que $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = L'$. Por hipótesis, existen dos funciones $\varepsilon \mapsto \delta_\varepsilon$ y $\varepsilon \mapsto \delta'_\varepsilon$ (de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}^+$) tales que

$$(*) \qquad \forall x \in I, \quad 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \;\Rightarrow\; |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$(*') \qquad \forall x \in I, \quad 0 < |x - x_0| < \delta'_\varepsilon \;\Rightarrow\; |g(x) - L'| < \varepsilon$$

para toda precisión $\varepsilon > 0$. Queremos construir una función $\varepsilon \mapsto \delta''_\varepsilon$ (de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}^+$) tal que

$$(*'') \qquad \forall x \in I, \quad 0 < |x - x_0| < \delta''_\varepsilon \;\Rightarrow\; \big|(f(x) + g(x)) - (L + L')\big| < \varepsilon$$

para toda precisión $\varepsilon > 0$. Para ello, se define $\delta''_\varepsilon := \min(\delta_{\varepsilon/2}, \delta'_{\varepsilon/2}) > 0$ para todo $\varepsilon > 0$. En efecto, dados una precisión $\varepsilon > 0$ y un punto $x \in I$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta''_\varepsilon$, tenemos que

- $0 < |x - x_0| < \delta_{\varepsilon/2}$ (pues $\delta''_\varepsilon \le \delta_{\varepsilon/2}$), entonces $|f(x) - L| < \varepsilon/2$ por $(*)$;
- $0 < |x - x_0| < \delta'_{\varepsilon/2}$ (pues $\delta''_\varepsilon \le \delta'_{\varepsilon/2}$), entonces $|g(x) - L'| < \varepsilon/2$ por $(*')$.

Sumando las dos desigualdades obtenidas, se deduce que

$$\begin{aligned}\Big|(f(x) + g(x)) - (L + L')\Big| &= \Big|(f(x) - L) + (g(x) - L')\Big| \\ &\le |f(x) - L| + |g(x) - L'| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon\,.\end{aligned}$$

Lo que demuestra la condición $(*'')$ para todo $\varepsilon > 0$, es decir: $\lim_{x\to x_0}(f(x) + g(x)) = L + L'$.

(2) El caso de la resta es análogo al caso de la suma. □

Ejercicio 26. Demostrar el ítem (2) de la proposición anterior, adaptando la demostración del ítem (1) de modo adecuado. (Sugerencia: en la demostración del ítem (1), sólo se necesita reemplazar 5 ocurrencias del símbolo «+» por el símbolo «−».)

Ahora, queremos demostrar la propiedad análoga para el producto y el cociente. Para ello, se necesita establecer algunos resultados intermedios.

Definición 27 (Función acotada en un entorno de un punto)**.** Sean $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, y un punto $x_0 \in \bar{I}$. Se dice que la función f *está acotada en un entorno de* x_0 cuando existen $r > 0$ y $M \ge 0$ tales que

$$\forall x \in \mathbf{E}(x_0, r) \cap I,\quad |f(x)| \le M\,.$$

Ejercicio 28. El enunciado que expresa que f está acotada en un entorno de x_0 es:

$$\exists r > 0,\ \exists M \ge 0,\ \forall x \in \mathbf{E}(x_0, r) \cap I,\quad |f(x)| \le M\,.$$

(1) Escribir la negación del enunciado anterior, es decir: el enunciado que expresa que la función f no está acotada en ningún entorno del punto x_0.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le 0 \\ 1/x & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad \text{(para todo } x \in \mathbb{R})$$

(2) Demostrar que la función f no está acotada en ningún entorno del punto $x_0 = 0$.

(3) Demostrar que para todo punto $x_0 \ne 0$, la función f está acotada en un entorno de x_0. (Sugerencia: distinguir los casos $x_0 < 0$ y $x_0 > 0$.)

Proposición 29. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Si f tiene límite en un punto $x_0 \in \bar{I}$, entonces f está acotada en un entorno del punto x_0.*

Demostración. Suponiendo que $\lim_{x\to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$, se considera un radio $\delta > 0$ tal que

$$(*) \qquad \forall x \in \mathbf{E}^\star(x_0, \delta_\varepsilon) \cap I,\quad |f(x) - L| < 1\,.$$

(Basta con tomar el radio asociado a la precisión $\varepsilon = 1$.) Ahora, se distinguen dos casos:

- Caso donde $x_0 \in I$ (la función f está definida en el punto x_0). En este caso, se toman $r := \delta$ y $M := \text{máx}(|L| + 1, |f(x_0)|) \ge 0$. En efecto, dado un punto $x \in \mathbf{E}(x_0, r) \cap I$ $(= \mathbf{E}(x_0, \delta) \cap I)$, se observa que

- o bien $x = x_0$, y en este caso, tenemos que $|f(x)| = |f(x_0)| \leq M$;
- o bien $x \neq x_0$, y en este caso, tenemos que $x \in \mathbf{E}^\star(x_0, \delta) \cap I$. Por lo tanto, tenemos que $|f(x) - L| < 1$ por $(*)$, de tal modo que

$$|f(x)| \;=\; |L + (f(x) - L)| \;\leq\; |L| + |f(x) - L| \;<\; |L| + 1 \;\leq\; M\,.$$

Así, para todo $x \in \mathbf{E}(x_0, r) \cap I$, tenemos que $|f(x)| \leq M$.

- Caso donde $x_0 \notin I$ (la función f no está definida en el punto x_0). En este caso, basta con tomar $r := \delta$ y $M := |L| + 1$; el razonamiento es análogo. □

Proposición 30. *Sean $f, g : I \to \mathbb{R}$ dos funciones definidas en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ y un punto $x_0 \in \bar{I}$. Si f está acotada en un entorno de x_0, y si* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, *entonces* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$.

Demostración. Por hipótesis, sabemos que:

(i) Existen $r > 0$ y $M \geq 0$ tales que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in \mathbf{E}(x_0, r) \cap I$. Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que $M > 0$[3].

(ii) Existe una función $\varepsilon \mapsto \delta_\varepsilon$ (de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}^+$) tal que para todo $\varepsilon > 0$, tenemos que

$$(*) \qquad\qquad \forall x \in I, \quad 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \;\;\Rightarrow\;\; |g(x)| < \varepsilon\,.$$

Se trata de construir una función $\varepsilon \mapsto \delta'_\varepsilon$ (de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}^+$) tal que

$$(*') \qquad\qquad \forall x \in I, \quad 0 < |x - x_0| < \delta'_\varepsilon \;\;\Rightarrow\;\; |f(x)g(x)| < \varepsilon$$

para toda precisión $\varepsilon > 0$. Para ello, se define $\delta'_\varepsilon := \text{mín}(\delta_{\varepsilon/M}, r) > 0$ para todo $\varepsilon > 0$. En efecto, dados una precisión $\varepsilon > 0$ y un punto $x \in I$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta'_\varepsilon$, tenemos que:

- $|x - x_0| < r$ (pues $\delta'_\varepsilon \leq r$), entonces $|f(x)| \leq M$ por (i).
- $0 < |x - x_0| < \delta_{\varepsilon/M}$ (pues $\delta'_\varepsilon \leq \delta_{\varepsilon/M}$), entonces $|g(x)| < \varepsilon/M$ por $(*)$.

Por lo tanto, se deduce que

$$|f(x)g(x)| \;=\; |f(x)| \cdot |g(x)| \;<\; M \cdot \frac{\varepsilon}{M} \;=\; \varepsilon\,.$$

Esto demuestra la condición $(*')$ para todo $\varepsilon > 0$, es decir: $\text{lím}_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$. □

Ahora, se puede demostrar la propiedad de límite para el producto:

Proposición 31 (Límite de un producto)**.** *Sean $f, g : I \to \mathbb{R}$ dos funciones definidas en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, un punto $x_0 \in \bar{I}$ y dos números $L, L' \in \mathbb{R}$. Si* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ *y* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L'$, *entonces* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = LL'$.

Demostración. Por hipótesis, tenemos que $\text{lím}_{x\to x_0}(f(x) - L) = 0$ y $\text{lím}_{x\to x_0}(g(x) - L') = 0$ (por la Obs. 24 p. 9). Ahora, se observa que para todo $x \in I$, tenemos que

$$f(x)g(x) - LL' \;=\; (f(x) - L)L' + f(x)(g(x) - L')\,.$$

Como $\text{lím}_{x\to x_0}(f(x) - L) = 0$, y como la función constante igual a L' está (trivialmente) acotada en un entorno de x_0, tenemos que $\text{lím}_{x\to x_0}(f(x) - L)L' = 0$ por la Prop. 30. Por otro

[3] En efecto, siempre se puede reemplazar $M \geq 0$ por $M' := M + 1 > 0$ sin afectar la condición (i).

lado, como f tiene límite en el punto x_0, está acotada en un entorno de x_0 por la Prop. 29. Y como $\lim_{x\to x_0}(g(x) - L') = 0$, tenemos que $\lim_{x\to x_0} f(x)(g(x) - L') = 0$, usando de nuevo la Prop. 30. Sumando los dos límites anteriores, se deduce por la Prop. 25 (1) que

$$\lim_{x\to x_0}\Big(f(x)g(x) - LL'\Big) \;=\; \lim_{x\to x_0}\Big((f(x) - L)L'\Big) \;+\; \lim_{x\to x_0}\Big(f(x)(g(x) - L')\Big) \;=\; 0 + 0 \;=\; 0\,,$$

lo que demuestra que $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = LL'$ por la Obs. 24. □

Ejercicio 32 (Continuidad de las funciones polinomiales)**.** El objetivo del ejercicio es demostrar que todas las funciones polinomiales son continuas en todos los puntos de $\mathbb{R}$.

(1) Demostrar por inducción sobre $k \in \mathbb{N}$ que $\lim_{x\to x_0} x^k = x_0^k$ para todo $x_0 \in \mathbb{R}$. Deducir que la función $x \mapsto x^k$ es continua en todo punto $x_0 \in \mathbb{R}$.
(Sugerencia: en el paso inductivo, observar que $x^{k+1} = f(x)g(x)$, con $f(x) = x^k$ y $g(x) = x$, y usar el resultado del Ejemplo 15 p. 5.)

(2) Deducir de lo anterior que para todos $a \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{N}$, la función monomial $x \mapsto ax^k$ es continua en todo punto $x_0 \in \mathbb{R}$.

(3) Demostrar por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$ que toda función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la forma

$$f(x) \;=\; a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \;=\; \sum_{k=0}^{n} a_kx^k$$

(con $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$) es continua en todo punto $x_0 \in \mathbb{R}$.

Proposición 33 (Límite de la función $1/f$)**.** *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, tal que que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Si $x_0 \in \bar{I}$ es un punto tal que $\lim_{x\to x_0} f(x) = L \neq 0$, entonces*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{L}\cdot$$

Demostración. Queremos demostrar que $\lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{L}\right) = 0$. Para ello, se observa que

$$\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{L} \;=\; \frac{L - f(x)}{f(x)L} \;=\; -\,\frac{1}{L}\cdot\frac{1}{f(x)}\cdot(f(x) - L) \qquad \text{(para todo } x \in I)$$

Demostremos que la función $g : I \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = 1/f(x)$ está acotada en un entorno del punto x_0. Como $\lim_{x\to x_0} f(x) = L \neq 0$, existe un radio $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \frac{|L|}{2} \qquad \text{para todo } x \in \mathbf{E}^\star(x_0, \delta) \cap I$$

(considerando el radio asociado a la precisión $|L|/2 > 0$). Entonces, tenemos que

$$|L| \;=\; |f(x) - (f(x) - L)| \;\leq\; |f(x)| + |f(x) - L| \;\leq\; |f(x)| + \frac{|L|}{2}$$

para todo $x \in \mathbf{E}^\star(x_0, \delta) \cap I$, de tal modo que

$$|f(x)| \;\geq\; |L| - \frac{|L|}{2} \;=\; \frac{|L|}{2} \qquad \text{(para todo } x \in \mathbf{E}^\star(x_0, \delta) \cap I)$$

Ahora, se distinguen dos casos:

- Caso donde $x_0 \in I$ (la función f está definida en el punto x_0). En este caso, se deduce de lo anterior que $|g(x)| = 1/|f(x)| \leq 2/|L|$ para todo $x \in \mathbf{E}^\star(x_0, \delta) \cap I$, de tal modo que

$$|g(x)| \;=\; \frac{1}{|f(x)|} \;\leq\; \text{máx}\left(\frac{2}{|L|}, \frac{1}{|f(x_0)|}\right) \qquad\qquad \text{para todo } x \in \mathbf{E}(x_0, \delta) \cap I$$

  (distinguiendo los casos $x \neq x_0$ y $x = x_0$).
- Caso donde $x_0 \notin I$ (la función f no está definida en el punto x_0). En este caso, se observa que $\mathbf{E}(x_0, \delta) \cap I = \mathbf{E}^\star(x_0, \delta) \cap I$ (pues $x_0 \notin I$), de tal modo que

$$|g(x)| \;=\; \frac{1}{|f(x)|} \;\leq\; \frac{2}{|L|} \qquad\qquad \text{para todo } x \in \mathbf{E}(x_0, \delta) \cap I.$$

Así, en ambos casos, demostramos que la función $g(x) = 1/f(x)$ está acotada en un entorno $\mathbf{E}(x_0, \delta)$ del punto x_0. Además, tenemos que $\lim_{x\to x_0}(f(x) - L) = 0$ por hipótesis. Aplicando dos veces seguidas la Prop. 30, se deduce de lo anterior que

$$\lim_{x\to x_0}\Big(g(x) \cdot (f(x) - L)\Big) \;=\; 0$$

y
$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{L}\right) \;=\; \lim_{x\to x_0}\left(-\frac{1}{L} \cdot \Big(g(x) \cdot (f(x) - L)\Big)\right) \;=\; 0\,. \qquad \square$$

Observación 34. (1) Cabe destacar que para calcular el límite de la función $x \mapsto 1/f(x)$ en el punto x_0, se necesita verificar tres condiciones:

(*i*) la función $f : I \to \mathbb{R}$ no se anula[4] en I: $f(x) \neq 0$ para todo $x \in I$;
(*ii*) la función f tiene límite en el punto $x_0 \in \bar{I}$;
(*iii*) el límite de la función f en el punto x_0 no es nulo: $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq 0$.

¡Cuidado! Las condiciones (*i*) y (*ii*) no implican la condición (*iii*). Un contraejemplo es la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) \;=\; \begin{cases} |x| & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad\qquad (\text{para todo } x \in \mathbb{R})$$

Por construcción, tenemos que $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (condición (*i*)). Además, la función f tiene límite en el punto $x_0 = 0$ (condición (*ii*)), pero éste es nulo: $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

(2) Por otro lado, las condiciones (*ii*) y (*iii*) implican que la función f no se anula en algún entorno reducido del punto x_0, en el sentido de que existe un radio $\delta > 0$ tal que:

$$\forall x \in \mathbf{E}^\star(x_0, \delta) \cap I, \;\; f(x) \neq 0\,.$$

(Véase ejercicio 35 más abajo). Sin embargo, en el caso donde $x_0 \in I$, esta propiedad de "no anulación local" no implica que $f(x_0) \neq 0$, salvo cuando f es continua en el punto x_0.

Ejercicio 35 (Límite no nulo)**.** Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, y tal que $\lim_{x\to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$ en algún punto $x_0 \in \bar{I}$.

[4]Esta condición sirve para asegurarnos que la función $1/f$ está definida en el intervalo I.

(1) Demostrar que si $L > 0$, entonces existe un radio $\delta > 0$ tal que

$$\forall x \in \mathbf{E}^{\star}(x_0, \delta) \cap I, \quad f(x) > 0\,.$$

(Sugerencia: considerar el radio asociado a la precisión $\varepsilon := L > 0$.)

(2) Demostrar que si $L < 0$, entonces existe un radio $\delta > 0$ tal que

$$\forall x \in \mathbf{E}^{\star}(x_0, \delta) \cap I, \quad f(x) < 0\,.$$

(Sugerencia: considerar el radio asociado a la precisión $\varepsilon := -L > 0$.)

(3) Deducir de lo anterior que si $L \neq 0$, entonces la función f no se anula en algún entorno reducido del punto x_0. Mediante un contraejemplo adecuado, explicar por qué la propiedad no se puede extender (en general) a un entorno lleno (no reducido) del punto x_0.

Corolario 36 (Límite de un cociente)**.** *Sean $f, g : I \to \mathbb{R}$ dos funciones definidas en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, tales que $g(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Si $x_0 \in \bar{I}$ es un punto tal que $\lim_{x\to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = L' \neq 0$, entonces*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{L'}\cdot$$

Demostración. Se sigue de la Prop. 31 y de la Prop. 33, observando que $f/g = f \cdot (1/g)$. □

1.5. Propiedades de monotonía

Lema 37 (Límite de una función positiva o nula)**.** *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Si f es positiva o nula en I (es decir: $f(x) \geq 0$ para todo $x \in I$) y tiene límite en un punto $x_0 \in \bar{I}$, entonces dicho límite es positivo o nulo: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \ \geq\ 0$.*

Demostración. Sea $L := \lim_{x\to x_0} f(x)$. Dado $\varepsilon > 0$, existe un radio $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ para todo $x \in \mathbf{E}^{\star}(x_0, \delta) \cap I$. Eligiendo un punto $x \in \mathbf{E}^{\star}(x_0, \delta) \cap I$, se observa que

$$-L \ =\ 0 - L \ \leq\ f(x) - L \ <\ \varepsilon \qquad\qquad \text{(pues } 0 \leq f(x) \text{ por hipótesis)}$$

Así, demostramos que $-L < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. Luego $-L \leq 0$, es decir: $L \geq 0$. □

Observaciones 38. (1) De modo análogo, se demuestra que si f es negativa o nula en I (es decir: $f(x) \leq 0$ para todo $x \in I$) y tiene límite en el punto x_0, entonces $\lim_{x\to x_0} f(x) \leq 0$.

(2) ¡Cuidado! En el caso donde $f(x) > 0$ para todo $x \in I$ (resp. $f(x) < 0$ para todo $x \in I$), sólo se puede concluir que $\lim_{x\to x_0} f(x) \geq 0$ (resp. $\lim_{x\to x_0} f(x) \leq 0$). Un ejemplo de función estrictamente positiva con límite nulo es dado por la función f de la Obs. 34 (1).

Más generalmente, se demuestra que:

Proposición 39 (Monotonía de los límites)**.** *Sean $f, g : I \to \mathbb{R}$ dos funciones definidas en un mismo intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in I$, y si ambas funciones tienen límites en un punto $x_0 \in \bar{I}$, entonces $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \ \leq\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.*

Demostración. Basta con aplicar el lema anterior con la función $g - f$ (que es positiva o nula en el intervalo I), observando que $\lim\limits_{x\to x_0} (g(x) - f(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) - \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. □

El siguiente teorema, conocido como el “teorema del sándwich[5]”, enuncia una propiedad muy útil en la práctica para demostrar la existencia de un límite:

Teorema 40 (Teorema del sándwich)**.** *Sean $f, g_1, g_2 : I \to \mathbb{R}$ tres funciones definidas en un mismo intervalo $I \subset \mathbb{R}$, y tales que $g_1(x) \leq f(x) \leq g_2(x)$ para todo $x \in I$. Si las funciones g_1 y g_2 tienen el mismo límite $L \in \mathbb{R}$ en un punto $x_0 \in \bar{I}$, entonces la función f también tiene límite L en el punto x_0:*

$$g_1 \leq f \leq g_2 \ \wedge \ \lim_{x\to x_0} g_1(x) = \lim_{x\to x_0} g_2(x) = L \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = L\,.$$

Demostración. Por hipótesis, existen funciones $\varepsilon \mapsto \delta'_\varepsilon$ y $\varepsilon \mapsto \delta''_\varepsilon$ (de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}^+$) tales que

$$(*_1) \qquad \forall x \in I, \quad 0 < |x - x_0| < \delta'_\varepsilon \ \Rightarrow \ |g_1(x) - L| < \varepsilon$$

$$(*_2) \qquad \forall x \in I, \quad 0 < |x - x_0| < \delta''_\varepsilon \ \Rightarrow \ |g_2(x) - L| < \varepsilon$$

para toda precisión $\varepsilon > 0$. Queremos construir una función $\varepsilon \mapsto \delta_\varepsilon$ (de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}^+$) tal que

$$(*) \qquad \forall x \in I, \quad 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \ \Rightarrow \ |f(x) - L| < \varepsilon$$

para todo $\varepsilon > 0$. Para ello, se define $\delta_\varepsilon := \text{mín}(\delta'_\varepsilon, \delta''_\varepsilon) > 0$ para todo $\varepsilon > 0$. En efecto, dados una precisión $\varepsilon > 0$ y un punto $x \in I$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$ ($= \text{mín}(\delta'_\varepsilon, \delta''_\varepsilon)$), tenemos que

- $0 < |x - x_0| < \delta'_\varepsilon$, entonces $|g_1(x) - L| < \varepsilon$ por $(*_1)$, es decir: $L - \varepsilon < g_1(x) < L + \varepsilon$;
- $0 < |x - x_0| < \delta''_\varepsilon$, entonces $|g_2(x) - L| < \varepsilon$ por $(*_2)$, es decir: $L - \varepsilon < g_2(x) < L + \varepsilon$.

Por lo tanto, tenemos que $L - \varepsilon < g_1(x) \leq f(x) \leq g_2(x) < L + \varepsilon$, es decir: $|f(x) - L| < \varepsilon$. Lo que demuestra la condición $(*)$ para todo $\varepsilon > 0$, de tal modo que $\text{lím}_{x\to x_0} f(x) = L$. □

Ejemplo 41 (Continuidad de la función logaritmo en el punto $x_0 = 1$)**.** En el capítulo sobre las integrales (Sección 4.3 p. 38), definimos la función $\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ (logaritmo) por

$$\log x \ := \ \int_1^x \frac{1}{t}\, dt \qquad \text{(para todo } x > 0)$$

y demostramos (Ejercicio 97 p. 41) las desigualdades

$$1 - \frac{1}{x} \ \leq \ \log x \ \leq \ x - 1 \qquad \text{(para todo } x > 0)$$

Usando las propiedades algebraicas de los límites, se verifica inmediatamente que

$$\lim_{x\to 1}\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{1}{1} = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 1}(x - 1) = 1 - 1 = 0\,.$$

Por el teorema del sándwich, se deduce que $\text{lím}_{x\to 1} \log x = 0$ ($= \log 1$). Por lo tanto, la función logaritmo es continua en el punto $x_0 = 1$.

Ejercicio 42. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) \ = \ \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ -x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

(1) Verificar que $-x \leq f(x) \leq x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
(2) Deducir (por el teorema del sándwich) que $\text{lím}_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$.
(3) ¿Existe un punto $x_0 \neq 0$ donde f tenga límite?

[5] Según la analogía del “sándwich”, las funciones g_1 y g_2 representan las trayectorias de dos rebanadas de pan que intentan capturar una loncha de jamón f. En Francia, este resultado también es conocido como el “teorema de los gendarmes”, al ser g_1 y g_2 dos gendarmes que intentan detener a un ladrón f.

1.6. Composición de límites

Sean $f : I \to \mathbb{R}$ y $g : J \to \mathbb{R}$ dos funciones definidas en intervalos $I, J \subset \mathbb{R}$, y tales que $f(x) \in J$ para todo $x \in I$ (lo que escribiremos $f(I) \subset J$). En tal situación, se puede definir la función compuesta $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ por

$$(g \circ f)(x) \ := \ g(f(x)) \qquad\qquad \text{(para todo } x \in I)$$

Ahora, se demuestra que:

Proposición 43 (Composición de límites)**.** *Si la función f tiene límite y_0 en un punto $x_0 \in \bar{I}$, con $y_0 \in J$, y si la función g es continua en el punto $y_0 \in J$ (es decir:* $\lim_{y \to y_0} g(y) = g(y_0)$*), entonces la función $g \circ f$ tiene límite $g(y_0)$ en el punto x_0:*

$$\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) \ = \ \lim_{x \to x_0} g(f(x)) \ = \ g(y_0)\,.$$

Demostración. Por hipótesis, existen funciones $\varepsilon \mapsto \delta_\varepsilon$ y $\varepsilon \mapsto \delta'_\varepsilon$ (de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$) tales que:

$$(*) \qquad \forall x \in I, \quad 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \ \Rightarrow \ |f(x) - y_0| < \varepsilon$$
$$(*') \qquad \forall y \in I, \quad 0 < |y - y_0| < \delta'_\varepsilon \ \Rightarrow \ |g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$$

para toda precisión $\varepsilon > 0$. Queremos construir una función $\varepsilon \mapsto \delta''_\varepsilon$ (de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}^+$) tal que

$$(*'') \qquad \forall x \in I, \quad 0 < |x - x_0| < \delta''_\varepsilon \ \Rightarrow \ \big|g(f(x)) - g(y_0)\big| < \varepsilon\,.$$

para toda precisión $\varepsilon > 0$. Para ello, se define $\delta''_\varepsilon := \delta_{\delta'_\varepsilon}$ para todo $\varepsilon > 0$. En efecto, dados una precisión $\varepsilon > 0$ y un punto $x \in I$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta''_\varepsilon$, tenemos que $|f(x) - y_0| < \delta'_\varepsilon$ por $(*)$, pues $\delta''_\varepsilon = \delta_{\delta'_\varepsilon}$. Ahora, se distinguen los siguientes dos casos:

- Caso donde $f(x) = y_0$. En este caso, es obvio que $|g(f(x)) - g(y_0)| = 0 < \varepsilon$.
- Caso donde $f(x) \neq y_0$. En este caso, tenemos que $0 < |f(x) - y_0| < \delta'_\varepsilon$. Aplicando $(*')$ al punto $y = f(x) \in J$, se deduce que $|g(f(x)) - g(y_0)| < \varepsilon$.

Así, en ambos casos vimos que $|g(f(x)) - g(y_0)| < \varepsilon$, lo que acaba demostrar la condición $(*'')$ para todo $\varepsilon > 0$. Por lo tanto: $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(y_0)$. □

Observaciones 44. (1) Los lectores habrán observado que, en la proposición anterior, no sólo se supone que la función g tiene límite en el punto y_0, sino también se supone que dicho límite es igual a $g(y_0)$ (es decir: que la función g es continua en el punto y_0). En efecto, la propiedad de composición no se cumple cuando la función g tiene límite sin ser continua en el punto y_0. Un contraejemplo sencillo es el siguiente: sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por

$$f(x) = 0 \qquad \text{y} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \qquad\qquad \text{(para todo } x \in \mathbb{R})$$

Escribiendo $x_0 := 0$ e $y_0 := 0$, es claro que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 = y_0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{y \to y_0} g(y) = 0\,.$$

Sin embargo, tenemos que $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(0) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, de tal modo que $g \circ f$ tiene límite $1 \neq 0$ en el punto $x_0 = 0$.

(2) En la práctica, casi siempre usaremos la proposición anterior en el caso particular donde las funciones f y g son continuas en los puntos $x_0 \in I$ e $y_0 := f(x_0) \in I$, respectivamente:

Corolario 45 (Composición de límites en el caso continuo)**.** *Sean $f : I \to \mathbb{R}$ y $g : J \to \mathbb{R}$ dos funciones definidas en intervalos $I, J \subset \mathbb{R}$, y tales que $f(I) \subset J$. Si la función f es continua en un punto $x_0 \in I$, y si la función g es continua en el punto $y_0 := f(x_0) \in J$, entonces la función $g \circ f$ es continua en el punto $x_0 \in I$.*

Demostración. Inmediato por la Prop. 43. □

Ejercicio 46 (Continuidad de la función logaritmo)**.** En el Ejemplo 41, demostramos que la función logaritmo es continua en el punto $x_0 = 1$, es decir:

$$\lim_{x\to 1} \log x \;=\; 0 \;=\; \log 1\,.$$

El objetivo del ejercicio es demostrar más generalmente que la función logaritmo es continua en todo punto $x_0 > 0$. Así, en lo que sigue, se fija un número $x_0 > 0$.

(1) Sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ la función definida por $f(x) = x/x_0$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$. Verificar que la función f es continua en el punto $x = x_0$, es decir: $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = 1$.

(2) Combinando el resultado del Ejemplo 41 con el Corolario 45, deducir que la función $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \log(f(x)) = \log(x/x_0)$ es continua en el punto x_0.

(3) Usando la propiedad fundamental del logaritmo, verificar que $\log x = g(x) + \log x_0$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$, y deducir que la función logaritmo es continua en el punto x_0.

1.7. Generalización de la noción de límite

En las secciones anteriores, vimos que la noción de límite está íntimamente vinculada con la noción de *entorno*. Para precisar más este vínculo, se introducen las siguientes notaciones:

Notaciones 47 (Conjunto de los entornos de un número)**.** Dado un número real a, se escriben

$$\mathscr{E}(a) \;:=\; \{\mathbf{E}(a,\varepsilon) \;:\; \varepsilon \in \mathbb{R}^+\} \;=\; \{(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \;:\; \varepsilon \in \mathbb{R}^+\}$$

al conjunto formado por todos los entornos del número a, y

$$\mathscr{E}^\star(a) \;:=\; \{\mathbf{E}^\star(a,\varepsilon) \;:\; \varepsilon \in \mathbb{R}^+\} \;=\; \{(a-\varepsilon, a) \cup (a, a+\varepsilon) \;:\; \varepsilon \in \mathbb{R}^+\}$$

al conjunto formado por todos los entornos reducidos del mismo número. (Por definición, las notaciones $\mathscr{E}(a)$ y $\mathscr{E}^\star(a)$ designan conjuntos de conjuntos.)

Dados una función $f : I \to \mathbb{R}$ (definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$), un punto $x_0 \in \bar{I}$ y un número $L \in \mathbb{R}$, se recuerda que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} f(x) = L \quad &\Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall x \in I,\ \ 0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - L| < \varepsilon \\
&\Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall x \in \mathbf{E}^\star(x_0,\delta) \cap I,\ \ f(x) \in \mathbf{E}(L,\varepsilon) \\
&\Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ \ f(\mathbf{E}^\star(x_0,\delta) \cap I) \subset \mathbf{E}(L,\varepsilon)\,.
\end{aligned}$$

Usando los conjuntos de entornos $\mathscr{E}(a)$ y $\mathscr{E}^\star(a)$ definidos más arriba, se obtiene al final una caracterización abstracta —y muy compacta— de la noción de límite, que es la siguiente:

Observación 48 (Caracterización del límite en términos de entornos abstractos)**.** Dados una función $f : I \to \mathbb{R}$, un punto $x_0 \in \bar{I}$ y un número $L \in \mathbb{R}$, tenemos la equivalencia

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall F \in \mathscr{E}(L),\ \exists E \in \mathscr{E}^\star(x_0),\ \ f(E \cap I) \subset F\,.$$

Es decir, intuitivamente:

Para todo entorno F de L, existe un entorno reducido E de x_0 tal que $f(E \cap I) \subset F$.

Desde el punto de vista de la teoría, el interés de esta caracterización abstracta es que permite reemplazar las nociones de entornos definidas por los conjuntos $\mathscr{E}(a)$ y $\mathscr{E}^\star(a)$ por otras nociones de entornos (definidas a partir de otros conjuntos de conjuntos) *sin cambiar el esquema general de la definición de límite.* Así, en lo siguiente, cada vez que necesitéremos introducir una nueva noción de límite (por ejemplo: los límites infinitos, o los límites laterales), sólo tendremos que definir las nociones de entornos (llenos y reducidos) correspondientes.

En lo que sigue, consideraremos las siguientes nociones de entornos, además de la noción usual definida a partir de los conjuntos $\mathscr{E}(a)$ y $\mathscr{E}^\star(a)$:

Entornos de $\pm\infty$ Se llama *entorno de* $+\infty$ a todo intervalo de la forma $(L, +\infty)$, con $L \in \mathbb{R}$. Así, el conjunto de los entornos (llenos o reducidos[6]) de $+\infty$ está definido por:

$$\mathscr{E}(+\infty) \;=\; \mathscr{E}^\star(+\infty) \;:=\; \{(L, +\infty) \;:\; L \in \mathbb{R}\}.$$

De mismo modo, se llama *entorno de* $-\infty$ a todo intervalo de la forma $(-\infty, L)$, con $L \in \mathbb{R}$. Así, el conjunto de los entornos de $-\infty$ está definido por:

$$\mathscr{E}(-\infty) \;=\; \mathscr{E}^\star(-\infty) \;:=\; \{(-\infty, L) \;:\; L \in \mathbb{R}\}.$$

Entornos laterales de un número $a \in \mathbb{R}$ Dado un número $a \in \mathbb{R}$, se llama *entorno derecho del número a* a todo intervalo de la forma $(a, a + \varepsilon)$, con $\varepsilon > 0$. Así, el conjunto de los entornos derechos (llenos o reducidos[7]) de a está definido por:

$$\mathscr{E}(a^+) \;=\; \mathscr{E}^\star(a^+) \;:=\; \{(a, a + \varepsilon) \;:\; \varepsilon \in \mathbb{R}^+\}.$$

De mismo modo, se llama *entorno izquierdo del número a* a todo intervalo de la forma $(a - \varepsilon, a)$, con $\varepsilon > 0$. Así, el conjunto de los entornos izquierdos de a está definido por:

$$\mathscr{E}(a^-) \;=\; \mathscr{E}^\star(a^-) \;:=\; \{(a - \varepsilon, a) \;:\; \varepsilon \in \mathbb{R}^+\}.$$

Al final, se obtienen 5 nociones distintas de entornos llenos y reducidos:

Notaciones 49 (Conjuntos de entornos generalizados)**.** Dado un número real a, se definen los siguientes conjuntos de entornos generalizados (llenos y reducidos):

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}(a) &:= \{(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \;:\; \varepsilon \in \mathbb{R}^+\} \\
\mathscr{E}^\star(a) &:= \{(a - \varepsilon, a) \cup (a, a + \varepsilon) \;:\; \varepsilon \in \mathbb{R}^+\}
\end{aligned} \qquad \text{(entornos de } a\text{)}$$

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}(+\infty) &= \mathscr{E}^\star(+\infty) := \{(L, +\infty) \;:\; L \in \mathbb{R}\} && \text{(entornos de } +\infty\text{)} \\
\mathscr{E}(-\infty) &= \mathscr{E}^\star(-\infty) := \{(-\infty, L) \;:\; L \in \mathbb{R}\} && \text{(entornos de } -\infty\text{)} \\
\mathscr{E}(a^+) &= \mathscr{E}^\star(a^+) := \{(a, a + \varepsilon) \;:\; \varepsilon \in \mathbb{R}^+\} && \text{(entornos derechos de } a\text{)} \\
\mathscr{E}(a^-) &= \mathscr{E}^\star(a^-) := \{(a - \varepsilon, a) \;:\; \varepsilon \in \mathbb{R}^+\} && \text{(entornos izquierdos de } a\text{)}
\end{aligned}$$

Estas 5 nociones de entornos inducen $5 \times 5 = 25$ nociones distintas de límites:

[6]Como los pseudonúmeros $\pm\infty$ (que *no son* números reales) no pertenecen a ningún entorno de $\pm\infty$, las nociones correspondientes de entorno lleno y de entorno reducido coinciden: $\mathscr{E}(\pm\infty) = \mathscr{E}^\star(\pm\infty)$.

[7]Igual que para los entornos de $\pm\infty$, las nociones de entorno lateral lleno y de entorno lateral reducido coinciden: $\mathscr{E}(a^\pm) = \mathscr{E}^\star(a^\pm)$. ¡Cuidado! Los símbolos a^+ y a^- *no son* números, pero notaciones cómodas para indicar el tipo de entorno lateral considerado (derecho o izquierdo).

Definición 50 (Límite generalizado)**.** Dados

- una función $f : I \to \mathbb{R}$ definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$,
- un "punto generalizado" $k = a, +\infty, -\infty, a^+, a^-$ (con $a \in \mathbb{R}$),
- un "límite generalizado" $l = b, +\infty, -\infty, b^+, b^-$ (con $b \in \mathbb{R}$),

se define la noción de límite correspondiente por:

$$\lim_{x\to k} f(x) = l \qquad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \qquad \forall F \in \mathscr{E}(l),\ \exists E \in \mathscr{E}^\star(k),\ \ f(E \cap I) \subset F\,.$$

Observaciones 51. (1) La noción de punto generalizado no es más que una notación cómoda para distinguir los 5 tipos de límites que se pueden considerar en el dominio, es decir:

$$x \to a, \quad x \to +\infty, \quad x \to -\infty, \quad x \to a^+ \quad \text{o} \quad x \to a^- \qquad\qquad (\text{con } a \in \mathbb{R})$$

De mismo modo, la noción de límite generalizado no es más que una notación cómoda para distinguir los 5 tipos de límites que se pueden considerar en el codominio:

$$f(x) \to b, \quad f(x) \to +\infty, \quad f(x) \to -\infty, \quad f(x) \to b^+ \quad \text{o} \quad f(x) \to b^- \qquad (\text{con } b \in \mathbb{R})$$

(2) La definición de límite generalizado sólo tiene sentido cuando todos los entornos reducidos $E \in \mathscr{E}^\star(k)$ del punto generalizado $k = a, +\infty, -\infty, a^+, a^-$ (con $a \in \mathbb{R}$) intersectan el intervalo I de definición de la función f, es decir: cuando

$$\forall E \in \mathscr{E}^\star(k),\ \ E \cap I \neq \varnothing\,.$$

En el caso particular donde $k = a \in \mathbb{R}$ (noción usual de límite en el punto a), esta condición significa que el punto a es adherente al intervalo I (véase Ejercicio 5 p. 2).

En lo siguiente, se estudian algunos casos particulares de límites generalizados, dejando las demostraciones a los lectores como ejercicios.

1.7.1. Límites infinitos

Definición 52 (Límites infinitos)**.** Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Dado un punto $x_0 \in \bar{I}$, se definen las notaciones $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ por:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \quad &\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad \forall F \in \mathscr{E}(+\infty),\ \exists E \in \mathscr{E}^\star(x_0),\ \ f(E \cap I) \subset F \\
&\Leftrightarrow \quad \forall L \in \mathbb{R},\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I, \quad 0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ f(x) > L \\
\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \quad &\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad \forall F \in \mathscr{E}(-\infty),\ \exists E \in \mathscr{E}^\star(x_0),\ \ f(E \cap I) \subset F \\
&\Leftrightarrow \quad \forall L \in \mathbb{R},\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I, \quad 0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ f(x) < L
\end{aligned}$$

Cuando se trabaja con límites finitos ($L \in \mathbb{R}$) e infinitos ($L = \pm\infty$), es cómodo extender la recta real con los dos pseudonúmeros $-\infty$ y $+\infty$:

Definición 53 (Recta real extendida)**.** Se llama *recta real extendida* (o *recta real acabada*) y se escribe $\overline{\mathbb{R}}$ o $[-\infty, +\infty]$ al conjunto definido por:

$$\overline{\mathbb{R}} \ = \ [-\infty, +\infty] \ := \ \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}\,.$$

(Recordemos que los pseudonúmeros $-\infty$ y $+\infty$ no son números reales.)

En este marco extendido, la propiedad de unicidad del límite (Prop. 11 p. 3) se generaliza del modo siguiente:

Proposición 54 (Unicidad del límite)**.** *Sean $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, un punto $x_0 \in \bar{I}$ y dos números reales extendidos $L, L' \in \overline{\mathbb{R}}$* (= $[-\infty, +\infty]$). *Si*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \qquad y \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = L',$$

entonces $L = L'$.

Ejercicio 55. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1/|x| & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \qquad\qquad (\text{para todo } x \in \mathbb{R})$$

(1) Bosquejar la gráfica de la función f.
(2) Demostrar que la función f es continua en todo punto $x_0 \neq 0$.
(3) Usando la definición anterior, demostrar que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$.

Las propiedades algebraicas de los límites (Prop. 25 p. 9 y Prop. 31 p. 11) se generalizan a los límites infinitos del modo siguiente:

Proposición 56 (Límite de una suma)**.** *Sean $f, g : I \to \mathbb{R}$ dos funciones definidas en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, un punto $x_0 \in \bar{I}$ y dos números reales extendidos $L, L' \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ y $\lim_{x \to x_0} g(x) = L'$, entonces el límite de la función $f + g$ en el punto x_0, cuando existe, está dado por la siguiente tabla (donde el símbolo «**?**» indica un caso indeterminado):*

	$L' = -\infty$	$L' \in \mathbb{R}$	$L' = +\infty$
$L = -\infty$	$-\infty$	$-\infty$	**?**
$L \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$L + L'$	$+\infty$
$L = +\infty$	**?**	$+\infty$	$+\infty$

Observación 57. En el caso indeterminado donde $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty$, no se puede deducir nada sobre el límite de la suma $f + g$ en el punto x_0 (ni siquiera si tal límite existe), así como lo ilustra el siguiente ejercicio:

Ejercicio 58 (Indeterminación para la suma)**.** En cada uno de los siguientes ítems, definir dos funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumplen las siguientes condiciones:

(1) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to 0}(f(x) + g(x)) = +\infty$.

(2) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to 0}(f(x) + g(x)) = -\infty$.

(3) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to 0}(f(x) + g(x)) = L$, con $L \in \mathbb{R}$ fijado.

(4) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = -\infty$, pero $f + g$ no tiene límite (finito ni infinito) en 0.

Proposición 59 (Límite de un producto)**.** *Sean $f, g : I \to \mathbb{R}$ dos funciones definidas en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, un punto $x_0 \in \bar{I}$ y dos números reales extendidos $L, L' \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = L'$, entonces el límite de la función fg en el punto x_0, cuando existe, está dado por la siguiente tabla (donde el símbolo «**?**» indica un caso indeterminado):*

	$L' = -\infty$	$L' \in \mathbb{R}^-$	$L' = 0$	$L' \in \mathbb{R}^+$	$L' = +\infty$
$L = -\infty$	$+\infty$	$+\infty$	**?**	$-\infty$	$-\infty$
$L \in \mathbb{R}^-$	$+\infty$	LL' (> 0)	0	LL' (< 0)	$-\infty$
$L = 0$	**?**	0	0	0	**?**
$L \in \mathbb{R}^+$	$-\infty$	LL' (< 0)	0	LL' (> 0)	$+\infty$
$L = +\infty$	$-\infty$	$-\infty$	**?**	$+\infty$	$+\infty$

Observación 60. En el caso indeterminado donde $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, no se puede deducir nada sobre el límite del producto fg en el punto x_0 (ni siquiera si tal límite existe), así como lo ilustra el siguiente ejercicio:

Ejercicio 61 (Indeterminación para el producto)**.** En cada uno de los siguientes ítems, definir dos funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumplen las siguientes condiciones:

(1) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)g(x)) = +\infty$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)g(x)) = -\infty$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)g(x)) = L$, con $L \in \mathbb{R}$ fijado.

(4) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$, pero fg no tiene límite (finito ni infinito) en 0.

Proposición 62 (Límite de la función $1/f$)**.** *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, tal que que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Dado un punto $x_0 \in \bar{I}$:*

(1) *Si* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$, *entonces* $\lim\limits_{x\to x_0} \left(\dfrac{1}{f(x)}\right) = 0$.

(2) *Si* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, *entonces* $\lim\limits_{x\to x_0} \left(\dfrac{1}{|f(x)|}\right) = +\infty$.

Observación 63. En el caso donde $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, la proposición anterior sólo permite determinar el límite de la función $1/|f|$ en el punto x_0 (y en este caso, dicho límite es $+\infty$). Sin embargo, se puede deducir en muchos casos el límite de la función $1/f$ en el punto x_0, estudiando el signo de la función f en un entorno de dicho punto.

Proposición 64 (Monotonía de los límites infinitos)**.** *Sean $f, g : I \to \mathbb{R}$ dos funciones definidas en un mismo intervalo $I \subset \mathbb{R}$, y un punto $x_0 \in \bar{I}$.*

(1) *Si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in I$, y si* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, *entonces* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$.

(2) *Si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in I$, y si* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, *entonces* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.

Ejercicio 65. Demostrar la proposición anterior.

1.7.2. Límites laterales

Definición 66 (Límites laterales)**.** Sean $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ y un número $L \in \mathbb{R}$. Dado un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $(x_0, x_0 + \varepsilon) \subset I$ para algún $\varepsilon > 0$, se definen los *límites laterales por la derecha* en el punto x_0 por:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L \quad &\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad \forall F \in \mathscr{E}(L),\ \exists E \in \mathscr{E}^\star(x_0^+),\ \ f(E \cap I) \subset F \\
&\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I, \quad x_0 < x < x_0 + \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - L| < \varepsilon \\
\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty \quad &\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad \forall F \in \mathscr{E}(+\infty),\ \exists E \in \mathscr{E}^\star(x_0^+),\ \ f(E \cap I) \subset F \\
&\Leftrightarrow \quad \forall L \in \mathbb{R},\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I, \quad x_0 < x < x_0 + \delta \ \Rightarrow\ f(x) > L \\
\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty \quad &\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad \forall F \in \mathscr{E}(-\infty),\ \exists E \in \mathscr{E}^\star(x_0^+),\ \ f(E \cap I) \subset F \\
&\Leftrightarrow \quad \forall L \in \mathbb{R},\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I, \quad x_0 < x < x_0 + \delta \ \Rightarrow\ f(x) < L
\end{aligned}$$

De modo análogo, dado un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $(x_0 - \varepsilon, x_0) \subset I$ para algún $\varepsilon > 0$, se definen los *límites laterales por la izquierda* en el punto x_0 por:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L \quad &\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad \forall F \in \mathscr{E}(L),\ \exists E \in \mathscr{E}^\star(x_0^-),\ f(E \cap I) \subset F \\
&\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I, \quad x_0 - \delta < x < x_0 \ \Rightarrow\ |f(x) - L| < \varepsilon \\
\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty \quad &\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad \forall F \in \mathscr{E}(+\infty),\ \exists E \in \mathscr{E}^\star(x_0^-),\ f(E \cap I) \subset F \\
&\Leftrightarrow \quad \forall L \in \mathbb{R},\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I, \quad x_0 - \delta < x < x_0 \ \Rightarrow\ f(x) > L \\
\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty \quad &\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad \forall F \in \mathscr{E}(-\infty),\ \exists E \in \mathscr{E}^\star(x_0^-),\ f(E \cap I) \subset F \\
&\Leftrightarrow \quad \forall L \in \mathbb{R},\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I, \quad x_0 - \delta < x < x_0 \ \Rightarrow\ f(x) < L
\end{aligned}$$

Observación 67. En la definición anterior, cabe destacar que:

- La noción de límite por la derecha en el punto x_0 (notación: $x \to x_0^+$) sólo tiene sentido cuando la función f está definida en un intervalo de la forma $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ para algún $\varepsilon > 0$: $(x_0, x_0 + \varepsilon) \subset I$. En efecto, esta condición nos asegura que todos los entornos derechos del punto x_0 intersectan el intervalo I, es decir: $\forall E \in \mathscr{E}^\star(x_0^+),\ E \cap I \neq \varnothing$.
  (Véase la Observación 51 (2) p. 19.)
- La noción de límite por la izquierda en el punto x_0 (notación: $x \to x_0^-$) sólo tiene sentido cuando la función f está definida en un intervalo de la forma $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ para algún $\varepsilon > 0$: $(x_0 - \varepsilon, x_0) \subset I$. En efecto, esta condición nos asegura que todos los entornos izquierdos del punto x_0 intersectan el intervalo I, es decir: $\forall E \in \mathscr{E}^\star(x_0^-),\ E \cap I \neq \varnothing$.

Las nociones de límites laterales por la izquierda y por la derecha en un punto x_0 tienen esencialmente las mismas propiedades que la noción usual (bilateral) de límite finito o infinito en un punto x_0. Estas propiedades incluyen:

- la unicidad del límite (Prop. 54 p. 20);
- el límite de una suma (Prop. 56 p. 20);
- el límite de un producto (Prop. 59 p. 21);

- el límite de la función $1/f$ (Prop. 33 p. 12 y Prop. 62 p. 21);
- la monotonía de los límites (Prop. 39 p. 14 y Prop. 64 p. 21);
- el Teorema del sándwich (Teorema 40 p. 15).

(Se deja a los lectores la tarea de adaptar los enunciados anteriores al los límites laterales.) Una propiedad importante de los límites laterales es la siguiente:

Proposición 68 (Pegado de límites laterales)**.** *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Para todo punto $x_0 \in I^\circ$ interior al intervalo de definición y para todo número real extendido $L \in \overline{\mathbb{R}}$, tenemos la equivalencia:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L \ \wedge \ \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L\,.$$

Observaciones 69. En la práctica, la proposición anterior permite descomponer el estudio del límite de una función $f : I \to \mathbb{R}$ en un punto interior $x_0 \in I^\circ$ del modo siguiente:

1. Determinar, si existe, el límite $L^- := \lim_{x \to x_0^-} f(x)$ (finito o infinito).
2. Determinar, si existe, el límite $L^+ := \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ (finito o infinito).
3. Si L^- y L^+ existen y son iguales, entonces $\lim_{x \to x_0} f(x) = L^- = L^+$.
   Si no, la función f no tiene límite (finito o infinito) en el punto x_0.

Ejercicio 70. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) \ = \ \begin{cases} 1/x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad \text{(para todo } x \in \mathbb{R})$$

(1) Demostrar que $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.
(2) Demostrar que $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$.
(3) Deducir que la función f no tiene límite (finito ni infinito) en el punto 0.

1.7.3. Límites en $\pm\infty$

Definición 71 (Límites en $\pm\infty$)**.** Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Cuando el intervalo de definición I es de la forma $I = \mathbb{R}$, $I = (a, +\infty)$ o $I = [a, +\infty)$ para algún $a \in \mathbb{R}$, se definen los límites (finitos e infinitos) en $+\infty$ por:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \quad &\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad \forall F \in \mathscr{E}(L),\ \exists E \in \mathscr{E}^\star(+\infty),\ \ f(E \cap I) \subset F \\
&\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists K \in \mathbb{R},\ \forall x \in I, \quad x > K \ \Rightarrow \ |f(x) - L| < \varepsilon \\[1ex]
\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad &\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad \forall F \in \mathscr{E}(+\infty),\ \exists E \in \mathscr{E}^\star(+\infty),\ \ f(E \cap I) \subset F \\
&\Leftrightarrow \quad \forall L \in \mathbb{R},\ \exists K \in \mathbb{R},\ \forall x \in I, \quad x > K \ \Rightarrow \ f(x) > L \\[1ex]
\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \quad &\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad \forall F \in \mathscr{E}(-\infty),\ \exists E \in \mathscr{E}^\star(+\infty),\ \ f(E \cap I) \subset F \\
&\Leftrightarrow \quad \forall L \in \mathbb{R},\ \exists K \in \mathbb{R},\ \forall x \in I, \quad x > K \ \Rightarrow \ f(x) < L
\end{aligned}$$

De modo análogo, cuando el intervalo de definición I es de la forma $I = \mathbb{R}$, $I = (-\infty, a)$ o $I = (-\infty, a]$ para algún $a \in \mathbb{R}$, se definen los límites (finitos e infinitos) en $-\infty$ por:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \quad &\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad \forall F \in \mathscr{E}(L),\ \exists E \in \mathscr{E}^\star(-\infty),\ \ f(E \cap I) \subset F \\
&\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists K \in \mathbb{R},\ \forall x \in I, \quad x < K \ \Rightarrow\ |f(x) - L| < \varepsilon \\
\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad &\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad \forall F \in \mathscr{E}(+\infty),\ \exists E \in \mathscr{E}^\star(-\infty),\ \ f(E \cap I) \subset F \\
&\Leftrightarrow \quad \forall L \in \mathbb{R},\ \exists K \in \mathbb{R},\ \forall x \in I, \quad x < K \ \Rightarrow\ f(x) > L \\
\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \quad &\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad \forall F \in \mathscr{E}(-\infty),\ \exists E \in \mathscr{E}^\star(-\infty),\ \ f(E \cap I) \subset F \\
&\Leftrightarrow \quad \forall L \in \mathbb{R},\ \exists K \in \mathbb{R},\ \forall x \in I, \quad x < K \ \Rightarrow\ f(x) < L
\end{aligned}$$

Ejercicio 72. Usando la definición de límite en $+\infty$, demostrar que $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

Como para las nociones de límites laterales, las nociones de límites en $+\infty$ y $-\infty$ tienen esencialmente las mismas propiedades que la noción de límite bilateral (finito o infinito) en un punto $x_0 \in \bar{I}$. Estas propiedades incluyen:

- la unicidad del límite (Prop. 54 p. 20);
- el límite de una suma (Prop. 56 p. 20);
- el límite de un producto (Prop. 59 p. 21);
- el límite de la función $1/f$ (Prop. 33 p. 12 y Prop. 62 p. 21);
- la monotonía de los límites (Prop. 39 p. 14 y Prop. 64 p. 21);
- el Teorema del sándwich (Teorema 40 p. 15).

(Se deja a los lectores la tarea de adaptar los enunciados anteriores al los límites en $\pm\infty$.)

Ejemplo 73 (Límite de la función logaritmo en $+\infty$)**.** Queremos demostrar que

$$\lim_{x\to+\infty} \log x \ = \ +\infty\,.$$

Para ello, se considera un número $L \in \mathbb{R}$, y se trata de hallar un número $K \in \mathbb{R}$ tal que

$$\forall x > 0,\ \ x > K \ \Rightarrow\ \ \log x > L\,.$$

Se distinguen dos casos:

- Caso donde $L \leq 0$. En este caso, se elige $K := 1$, y se observa que para todo número $x > 1$ $(= K)$, tenemos que $\log x > \log 1 = 0 \geq L$ (usando la monotonía del logaritmo).
- Caso donde $L > 0$. En este caso, se elige $K := 2^n$, donde n es un entero natural tal que $n \geq L/\log 2$. (Tal entero existe por el principio de Arquímedes.) En efecto, para todo número $x > 2^n$ $(= K)$, tenemos que $\log x > \log(2^n) = n\ \log 2 \geq \frac{L}{\log 2} \cdot \log 2 = L$.

Así, para todo $L \in \mathbb{R}$, logramos definir un número $K > 0$ tal que $\log x > L$ para todo $x > K$. Por lo tanto: $\lim\limits_{x\to\infty} \log x = +\infty$.

Ejercicio 74. Deducir de lo anterior que $\lim\limits_{x\to 0^+} \log x = -\infty$.
(Sugerencia: observar que para todo $x > 0$, tenemos que $\log \frac{1}{x} = -\log x$.)

Ejercicio 75. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|} \qquad \text{(para todo } x \in \mathbb{R})$$

(1) Demostrar que la función f es continua en todo punto $x_0 \in \mathbb{R}$.
(2) Verificar que $f(x) = 1 - \frac{1}{1+x}$ para todo $x > 0$, y deducir que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$.
(3) Verificar que $f(x) = \frac{1}{1-x} - 1$ para todo $x < 0$, y deducir que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$.

Ejercicio 76. Sea $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ (con $a \in \mathbb{R}$) una función monótona creciente.

(1) Demostrar que si la función f está acotada superiormente en el intervalo $(a, +\infty)$, entonces $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$, donde $L := \sup\{f(x) : x \in (a, +\infty)\}$.
(2) Demostrar que si la función f no está acotada superiormente en el intervalo $(a, +\infty)$, entonces $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
(3) ¿Qué pasa cuando la función f es monótona decreciente?

2. Funciones continuas

2.1. Observación y definición

Se recuerda que una función $f : I \to \mathbb{R}$ definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ es *continua en un punto* $x_0 \in \mathbb{R}$ (Def. 14 p. 4) cuando la función f tiene límite igual a $f(x_0)$ en el punto x_0. Aplicando la definición de límite (Def. 9 p. 3), se obtienen las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned} f \text{ continua en } x_0 &\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \\ &\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall x \in \mathbf{E}^\star(x_0, \delta) \cap I,\ \ f(x) \in \mathbf{E}(f(x_0), \varepsilon) \\ &\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall x \in I,\ \ 0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Además, como el límite considerado es el propio valor de la función f en el punto x_0, se puede observar que:

Observación 77. Para toda precisión $\varepsilon > 0$ y para todo radio $\delta > 0$, ambos enunciados

$$\forall x \in \mathbf{E}^\star(x_0, \delta) \cap I, \quad f(x) \in \mathbf{E}(f(x_0), \varepsilon)$$

y

$$\forall x \in \mathbf{E}(x_0, \delta) \cap I, \quad f(x) \in \mathbf{E}(f(x_0), \varepsilon)$$

son equivalentes.

Demostración. En efecto, cuando $x = x_0$, siempre tenemos que $f(x) = f(x_0) \in \mathbf{E}(f(x_0), \varepsilon)$. Por lo tanto, la condición $f(x) \in \mathbf{E}(f(x_0), \varepsilon)$ se cumple para todos los puntos $x \in \mathbf{E}^\star(x_0, \delta) \cap I$ si y sólo si se cumple para todo puntos $x \in \mathbf{E}(x_0, \delta) \cap I = (\mathbf{E}^\star(x_0, \delta) \cap I) \cup \{x_0\}$. □

Gracias a la observación anterior, se puede simplificar la definición de la noción de continuidad en un punto, reemplazando los entornos reducidos por entornos llenos:

Proposición 78 (Continuidad en un punto)**.** *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Para todo $x_0 \in I$, tenemos que:*

$$\begin{aligned} f \textit{ continua en } x_0 \quad &\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in \mathbf{E}(x_0, \delta) \cap I,\quad f(x) \in \mathbf{E}(f(x_0), \varepsilon) \\ &\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\quad |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Demostración. Obvio por la Obs. 77. □

En lo siguiente, usaremos sistemáticamente la caracterización anterior para estudiar la continuidad de una función (en un punto o en un intervalo), lo que nos permitirá trabajar sólo con entornos llenos, en el dominio —con entornos de la forma $\mathbf{E}(x_0, \delta)$— como en el codominio —con entornos de la forma $\mathbf{E}(f(x_0), \varepsilon)$.

Definición 79 (Función continua)**.** Se dice que una función $f : I \to \mathbb{R}$ es *continua en el intervalo I* cuando es continua en todo punto de I, es decir:

$$\begin{aligned} f \text{ continua en } I \quad &\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad \forall x_0 \in I,\quad f \text{ continua en } x_0 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x_0 \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in \mathbf{E}(x_0, \delta),\quad f(x) \in \mathbf{E}(f(x_0), \varepsilon) \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x_0 \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\quad |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\,. \end{aligned}$$

2.2. Propiedades algebraicas

Ya vimos en la Sección 1 que:

- toda función constante es continua;
- la función identidad $x \mapsto x$ es continua en $\mathbb{R}$ (Ejemplo 15 p. 5);
- la función raíz cuadrada $x \mapsto \sqrt{x}$ es continua en $[0, +\infty)$ (Ejemplo 18 p. 6);
- la función logaritmo $x \mapsto \log x$ es continua en $(0, +\infty)$ (Ejercicio. 46 p. 17).

Ejercicio 80. Demostrar que la función $x \mapsto |x|$ (valor absoluto) es continua en $\mathbb{R}$.

Más generalmente, se verifica que:

Proposición 81 (Suma, resta, producto y cociente de funciones continuas)**.** *Si f y g son funciones continuas en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, entonces las funciones $f + g$ (suma), $f - g$ (resta) y fg (producto) son continuas en I. Además, si f no se anula en el intervalo I (es decir: si $f(x) \neq 0$ para todo $x \in I$), entonces la función f/g (cociente) también es continua en I.*

Demostración. Se sigue inmediatamente de los resultados de la Sección 1.4 p. 9. □

En particular, es claro que:

- Toda función polinomial

  $$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \qquad\qquad (\text{con } n \in \mathbb{N},\ a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R})$$

  es continua en $\mathbb{R}$ (véase Ejercicio 32 p. 12).

- Toda fracción racional

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \qquad \text{(donde } p(x) \text{ y } q(x) \text{ son polinomios)}$$

es continua en todo intervalo donde el polinomio $q(x)$ no se anula.

Proposición 82 (Composición de funciones continuas)**.** *Si f es una función continua en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, y si g es una función continua en un intervalo $J \subset \mathbb{R}$ tal que $f(I) \subset J$, entonces la función compuesta $g \circ f$ es continua en el intervalo I.*

Demostración. Se sigue inmediatamente del Corolario 45 p. 17. □

Ejercicio 83. Dada una función $f : I \to \mathbb{R}$ definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, se recuerda que sus partes positiva y negativa son las funciones $f^+, f^- : I \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f^+(x) = \text{máx}(0, f(x)) \qquad \text{y} \qquad f^-(x) = \text{máx}(0, -f(x)) \qquad \text{para todo } x \in I\,.$$

(Véase capítulo sobre las integrales, Sección 3.3 y Def. 55 p. 22.)

(1) Demostrar que si f es continua en I, entonces f^+ y f^- son continuas en I.

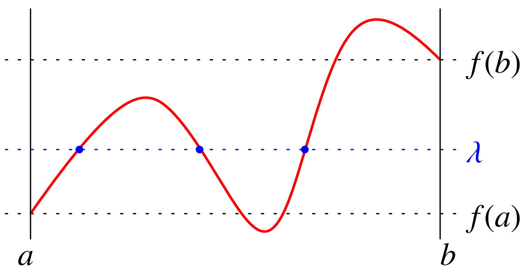
(2) Deducir de lo anterior que si f y g son funciones continuas en un mismo intervalo $I \subset \mathbb{R}$, entonces las funciones h_1 y h_2 definidas por

$$h_1(x) = \text{mín}(f(x), g(x)) \quad \text{y} \quad h_2(x) = \text{máx}(f(x), g(x)) \qquad \text{(para todo } x \in I)$$

son continuas en I. (Sugerencia: observar que $h_1 = f - (f - g)^+$ y $h_2 = f + (g - f)^+$.)

2.3. Valores intermedios

Intuitivamente, una función $f : I \to \mathbb{R}$ definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ es continua cuando su gráfica se puede trazar "sin levantar la mano". En particular, parece claro que si dicha función está definida en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces su gráfica tiene que pasar al menos una vez por cada valor intermedio λ entre $f(a)$ y $f(b)$:



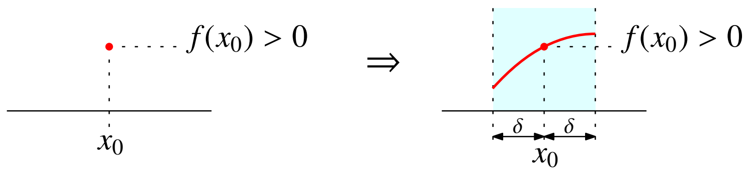
El objetivo de esta sección es transformar esta intuición en un teorema cuya demostración sólo depende de la definición formal de la noción de continuidad (Def. 79) y de las propiedades de los límites que ya demostramos en las secciones anteriores.

Para ello, necesitaremos el siguiente lema, que expresa que si una función continua es positiva (resp. negativa) en un punto de su intervalo de definición, entonces es positiva (resp. negativa) en un entorno de dicho punto:

Lema 84. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Para todo punto $x_0 \in I$:*

(1) *Si $f(x_0) > 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbf{E}(x_0, \delta) \cap I$.*

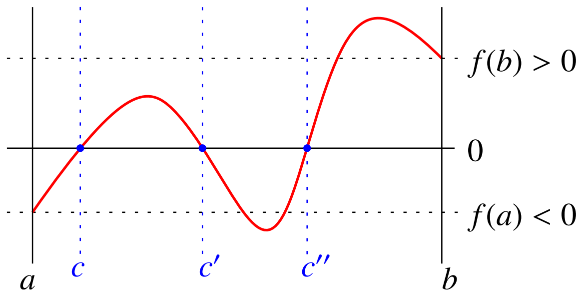
(2) *Si $f(x_0) < 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < 0$ para todo $x \in \mathbf{E}(x_0, \delta) \cap I$.*



Demostración. (1) Supongamos que $f(x_0) > 0$. Como f es continua en el punto x_0, existe un radio $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(x_0)| < f(x_0)$ para todo $x \in \mathbf{E}(x_0, \delta) \cap I$ (considerando el radio asociado a la precisión $\varepsilon := f(x_0) > 0$). Esto implica que para todo $x \in \mathbf{E}(x_0, \delta) \cap I$, tenemos que $f(x) - f(x_0) > -f(x_0)$, es decir: $f(x) > 0$. (2) Análogo (ejercicio). □

Gracias al lema anterior, se puede demostrar una primera versión del teorema de los valores intermedios, que es la siguiente:

Teorema 85 (Bolzano)**.** *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua definida en un intervalo cerrado $[a, b]$ (con $a < b$). Si $f(a)$ y $f(b)$ son de distintos signos (no nulos), entonces existe un punto $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$.*



Observación 86. Intuitivamente, el teorema de Bolzano expresa que si $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, o si $f(a) > 0$ y $f(b) < 0$, entonces la gráfica de f intersecta el eje x en al menos un punto, cuya abscisa $c \in [a, b]$ constituye por construcción un *cero*[8] de la función f. (Tal cero no es necesariamente único, como se puede observar en la figura anterior.)

Demostración. Supongamos por ejemplo que $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$. (La demostración del caso simétrico —donde $f(a) > 0$ y $f(b) < 0$— es análoga.) Se considera el subconjunto $A \subset [a, b]$ definido por $A := \{x \in [a, b] : f(x) < 0\}$. Por construcción, tenemos que $a \in A$ y $b \notin A$. Además, el conjunto $A \subset [a, b]$ es no vació y acotado, entonces tiene supremo $c := \sup(A) \in [a, b]$. Queremos demostrar que $f(c) = 0$. Para ello, se demuestra (por el absurdo) que los dos casos $f(c) < 0$ y $f(c) > 0$ son imposibles.

- Caso donde $f(c) < 0$. En este caso, tenemos que $c < b$, pues $f(b) > 0$. Por el Lema 84, existe un radio $\delta > 0$ tal que $f(x) < 0$ para todo $x \in \mathbf{E}(c, \delta) \cap [a, b]$. Ahora se considera el punto $x := \text{mín}(c + \frac{\delta}{2}, b)$. Por construcción, tenemos que $x \in \mathbf{E}(c, \delta) \cap [a, b]$, entonces $f(x) < 0$. Luego, tenemos que $x \in A$, entonces $x \leq c = \sup(A)$. Pero esto es absurdo, pues $x > c$ por construcción. Por lo tanto, el caso $f(c) < 0$ es imposible.

[8] Recordemos que un *cero* de una función f es cualquier número $c \in \text{dom}(f)$ tal que $f(c) = 0$.

- Caso donde $f(c) > 0$. En este caso, tenemos que $c > a$, pues $f(a) < 0$. Por el Lema 84, existe un radio $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbf{E}(c, \delta) \cap [a, b]$. Además, como $c = \sup(A)$, existe un punto $x \in A$ tal que $\max(a, c - \delta) < x < c$ (pues $\max(a, c - \delta) < c$). Por construcción, tenemos que $x \in \mathbf{E}(c, \delta) \cap [a, b]$, entonces $f(x) > 0$. Pero esto también es absurdo, pues $f(x) < 0$, ya que $x \in A$. Por lo tanto, el caso $f(c) > 0$ es imposible.

En conclusión, ambos casos $f(c) < 0$ y $f(c) > 0$ son absurdos; luego: $f(c) = 0$. □

Ahora se puede demostrar el teorema de los valores intermedios en su forma más general:

Corolario 87 (Teorema de los valores intermedios)**.** *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en el intervalo $[a, b]$ (con $a < b$). Entonces para todo valor intermedio*[9] *λ entre $f(a)$ y $f(b)$, existe un punto $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = \lambda$.*

Demostración. En el caso particular donde $\lambda = f(a)$ o $\lambda = f(b)$, basta con tomar $c := a$ o $c := b$ (según el caso). Ahora, se supone que $\lambda \neq f(a)$ y $\lambda \neq f(b)$, de tal modo que $f(a) < \lambda < f(b)$ o $f(b) < \lambda < f(a)$ (según el caso). Se observa que la función $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x) - \lambda$ (para todo $x \in [a, b]$) cumple las hipótesis del teorema de Bolzano. Entonces existe un punto $c \in [a, b]$ tal que $g(c) = 0$, es decir: tal que $f(c) = \lambda$. □

Corolario 88. *Si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función continua definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, entonces la imagen $f(I)$ del intervalo I por la función f también es un intervalo.*

Demostración. Se trata de demostrar que el subconjunto $f(I) \subset \mathbb{R}$ cumple la condición

$$\forall y_1, y_2 \in f(I),\ \forall y \in \mathbb{R},\ \ y_1 < y < y_2 \Rightarrow y \in f(I)\,.$$

Para ello, se consideran elementos $y_1, y_2 \in f(I)$ e $y \in \mathbb{R}$ tales que $y_1 < y < y_2$. Como $y_1, y_2 \in f(I)$, existen dos números $x_1, x_2 \in I$ tales que $y_1 = f(x_1)$ y $y_2 = f(x_2)$. Es claro que $x_1 \neq x_2$, ya que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Se distinguen los siguientes dos casos:

- Caso donde $x_1 < x_2$. Por el teorema de los valores intermedios aplicado a la función $f_{\upharpoonright[x_1, x_2]} : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ y al valor intermedio $\lambda := y$ (entre $f(x_1) = y_1$ y $f(x_2) = y_2$), existe un punto $x \in [x_1, x_2]$ tal que $f(x) = y$. Y como $x \in I$, se deduce que $y = f(x) \in f(I)$.
- Caso donde $x_1 > x_2$. El razonamiento es análogo (basta con intercambiar x_1 y x_2). □

Observación 89. El corolario anterior expresa que la imagen de un intervalo de $\mathbb{R}$ por una función continua siempre es un intervalo de $\mathbb{R}$. ¡Cuidado! El intervalo imagen no es necesariamente un intervalo de mismo tipo que el intervalo inicial; por ejemplo, la imagen de un intervalo abierto (o semiabierto) puede ser cerrado (o abierto, o semiabierto, etc.) Sin embargo, veremos en la siguiente sección que la imagen de un intervalo cerrado $[a, b]$ por una función continua f siempre es un intervalo cerrado $[c, d]$ (con $c \leq d$).

Ejercicio 90. Sea $I = (0, 1)$. Definir funciones continuas $f_1, f_2, f_3, f_4 : I \to \mathbb{R}$ tales que

$$f_1(I) = [0, 1], \qquad f_2(I) = (0, 1], \qquad f_3(I) = [0, +\infty), \qquad f_4(I) = \mathbb{R}\,.$$

[9] Es decir: un número $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) \leq \lambda \leq f(b)$ o $f(b) \leq \lambda \leq f(a)$ según el caso.

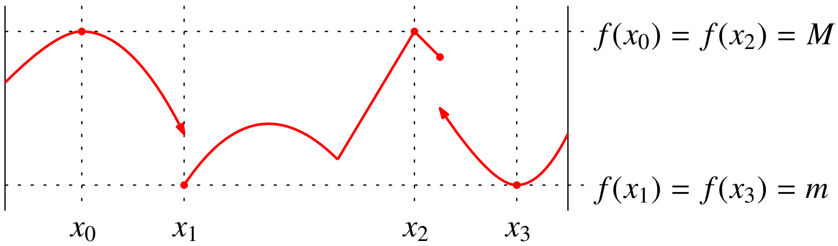
2.4. Extremos absolutos

Definición 91 (Extremos absolutos)**.** Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Se dice que un punto $P = (x_0, f(x_0))$ de la gráfica de f es:

- un *mínimo absoluto* de f cuando $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in I$;
- un *máximo absoluto* de f cuando $f(x_0) \geq f(x)$ para todo $x \in I$;
- un *extremo absoluto* de f cuando P es un mínimo absoluto o un máximo absoluto de f.

Además, se dice que la función f tiene un mínimo absoluto (resp. un máximo absoluto, un extremo absoluto) en el punto $x_0 \in I$ cuando el punto[10] $(x_0, f(x_0))$ es un mínimo absoluto (resp. un máximo absoluto, un extremo absoluto) de la función f.

Observaciones 92. (1) Una función $f : I \to \mathbb{R}$ puede tener cero, uno o múltiples mínimos absolutos (resp. máximos absolutos, extremos relativos). Por ejemplo en la siguiente figura, los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_2, f(x_2))$ son máximos absolutos de la función bosquejada, mientras los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_3, f(x_3))$ son mínimos absolutos:



(2) Más generalmente, se observa que:

- una función $f : I \to \mathbb{R}$ tiene un mínimo absoluto $(x_0, f(x_0))$ si y sólo si su conjunto imagen $f(I)$ tiene mínimo $m := \text{mín}(f(I)) = f(x_0)$ (en el sentido de los conjuntos);
- una función $f : I \to \mathbb{R}$ tiene un máximo absoluto $(x_0, f(x_0))$ si y sólo si su conjunto imagen $f(I)$ tiene máximo $M := \text{máx}(f(I)) = f(x_0)$ (en el sentido de los conjuntos).

El objetivo de esta sección es demostrar que toda función continua definida en un intervalo cerrado $[a, b]$ (con $a < b$) tiene (al menos) un mínimo absoluto y un máximo absoluto. Antes de demostrar este resultado importante, se necesita verificar que:

Proposición 93. *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua definida en un intervalo cerrado $[a, b]$ (con $a < b$), entonces f está acotada en dicho intervalo.*

Demostración. Se considera el conjunto $A \subset [a, b]$ definido por

$$\begin{aligned} A &:= \{c \in [a, b] \ : \ f \text{ está acotada en } [a, c]\} \\ &= \{c \in [a, b] \ : \ \exists M_c \geq 0,\ \forall x \in [a, c],\ |f(x)| \leq M_c\}. \end{aligned}$$

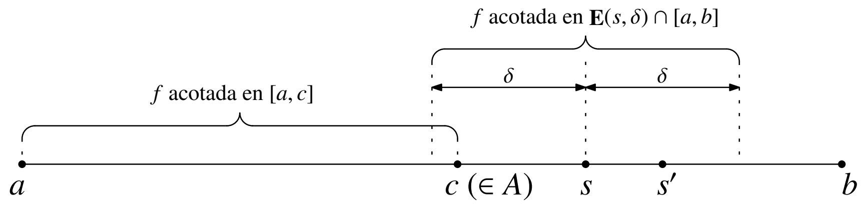
Por construcción, el conjunto $A \subset [a, b]$ está acotado y no es vacío, pues $a \in A$. (En efecto, la función f está trivialmente acotada en el intervalo $[a, a] = \{a\}$.) Luego A tiene supremo $s := \sup(A)$. Queremos demostrar que $s = b \in A$. Para ello, se observa lo siguiente:

[10] ¡Cuidado! Aquí se usa la palabra *punto* con dos sentidos distintos: para designar un elemento $x_0 \in I$ (punto unidimensional), o para designar un punto $(x_0, f(x_0))$ de la gráfica de f (punto bidimensional).

(1) Como la función f es continua en el punto s, f está acotada en un entorno del punto s (por la Prop. 29 p. 10), lo que significa que existen $M_s \geq 0$ y $\delta > 0$ tales que $|f(x)| \leq M_s$ para todo punto $x \in \mathbf{E}(s,\delta) \cap [a,b]$.

(2) Además, como $s = \sup(A)$, existe un punto $c \in A$ tal que $s - \delta < c \leq s$. Y por definición del conjunto A, sabemos que la función f está acotada en el intervalo $[a,c]$, lo que significa que existe $M_c \geq 0$ tal que $|f(x)| \leq M_c$ para todo punto $x \in [a,c]$.

(3) Sea $s' := \text{mín}(s + \frac{\delta}{2}, b)$. Por construcción, tenemos que $s' \in \mathbf{E}(s,\delta) \cap [a,b]$. Y como $c \in \mathbf{E}(s,\delta) \cap [a,b]$ también (pues $s - \delta < c \leq s$), se deduce que $[c,s'] \subset \mathbf{E}(s,\delta) \cap [a,b]$. Por (1), esto implica que $|f(x)| \leq M_s$ para todo punto $x \in [c,s']$.



(4) Agregando los resultados obtenidos en los ítems (2) y (3), se deduce que

$$|f(x)| \leq \text{máx}(M_c, M_s) \qquad \text{para todo } x \in [a,s'] = [a,c] \cup [c,s'].$$

Por lo tanto, f está acotada en el intervalo $[a,s']$, lo que demuestra que $s' \in A$.

(5) Como $s' \in A$, tenemos que $s' \leq s = \sup(A)$. Por otro lado, tenemos que $s + \frac{\delta}{2} \geq s$ y $b \geq s$, de tal modo que $s' = \text{mín}(s + \frac{\delta}{2}, b) \geq s$. Luego: $s = s'$. Ahora, se observa que $s' = s < s + \frac{\delta}{2}$. Entonces $s' \neq s + \frac{\delta}{2}$, lo que implica finalmente que $s = s' = b$.

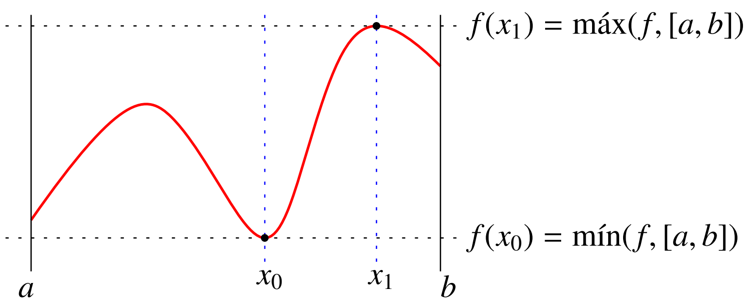
En los ítems (4) y (5), demostramos que $s = s' = b \in A$. Por definición del conjunto A, esto implica que la función f está acotada en el intervalo $[a,b]$. □

Observación 94. La proposición anterior expresa que la imagen $f([a,b]) = \{f(x) : x \in [a,b]\}$ de un intervalo $[a,b]$ por una función continua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ siempre es un conjunto acotado, lo que implica que dicho conjunto tiene ínfimo y supremo:

$$\begin{aligned} \text{ínf}(f,[a,b]) &= \text{ínf}\{f(x) : x \in [a,b]\} \\ \sup(f,[a,b]) &= \sup\{f(x) : x \in [a,b]\} \end{aligned}$$

Ahora, se trata de demostrar que la función f siempre alcanza ambos números $\text{ínf}(f,[a,b])$ y $\sup(f,[a,b])$ en el intervalo $[a,b]$:

Teorema 95 (Weierstrass)**.** *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua definida en un intervalo cerrado $[a,b]$ (con $a < b$), entonces f tiene mínimo y máximo absolutos. Es decir: existen dos puntos $x_0, x_1 \in [a,b]$ tales que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ para todo $x \in [a,b]$.*



Demostración. (Existencia de un máximo absoluto) Por la Prop. 93, la función f está acotada en el intervalo $[a,b]$, y el conjunto $f([a,b])$ tiene supremo $M := \sup(f,[a,b])$. Se trata de demostrar que $M = f(x)$ para algún $x \in [a,b]$. Para ello, se supone por el absurdo que $f(x) < M$ para todo $x \in [a,b]$, y se considera la función $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)} \qquad \text{para todo } x \in [a,b]\,.$$

Por construcción, la función g es positiva y continua en el intervalo $[a,b]$. Luego, por la Prop. 93, está acotada superiormente y existe $k > 0$ tal que $0 < g(x) \leq k$ para todo $x \in [a,b]$. Entonces, para todo $x \in [a,b]$, tenemos que $M - f(x) \geq 1/k$, es decir: $f(x) \leq M - 1/k$. Esto demuestra que la función f está acotada superiormente por el número $M - 1/k < M$, lo que es absurdo pues $M = \sup(f,[a,b])$. Por lo tanto, no se tiene que $f(x) < M$ para todo $x \in [a,b]$, y existe necesariamente un punto $x_1 \in [a,b]$ tal que $f(x_1) = M$.

(Existencia de un mínimo absoluto) Se observa que la función $-f$ también es continua en el intervalo $[a,b]$. Por lo anterior, $-f$ tiene un máximo absoluto $(x_0, -f(x_0))$, lo que implica inmediatamente que el punto $(x_0, f(x_0))$ es un mínimo absoluto de la función f. □

Una consecuencia obvia del teorema de Weierstrass (combinado con el Corolario 88 p. 29) es que la imagen de un intervalo cerrado por una función continua es un intervalo cerrado:

Corolario 96. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua definida en un intervalo cerrado $[a,b]$ (con $a < b$), entonces la imagen del intervalo $[a,b]$ por f también es un intervalo cerrado:*

$$f([a,b]) \;=\; [m,M]\,, \qquad \textit{donde } \; m := \min(f,[a,b]) \;\; y \;\; M := \max(f,[a,b])\,.$$

2.5. Funciones inversas

Se recuerda que una función $f : A \to \mathbb{R}$ definida en un subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ es:

- *estrictamente creciente* cuando $\forall x, x' \in A,\ x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$;
- *estrictamente decreciente* cuando $\forall x, x' \in A,\ x < x' \Rightarrow f(x) > f(x')$.

Es claro que toda función estrictamente creciente (resp. estrictamente decreciente) es monótona creciente (resp. monótona creciente), pero el recíproco es falso.

Se demuestra el siguiente resultado:

Proposición 97 (Función inversa de una función estrictamente decreciente o decreciente)**.** *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función definida en un subconjunto $A \subset \mathbb{R}$. Si f es estrictamente creciente (resp. estrictamente decreciente) en A, entonces f es inyectiva y define una biyección entre A y su imagen $B := f(A)$. Además, la función inversa $f^{-1} : B \to A$ definida por*

$$f^{-1}(y) \;=\; \textit{el único } x \in A \textit{ tal que } f(x) = y \qquad (\textit{para todo } y \in B)$$

es una función estrictamente creciente (resp. estrictamente decreciente) en B.

Demostración. Sólo se considera el caso donde f es estrictamente creciente; el caso donde f es estrictamente decreciente es análogo. Se observa que:

- *f es inyectiva.* En efecto, dados $x, x' \in A$ tales que $x \neq x'$:

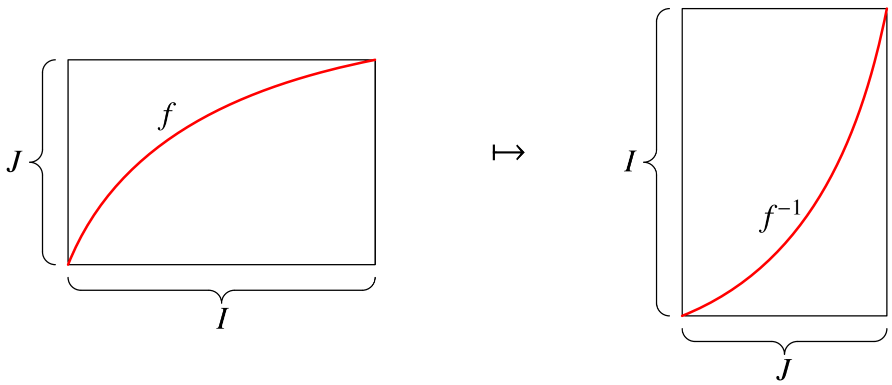
- o bien tenemos que $x < x'$, entonces $f(x) < f(x')$, y luego $f(x) \neq f(x')$;
- o bien tenemos que $x > x'$, entonces $f(x) > f(x')$, y luego $f(x) \neq f(x')$.

En todos los casos, $x \neq x'$ implica que $f(x) \neq f(x')$.

- *f define una biyección entre A y su imagen $B := f(A)$.* En efecto, cada elemento $y \in f(A)$ tiene al menos una preimagen por la función f (por definición de la imagen $f(A)$). Y como f es inyectiva, dicha preimagen es única.
- *La función inversa $f^{-1} : B \to A$ es estrictamente creciente.* Sean $y, y' \in B$ tales que $y < y'$. Se escriben $x := f^{-1}(y)$ y $x' := f^{-1}(y')$; por construcción, tenemos que $y = f(x)$ e $y' = f(x')$. Si tuviéramos que $x \geq x'$, tendríamos que $f(x) \geq f(x')$ (pues f es monótona creciente), es decir: $y \geq y'$, lo que es absurdo. Luego, $x < x'$. □

En el caso particular donde la función considerada es una función continua $f : I \to \mathbb{R}$ definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, sabemos por el Corolario 88 p. 29 que su imagen $J := f(I)$ también es un intervalo. Cuando, además, la función f es estrictamente creciente o estrictamente decreciente en I, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 98 (Funcion inversa de una función continua estrictamente creciente o decreciente)**.** *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Si f es continua y estrictamente creciente (resp. continua y estrictamente decreciente) en I, entonces f define una biyección entre el intervalo I y su imagen $J := f(I)$. Además, la función inversa $f^{-1} : J \to I$ es continua y estrictamente creciente (resp. continua y estrictamente decreciente) en J.*



Demostración. Sólo se considera el caso donde f es estrictamente creciente (el caso donde f es estrictamente decreciente es análogo). Recordemos que según la Convención 6 p. 2, sólo se consideran funciones definidas en un intervalo cuyo interior no es vacío, lo que significa aquí que $I^\circ \neq \varnothing$[11]. Por la Prop. 97, ya sabemos que la función f define una biyección entre el intervalo I y su imagen $J := f(I)$, y que la función inversa $f^{-1} : J \to I$ es estrictamente creciente. Para demostrar que f^{-1} es continua, se considera un punto $y_0 \in J$, y se escribe $x_0 := f^{-1}(y_0)$. Dada una precisión $\varepsilon > 0$, se trata de construir un radio $\delta > 0$ tal que

$$(*) \qquad \forall y \in J, \ \ |y - y_0| < \delta \ \ \Rightarrow \ \ |f^{-1}(y) - x_0| < \varepsilon\,.$$

Para ello, se consideran los siguientes tres casos:

[11] Como la función continua f es estrictamente creciente, se puede demostrar que el intervalo imagen $J := f(I)$ también cumple la condición $J^\circ \neq \varnothing$ (es decir: el interior del intervalo J no es vacío). De modo sorprendente, nunca se usará esta información en el razonamiento que sigue.

- Caso donde x_0 es un punto interior de I (es decir: $x_0 \in I^\circ$). En este caso, existen dos puntos $x_0^-, x_0^+ \in I$ tales que $x_0 - \varepsilon < x_0^- < x_0 < x_0^+ < x_0 + \varepsilon$. Se escriben $y_0^- := f(x_0^-)$ e $y_0^+ := f(x_0^+)$. Como f es estrictamente creciente, tenemos que $y_0^- < y_0 < y_0^+$. Ahora, se considera el radio $\delta > 0$ definido por $\delta := \text{mín}(y_0 - y_0^-, y_0^+ - y_0) > 0$. Dado un punto $y \in I$ tal que $|y - y_0| < \delta$, se observa que

$$y \ < \ y_0 + \delta \ \leq \ y_0 + (y_0^+ - y_0) \ = \ y_0^+ \qquad (\text{pues } \delta \leq (y_0^+ - y_0))$$

e

$$y \ > \ y_0 - \delta \ \geq \ y_0 - (y_0 - y_0^-) \ = \ y_0^- \qquad (\text{pues } \delta \leq (y_0 - y_0^-))$$

de tal modo que $y_0^- < y < y_0^+$. Como f^{-1} es estrictamente creciente, se deduce que

$$x_0 - \varepsilon \ < \ x_0^- \ = \ f^{-1}(y_0^-) \ < \ f^{-1}(y) \ < \ f^{-1}(y_0^+) \ = \ x_0^+ \ < \ x_0 + \varepsilon\,,$$

lo que demuestra que $|f^{-1}(y) - x_0| < \varepsilon$.
- Caso donde $x_0 = \text{mín}(I)$ (es decir: x_0 es el extremo inferior del intervalo I). En este caso, existe un punto $x_0^+ \in I$ tal que $x_0 < x_0^+ < x_0 + \varepsilon$. Se escribe $y_0^+ := f(x_0^+)$ (tenemos que $y_0^+ = f(x_0^+) > f(x_0) = y_0$ pues f es estrictamente creciente), y se define el radio $\delta > 0$ por $\delta := y_0^+ - y_0 > 0$. Dado un punto $y \in I$ tal que $|y - y_0| < \delta$, se observa que

$$y \ < \ y_0 + \delta \ = \ y_0 + (y_0^+ - y_0) \ = \ y_0^+\,,$$

y como f^{-1} es estrictamente creciente, se deduce que

$$x_0 \,(= \text{mín}(I)) \ \leq \ f^{-1}(y) \ < \ f^{-1}(y_0^+) \ = \ x_0^+ \ < \ x_0 + \varepsilon\,,$$

lo que demuestra que $|f^{-1}(y) - x_0| < \varepsilon$.
- Caso donde $x_0 = \text{máx}(I)$ (es decir: x_0 es el extremo superior del intervalo I). Este caso es simétrico al caso anterior (ejercicio: redactar la demostración correspondiente).

En todos los casos, logramos definir un radio $\delta > 0$ que cumple la condición $(*)$. Por lo tanto, la función inversa $f^{-1} : J \to I$ es continua en el punto $y_0 \in J$. □

Ejemplo 99 (Función raíz *n*-ésima)**.** (1) Dado un entero $n \geq 1$, se considera la función $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ definida por $f(x) = x^n$. Se verifica fácilmente que:

- La función f es continua y estrictamente creciente en $[0, +\infty)$.
- $f(0) = 0$ y $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, lo que implica que la imagen del intervalo $[0, +\infty)$ por la función f es el intervalo $[0, +\infty)$.

Por el Teorema 98, la función f define una biyección entre $[0, +\infty)$ y $[0, +\infty)$, y la función inversa $f^{-1} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ es continua y estrictamente creciente en el intervalo $[0, +\infty)$. Dicha función inversa se llama la función *raíz n-ésima*, y se escribe $\sqrt[n]{x} := f^{-1}(x)$ para todo $x \in [0, +\infty)$. Por construcción, tenemos que

$$\sqrt[n]{x^n} \ = \ f^{-1}(f(x)) \ = \ x \qquad \text{y} \qquad (\sqrt[n]{x})^n \ = \ f(f^{-1}(x)) \ = \ x \qquad (\text{para todo } x \geq 0)$$

(2) En el caso donde el entero n es impar, se puede remplazar el intervalo $[0, +\infty)$ por $\mathbb{R}$, pues la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^n$ es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$. En este caso, la función f define una biyección entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}$, lo que permite extender la definición de la raíz n-ésima $\sqrt[n]{x} := f^{-1}(x)$ a todos los números reales. Como anteriormente, la función raíz n-ésima (extendida a $\mathbb{R}$) es continua y estrictamente creciente en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 100 (Propiedades de la raíz n-ésima)**.** Sean enteros $n, m \geq 1$ y $p \in \mathbb{N}$.

(1) Demostrar las siguientes igualdades para todos $x, y \geq 0$:

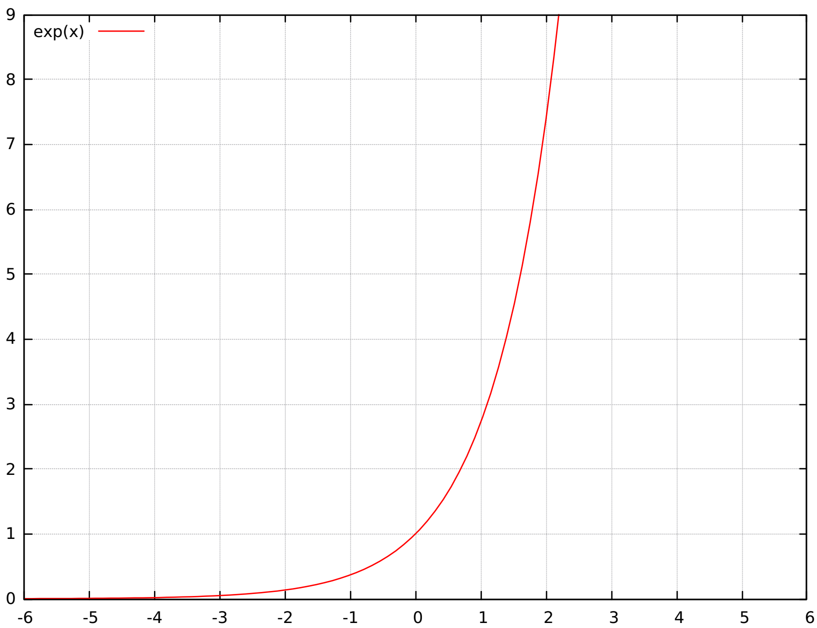
$$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y}; \qquad \sqrt[n]{x^p} = (\sqrt[n]{x})^p; \qquad \sqrt[n]{x^n} = (\sqrt[n]{x})^n = x; \qquad \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[nm]{x}\,.$$

(2) Verificar que cuando los enteros $n, m \geq 1$ son impares, las igualdades anteriores se cumplen para todos los números $x, y \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 101 (Función exponencial)**.** Vimos que la función $\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ ("logaritmo") es estrictamente creciente y continua en $\mathbb{R}^+$ (Ejercicio 46 p. 17). Además, vimos en el Ejemplo 73 y en el Ejercicio 74 p. 24 que

$$\lim_{x \to 0^+} \log x = -\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to +\infty} \log x = +\infty\,,$$

lo que implica que la imagen de $\mathbb{R}^+$ por la función logaritmo es el intervalo $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$. Por lo tanto, la función logaritmo define una biyección entre $\mathbb{R}^+$ y $\mathbb{R}$, cuya función inversa se llama la *función exponencial* y se escribe $\exp\ (:= \log^{-1})$. Por el Teorema 98, la función $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ es continua y estrictamente creciente en $\mathbb{R}$.



Ejercicio 102 (Propiedades de la función exponencial)**.**

(1) Usando la definición de la función exponencial ($\exp(x) = \log^{-1}(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$) y la propiedad fundamental del logaritmo ($\log(xy) = \log x + \log y$ para todos $x, y > 0$), demostrar las siguientes igualdades para todos $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\exp(0) = 1, \qquad \exp(x + y) = \exp(x)\exp(y), \qquad \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}\cdot$$

(2) Se define la constante e por $e := \exp(1)$ ($\approx 2,718$). Demostrar por inducción completa que $\exp(n) = e^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Usando la relación $\exp(-x) = 1/\exp(x)$, demostrar más generalmente que $\exp(n) = e^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Observaciones 103. Por analogía con la igualdad $\exp(n) = e^n$ (Ejercicio 102 (2)), se escribe más generalmente $e^x := \exp(x)$ para todo número $x \in \mathbb{R}$. Con esta notación, las igualdades del Ejercicio 102 (1) se escriben

$$e^0 = 1, \qquad e^{x+y} = e^x e^y, \qquad e^{-x} = \frac{1}{e^x} \qquad\qquad \text{(para todos } x, y \in \mathbb{R})$$

Ejercicio 104 (Potencia generalizada)**.** Las funciones logaritmo y exponencial permiten definir la notación x^y para todos los números $x > 0$ e $y \in \mathbb{R}$, escribiendo

$$x^y \ := \ e^{y \log x} \ = \ \exp(y \log x) \qquad\qquad \text{(para todos } x > 0,\ y \in \mathbb{R})$$

(1) Demostrar que para todos $x > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, el número x^n definido por $x^n := e^{n \log x}$ es igual a la potencia x^n definida del modo usual.
(Sugerencia: demostrar por inducción completa que la propiedad se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$, y extender la propiedad a todo $n \in \mathbb{Z}$ usando la relación $e^{-y} = 1/e^y$.)

(2) Demostrar las siguientes igualdades para todos $x, x' > 0$ e $y, y' \in \mathbb{R}$:

$$x^0 = 1^y = 1, \qquad x^1 = x, \qquad x^{-1} = \frac{1}{x}, \qquad x^{y+y'} = x^y x^{y'},$$
$$x^{-y} = \frac{1}{x^y} = \left(\frac{1}{x}\right)^y, \qquad (x^y)^{y'} = (x^{y'})^y = x^{yy'}, \qquad (xx')^y = x^y x'^y\,.$$

(3) Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ fijado, se considera la función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = x^\alpha = e^{\alpha \log x}$. para todo $x > 0$. Verificar que la función f es continua, y demostrar que
- f es estrictamente creciente cuando $\alpha > 0$;
- f es constante cuando $\alpha = 0$;
- f es estrictamente decreciente cuando $\alpha > 0$.

2.6. Función continua definida por una integral

Recordemos que una función $f : I \to \mathbb{R}$ definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ es *localmente integrable* cuando es integrable en cualquier intervalo cerrado $[a, b] \subset I$ (con $a < b$)[12]. En el capítulo sobre las integrales, vimos que cada función monótona (creciente o decreciente) es localmente integrable en su intervalo de definición.

Lema 105. *Si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función localmente integrable en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, entonces para todo punto $x_0 \in I$, la función f está acotada en un entorno del punto x_0.*

Demostración. Se distinguen los siguientes tres casos.

- Caso donde x_0 es un punto interior de I (es decir: $x_0 \in I^\circ$). En este caso, existe un radio $\delta > 0$ tal que $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset I$. Como la función f es integrable en el intervalo $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ ($\subset I$), está acotada en dicho intervalo. Y como

$$\mathbf{E}(x_0, \delta) \cap I \ = \ (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \ \subset \ [x_0 - \delta, x_0 + \delta]\,,$$

se deduce que la función f está acotada en el entorno de centro x_0 y de radio δ.

[12]En el caso particular donde el intervalo I ya es de la forma $I = [a, b]$ (con $a < b$), la función f es localmente integrable en $I = [a, b]$ si y sólo si es integrable en $[a, b]$.

- Caso donde $x_0 = \text{mín}(I)$ (es decir: x_0 es el extremo inferior del intervalo I). En este caso, existe un radio $\delta > 0$ tal que $[x_0, x_0 + \delta] \subset I$. Como la función f es integrable en el intervalo $[x_0, x_0 + \delta]$ ($\subset I$), está acotada en dicho intervalo. Y como
$$\mathbf{E}(x_0, \delta) \cap I \ = \ [x_0, x_0 + \delta) \ \subset \ [x_0, x_0 + \delta]\,, \qquad \text{(pues } x_0 = \text{mín}(I))$$
se deduce que la función f está acotada en el entorno de centro x_0 y de radio δ.
- Caso donde $x_0 = \text{máx}(I)$ (es decir: x_0 es el extremo superior del intervalo I). Este caso es análogo al caso anterior. □

Proposición 106. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ y localmente integrable en I. Para todo punto $a \in I$, la función $F : I \to \mathbb{R}$ definida por*
$$F(x) \ = \ \int_a^x f(t)\,dt \qquad (\textit{para todo } x \in I)$$
es continua en el intervalo I.

Demostración. Sea $x_0 \in I$. Por el lema anterior, sabemos que la función f está acotada en un entorno del punto x_0, lo que significa que existen un radio $\delta > 0$ y un número $M \geq 0$ tales que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in \mathbf{E}(x_0, \delta) \cap I$. Entonces, para todo $x \in \mathbf{E}(x_0, \delta) \cap I$, tenemos que
$$\begin{aligned} |F(x) - F(x_0)| \ &= \ \left| \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt \right| \ = \ \left| \int_{x_0}^x f(t)\,dt \right| \\ &\leq \ \int_{\text{mín}(x_0,x)}^{\text{máx}(x_0,x)} |f(t)|\,dt \ \leq \ \int_{\text{mín}(x_0,x)}^{\text{máx}(x_0,x)} M\,dt \ = \ M|x - x_0|\,. \end{aligned}$$
Como $\text{lím}_{x \to x_0} M|x - x_0| = 0$, se deduce por el teorema del sándwich (Teorema 40 p. 15) que $\text{lím}_{x \to x_0} |F(x) - F(x_0)| = 0$, es decir: $\text{lím}_{x \to x_0} F(x) = F(x_0)$. □

Observación 107. Ya vimos un ejemplo de función definida a partir de una integral: la función logaritmo $\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, que definimos a partir de la función $f(t) = 1/t$ por
$$\log x \ = \ \int_1^x \frac{1}{t} dt \qquad \text{(para todo } x > 0)$$
Así, la Prop. 106 nos da una nueva prueba de la continuidad de la función $\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$.

Ejercicio 108. Demostrar que si $f : I \to \mathbb{R}$ es positiva o nula (resp. negativa o nula) en el intervalo I, entonces la función $F : I \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ para todo $x \in I$ es monótona creciente (resp. monótona decreciente).

Ejercicio 109. Se considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(t) \ = \ \frac{1}{1 + t^2} \qquad \text{(para todo } t \in \mathbb{R})$$
(1) Demostrar que la función f es monótona creciente en $(-\infty, 0]$ y monótona decreciente en $[0, +\infty)$. Deducir que f es localmente integrable en $\mathbb{R}$.

Ahora, se considera la función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por
$$F(x) \ = \ \int_0^x f(t)\,dt \ = \ \int_0^x \frac{1}{1 + t^2} dt \qquad \text{(para todo } x \in \mathbb{R})$$
(2) Demostrar que la función F es continua, impar, y estrictamente creciente en $\mathbb{R}$.

Observación: La función F es la función arcotangente.

3. Continuidad uniforme

3.1. Observaciones y definición

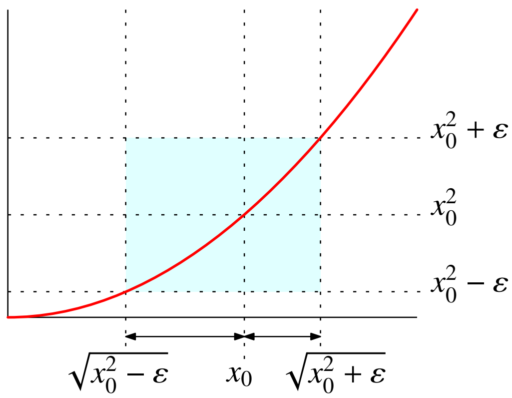
Observación 110. Vimos que una función $f : I \to \mathbb{R}$ es continua (Def. 79 p. 26) cuando para todo punto $x_0 \in I$ y para toda precisión $\varepsilon > 0$, existe un radio $\delta > 0$ tal que

$$(*) \qquad \forall x \in I, \ \ |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\,.$$

Fijado $\varepsilon > 0$, el valor posible para el radio δ no es único: en efecto, si un radio δ cumple la condición anterior, entonces todo radio $\delta' < \delta$ también la cumple. Sin embargo, existe en general un máximo radio δ que no podemos superar si queremos mantener la condición $(*)$. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 111. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Fijados un punto $x_0 > 0$ y una precisión $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon \leq x_0^2$, queremos determinar el máximo radio $\delta > 0$ tal que la condición $(*)$ se cumple. Para todo $x \geq 0$, se observa que

$$\begin{aligned} |x^2 - x_0^2| < \varepsilon \quad &\Leftrightarrow \quad x_0^2 - \varepsilon < x^2 < x_0^2 + \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{x_0^2 - \varepsilon} < x < \sqrt{x_0^2 + \varepsilon} \end{aligned}$$



Luego, el radio $\delta > 0$ debe cumplir las condiciones $\delta \leq x_0 - \sqrt{x_0^2 - \varepsilon}$ y $\delta \leq \sqrt{x_0^2 + \varepsilon} - x_0$. Se puede demostrar que la segunda condición es más restrictiva (véase la figura anterior). Por lo tanto, el máximo radio que cumple la condición $(*)$ es $\delta := \sqrt{x_0^2 + \varepsilon} - x_0$.

Observación 112. El ejemplo anterior muestra que, en general, el radio $\delta > 0$ no sólo depende de la precisión $\varepsilon > 0$, pero que también depende del punto x_0. Para muchas aplicaciones (en particular en el cálculo integral), es útil que el radio $\delta > 0$ sólo dependa de la precisión $\varepsilon > 0$. (Vimos que no es el caso en el ejemplo anterior.) Para ello, se necesita introducir una condición más exigente que la continuidad: la *continuidad uniforme*.

Definición 113 (Función uniformemente continua)**.** Se dice que una función $f : I \to \mathbb{R}$ es *uniformemente continua* en el intervalo $I \subset \mathbb{R}$ cuando:

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0, \ \forall x, x' \in I, \ \ |x - x'| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(x')| < \varepsilon\,.$$

Por supuesto, la continuidad uniforme implica la continuidad:

Proposición 114. *Toda función uniformemente continua es continua.*

Demostración. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
& f \text{ es uniformemente continua en } I \\
\Leftrightarrow\ & \forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall x \in I,\ \forall x' \in I,\ \ |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon && (1)\\
\Rightarrow\ & \forall\varepsilon > 0,\ \forall x \in I,\ \exists\delta > 0,\ \forall x' \in I,\ \ |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon && (2)\\
\Leftrightarrow\ & \forall x \in I,\ \forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall x' \in I,\ \ |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon && (3)\\
\Leftrightarrow\ & f \text{ es continua en } I && \square
\end{aligned}$$

Observación 115. En el razonamiento anterior, usamos las siguientes dos reglas lógicas, que rigen la conmutación de los cuantificadores:

- Para demostrar que (1) $\Rightarrow$ (2), usamos la regla

  $$\exists\delta > 0,\ \forall x \in I,\ \ldots \quad \Rightarrow \quad \forall x \in I,\ \exists\delta > 0,\ \ldots \qquad (\text{“}\exists_1\forall_2 \Rightarrow \forall_2\exists_1\text{”})$$

  que expresa que un enunciado de tipo “existe, para todo” siempre implica el enunciado de tipo “para todo, existe” obtenido intercambiando ambas cuantificaciones.
  ¡Cuidado! Sólo se trata de una implicación, pues el recíproco no se cumple en general[13].
- Para demostrar que (2) $\Leftrightarrow$ (3), usamos la regla

  $$\forall\varepsilon > 0,\ \forall x \in I,\ \ldots \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in I,\ \forall\varepsilon > 0,\ \ldots \qquad (\text{“}\forall_1\forall_2 \Leftrightarrow \forall_2\forall_1\text{”})$$

  que expresa que siempre se pueden intercambiar dos cuantificaciones consecutivas del mismo tipo (dos “$\forall$” o dos “$\exists$”) sin cambiar el sentido del enunciado considerado. (La misma regla se cumple para el cuantificador existencial: “$\exists_1\exists_2 \Leftrightarrow \exists_2\exists_1$”.)

Por otro lado, la condición de continuidad uniforme es más fuerte que la condición de continuidad, pues existen funciones continuas que no son uniformemente continuas:

Ejemplo 116 (Continuación del Ejemplo 111)**.** Consideremos de nuevo la función $f(x) = x^2$. Es claro que f es continua en $\mathbb{R}$. Queremos demostrar que f no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$. Para ello, se razona por el absurdo, suponiendo que f es uniformemente continua en $\mathbb{R}$. Fijado $\varepsilon > 0$, esto significa que existe un radio $\delta > 0$ que cumple la condición

$$(**) \qquad \forall x, x' \in \mathbb{R},\ \ |x - x'| < \delta \Rightarrow |x^2 - x'^2| < \varepsilon\,.$$

En particular, fijado $x > 0$, tenemos que

$$(*) \qquad \forall x' \in \mathbb{R},\ \ |x' - x| < \delta \Rightarrow |x'^2 - x^2| < \varepsilon\,.$$

Por otro lado, vimos en el Ejemplo 111[14] que el máximo radio que cumple la condición $(*)$ es el número $\sqrt{x^2 + \varepsilon} - x$ (> 0). Por lo tanto, tenemos que

$$\delta \leq \sqrt{x^2 + \varepsilon} - x \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^+\,.$$

[13]En efecto, cuando se dice que “todos los uruguayos tienen una cédula” (enunciado de tipo “$\forall\exists$”), esto no implica que “existe una cédula compartida por todos los uruguayos” (enunciado de tipo “$\exists\forall$”).

[14]Aquí, las variables x y x' tienen el papel de las variables x_0 y x (respectivamente) en el Ejemplo 111.

Ahora, se observa que

$$
\begin{aligned}
\delta \;\le\; \sqrt{x^2+\varepsilon}-x \;&=\; \frac{\left(\sqrt{x^2+\varepsilon}-x\right)\left(\sqrt{x^2+\varepsilon}+x\right)}{\sqrt{x^2+\varepsilon}+x} \\
&=\; \frac{(x^2+\varepsilon)-x^2}{\sqrt{x^2+\varepsilon}+x} \;=\; \frac{\varepsilon}{\sqrt{x^2+\varepsilon}+x} \;\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}\; 0\,.
\end{aligned}
$$

Pasando al límite cuando x tiende a $+\infty$, se deduce que $\delta \le 0$, lo que es absurdo, pues $\delta > 0$. Por lo tanto, la función $f(x) = x^2$ no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

3.2. El teorema de Heine-Cantor

En la sección anterior, introdujimos la noción de continuidad uniforme (Def. 113), y vimos que define una condición más exigente que la condición usual de continuidad. Sin embargo, existe un caso particular muy importante donde ambas nociones de continuidad coinciden, a saber: cuando el intervalo de definición es un intervalo cerrado $[a, b]$ (con $a < b$). El objetivo de esta sección es demostrar el teorema de Heine-Cantor, que expresa que toda función continua definida en un intervalo cerrado $[a, b]$ (con $a < b$) es uniformemente continua.

Para ello, se necesita demostrar el siguiente lema:

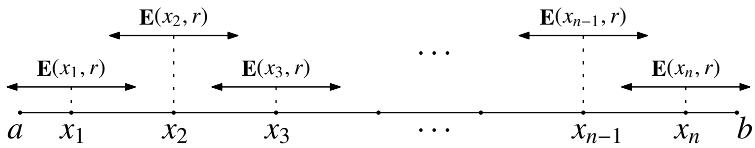
Lema 117 (Extracción de un cubrimiento finito)**.** *Dada una función positiva $h : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ (cualquiera) definida en un intervalo $[a, b]$ (con $a < b$), existe una sucesión finita de puntos $x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$ tal que los entornos $\mathbf{E}(x_1, h(x_1)), \ldots, \mathbf{E}(x_n, h(x_n))$ de centros $x_1, \ldots, x_n$ y de radios respectivos $h(x_1), \ldots, h(x_n)$ cubren el intervalo $[a, b]$, es decir:*

$$[a, b] \;\subset\; \mathbf{E}(x_1, h(x_1)) \cup \cdots \cup \mathbf{E}(x_n, h(x_n))\,.$$

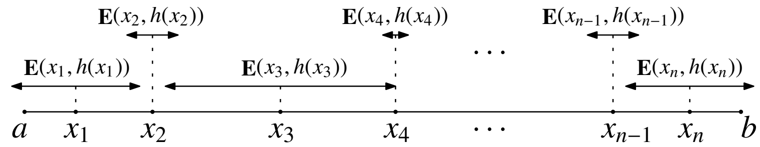
Observación 118. El enunciado del lema se puede entender del modo siguiente. Fijado un radio $r > 0$, es claro que siempre se puede cubrir el intervalo $[a, b]$ por una sucesión finita de entornos $\mathbf{E}(x_1, r), \ldots, \mathbf{E}(x_n, r)$ del mismo radio r: basta con tomar un entero n suficientemente grande para que $2nr > b - a$, y definir los centros $x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$ por

$$x_i \;:=\; \frac{(2i-1)(b-a)}{2n} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

así como lo ilustra la siguiente figura:



Para demostrar el teorema de Heine-Cantor, se necesita considerar una situación mucho más general donde los entornos que cubren el intervalo $[a, b]$ tienen un radio variable forzado por una función positiva $h : [a, b] \to \mathbb{R}^+$. (Intuitivamente, la función h asocia a cada punto de $[a, b]$ el "radio autorizado" alrededor de dicho punto.) El lema expresa que, cualquiera sea la función positiva $h : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ (no se requiere ninguna hipótesis de continuidad sobre h), siempre se puede hallar una sucesión finita de puntos $x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$ tal que los correspondientes entornos $\mathbf{E}(x_1, h(x_1)), \ldots, \mathbf{E}(x_n, h(x_n))$ cubran el intervalo $[a, b]$:



Demostración del lema. Dado un intervalo $[c, d] \subset [a, b]$, se llama *h-cubrimiento finito del intervalo* $[c, d]$ a toda sucesión finita $x_1, \ldots, x_n \in [c, d]$ tal que

$$[c, d] \ \subset \ \mathbf{E}(x_1, h(x_1)) \cup \cdots \cup \mathbf{E}(x_n, h(x_n))\,.$$

Se considera el conjunto $A \subset [a, b]$ definido por

$$\begin{aligned} A \ &:= \ \{c \in [a, b] \ : \ \text{existe un } h\text{-cubrimiento finito del intervalo } [a, c]\} \\ &= \ \{c \in [a, b] \ : \ \exists n \in \mathbb{N}, \ \exists x_1, \ldots, x_n \in [a, c], \ [a, c] \subset \mathbf{E}(x_1, h(x_1)) \cup \cdots \cup \mathbf{E}(x_n, h(x_n))\}\,. \end{aligned}$$

Se trata de demostrar que $b \in A$. Para ello, se observa lo siguiente:

(1) El punto a es un elemento de A. En efecto, la sucesión definida por el único punto a es un h-cubrimiento finito del intervalo $[a, a]$, pues $[a, a] = \{a\} \subset \mathbf{E}(a, h(a))$.

(2) Además, como $A \subset [a, b]$ está acotado, tiene supremo $s := \sup(A)$ $(\in [a, b])$.

(3) Como $s = \sup(A)$, existe un punto $c \in A$ tal que $s - h(s) < c \leq s$. Y como $c \in A$, existe (por definición del conjunto A) un h-cubrimiento finito $x_1, \ldots, x_n$ del intervalo $[a, c]$, lo que significa que $[a, c] \subset \mathbf{E}(x_1, h(x_1)) \cup \cdots \cup \mathbf{E}(x_n, h(x_n))$.

(4) Por otro lado, tenemos que $c \in \mathbf{E}(s, h(s))$ (por construcción), entonces $[c, s] \subset \mathbf{E}(s, h(s))$: la sucesión definida por el único punto s es un h-cubrimiento finito del intervalo $[c, s]$.

(5) Pegando los dos h-cubrimientos finitos definidos en (3) y (4), se deduce que

$$[a, s] = [a, c] \cup [c, s] \subset \mathbf{E}(x_1, h(x_1)) \cup \cdots \cup \mathbf{E}(x_n, h(x_n)) \cup \mathbf{E}(s, h(s))\,.$$

Por lo tanto, la sucesión finita $x_1, \ldots, x_n, s$ (con $n + 1$ elementos) es un h-cubrimiento finito del intervalo $[a, s]$, lo que demuestra que $s \in A$.

(6) Ahora, se trata de demostrar que $s = b$. Para ello, se supone (por el absurdo) que $s < b$ y se considera el punto $s' := \text{mín}(s + \frac{h(s)}{2}, b)$. Por construcción, tenemos que $s' > s$ y $s' \in \mathbf{E}(s, h(s))$. Entonces, tenemos que $[s, s'] \subset \mathbf{E}(s, h(s))$, de tal modo que

$$[a, s] = [a, s] \cup [s, s'] \subset \mathbf{E}(x_1, h(x_1)) \cup \cdots \cup \mathbf{E}(x_n, h(x_n)) \cup \mathbf{E}(s, h(s))\,.$$

Entonces, la sucesión finita $x_1, \ldots, x_n, s$ (con $n{+}1$ elementos) también es un h-cubrimiento finito del intervalo $[a, s']$, luego $s' \in A$. Pero esto es absurdo, pues $s' > s = \sup(A)$. Por lo tanto, la hipótesis $s < b$ era absurda, y tenemos que $s = b \in A$. □

Ahora se puede demostrar el teorema de Heine-Cantor:

Teorema 119 (Heine-Cantor)**.** *Toda función continua definida en un intervalo cerrado* $[a, b]$ *(con $a < b$) es uniformemente continua en dicho intervalo.*

Demostración. Fijada una precisión $\varepsilon > 0$, se trata de construir un radio $\delta > 0$ tal que

$$(*) \qquad \forall x, x' \in [a, b], \ \ |x - x'| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(x')| < \varepsilon\,.$$

Como f es continua en $[a,b]$, se puede asociar a cada punto $x_0 \in [a,b]$ un radio $\delta_{x_0} > 0$ tal que

$$(**) \qquad \forall x \in [a,b],\ \ |x - x_0| < \delta_{x_0} \ \Rightarrow\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon/2\,.$$

Sea $h : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ la función definida por $h(x) := \delta_x/2$ para todo $x \in [a,b]$. Por el Lema 117, existe una sucesión finita de puntos $x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$ tales que

$$[a,b] \ \subset\ \mathbf{E}(x_1, h(x_1)) \cup \cdots \cup \mathbf{E}(x_n, h(x_n))\,,$$

lo que permite definir el número $\delta > 0$ por $\delta := \text{mín}(h(x_1), \ldots, h(x_n))$. Ahora, se trata de demostrar que el radio δ cumple la condición $(*)$. Para ello, se consideran puntos $x, x' \in [a,b]$ tales que $|x - x'| < \delta$. Como $[a,b] \subset \mathbf{E}(x_1, h(x_1)) \cup \cdots \cup \mathbf{E}(x_n, h(x_n))$, existe un índice i tal que $x \in \mathbf{E}(x_i, h(x_i))$. Por construcción, tenemos que $|x - x_i| < h(x_i) = \delta_{x_i}/2 < \delta_{x_i}$, de tal modo que $|f(x) - f(x_i)| < \varepsilon/2$ por $(**)$. Por otro lado, tenemos que

$$|x' - x_i| \ \leq\ |x' - x| + |x - x_i| \ <\ \delta + h(x_i) \ \leq\ 2h(x_i) \ =\ \delta_{x_i}\,,$$

de tal modo que $|f(x') - f(x_i)| < \varepsilon/2$ por $(**)$. Por lo tanto, tenemos que

$$|f(x') - f(x)| \ \leq\ |f(x') - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x)| \ \leq\ \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \ =\ \varepsilon\,,$$

lo que acaba demostrar la condición $(*)$. □

Ejemplo 120 (Continuación de los Ejemplos 111 y 116)**.** Vimos en el Ejemplo 116 que la función $f(x) = x^2$ no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$. Sin embargo, el teorema de Heine-Cantor implica que la misma función es uniformemente continua en todo intervalo $[a,b]$. Así, dada una precisión $\varepsilon > 0$, no existe ningún radio $\delta > 0$ que cumpla la condición

$$\forall x, x' \in \mathbb{R},\ \ |x - x'| < \delta \ \Rightarrow\ |x^2 - x'^2| < \varepsilon$$

(donde las variables x y x' recorren todo $\mathbb{R}$), pero cuando uno se restringe a un intervalo cerrado $[a,b]$, siempre puede hallar un radio $\delta_{a,b} > 0$ tal que

$$\forall x, x' \in [a,b],\ \ |x - x'| < \delta_{a,b} \ \Rightarrow\ |x^2 - x'^2| < \varepsilon$$

(donde las variables x y x' sólo recorren el intervalo $[a,b]$).

3.3. Más funciones integrables

Una consecuencia muy importante del teorema de Heine-Cantor es la siguiente:

Proposición 121 (Integrabilidad de las funciones continuas)**.** *Toda función continua en un intervalo cerrado* $[a,b]$ *(con $a < b$) es integrable en* $[a,b]$.

Demostración. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua (con $a < b$). Por la Prop. 93 p. 30, sabemos que f está acotada en el intervalo $[a,b]$, lo que permite definir sus sumas inferiores y superiores. Para demostrar que f es integrable en $[a,b]$, se usa el criterio de integrabilidad a menos de ε (véase capítulo sobre las integrales, Prop. 25 p. 11). Fijada una precisión $\varepsilon > 0$, se elige un número $\eta > 0$ tal que $\eta < \varepsilon/(b-a)$[15]. Como la función f es continua en $[a,b]$, es uniformemente continua en $[a,b]$ (por el Teorema 119), y existe un radio $\delta > 0$ tal que

$$(*) \qquad \forall x, x' \in [a,b], \quad |x - x'| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(x')| < \eta\,.$$

Ahora, se elige una partición $P = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\} \subset [a,b]$ tal que $\|P\| < \delta$. Dado un subintervalo $[a_i, a_{i+1}]$ ($i = 0, \ldots, n-1$), se observa que para todos $x, x' \in [a_i, a_{i+1}]$, tenemos que $|x - x'| < \delta$ (pues $a_{i+1} - a_i \le \|P\| < \delta$), luego $|f(x) - f(x')| < \eta$ por $(*)$. Por lo tanto, tenemos que

$$f(x) - f(x') \le \eta \qquad\qquad \text{para todos } x, x' \in [a_i, a_{i+1}]\,.$$

Pasando al supremo (para $x \in [a_i, a_{i+1}]$) y al ínfimo (para $x' \in [a,b]$) en la desigualdad anterior, se deduce (ejercicio) que $\sup(f, [a_i, a_{i+1}]) - \operatorname{ínf}(f, [a_i, a_{i+1}]) \le \eta$ para todo $i = 0, \ldots, n-1$. Por lo tanto, tenemos que

$$\begin{aligned} S^*(f,P) - S_*(f,P) &= \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \cdot (\sup(f, [a_i, a_{i+1}]) - \operatorname{ínf}(f, [a_i, a_{i+1}])) \\ &\le \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \cdot \eta \;=\; \eta \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \;=\; \eta(b-a) \\ &< \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) \;=\; \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Así demostramos que para toda precisión $\varepsilon > 0$, existe una partición P del intervalo $[a,b]$ tal que $S^*(f,P) - S_*(f,P) < \varepsilon$. Por el criterio de integración a menos de ε, se deduce que la función f es integrable en el intervalo $[a,b]$. □

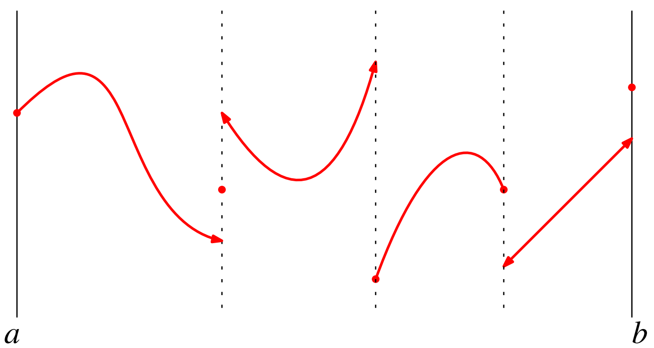
Se sigue inmediatamente de la proposición anterior que:

Corolario 122. *Toda función continua en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ es localmente integrable en I.*

Definición 123 (Función seccionalmente continua)**.** Se dice que una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida en un intervalo cerrado $[a,b]$ (con $a < b$) es *seccionalmente continua* cuando existe una partición $P = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\} \subset [a,b]$ tal que para todo $i = 0, \ldots, n-1$:

(1) la función f es continua en el intervalo abierto (a_i, a_{i+1});

(2) en el intervalo (a_i, a_{i+1}), la función f tiene límites finitos en el punto a_i (por la derecha) y en el punto a_{i+1} (por la izquierda).



[15] Por ejemplo, se puede tomar $\eta := \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$.

Observación 124. Cuando se verifica que una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es seccionalmente continua, es importante no olvidar la condición (2), que asegura que dicha función tiene límites finitos por la izquierda y por la derecha en todos los puntos del intervalo $[a,b]$, incluso en los puntos donde f es discontinua. Por ejemplo, la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1/x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

es continua en el intervalo abierto $(0,1)$, pero no es seccionalmente continua en el intervalo cerrado $[0,1]$, pues no tiene límite finito en el punto 0 (por la derecha).

Ejercicio 125. Sea un intervalo cerrado $[a,b]$, con $a < b$.

(1) Verificar que toda función escalonada en $[a,b]$ es seccionalmente continua en $[a,b]$.
(2) Demostrar que toda función seccionalmente continua en $[a,b]$ está acotada en $[a,b]$.

Más generalmente, se demuestra que:

Proposición 126 (Integrabilidad de las funciones seccionalmente continuas)**.** *Toda función seccionalmente continua en un intervalo* $[a,b]$ *(con* $a < b$*) es integrable en* $[a,b]$.

Demostración. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función seccionalmente continua en $[a,b]$. Por definición, existe una partición $P = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\} \subset [a,b]$ que cumple las condiciones (1) y (2) de la Def. 123. En cada subintervalo $[a_i, a_{i+1}]$ ($i = 0, \ldots, n-1$), se observa que la función $f_i : [a_i, a_{i+1}] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f_i(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } a < x < b \\ \lim_{x \to a^+} f(x) & \text{si } x = a \\ \lim_{x \to b^-} f(x) & \text{si } x = b \end{cases} \qquad (\text{para todo } x \in [a_i, a_{i+1}])$$

es continua en el intervalo $[a_i, a_{i+1}]$ (por construcción), luego es integrable en dicho intervalo (por la Prop. 121). Y como la función f coincide con f_i en el intervalo $[a_i, a_{i+1}]$, salvo (quizá) en los dos puntos a_i y a_{i+1}, se deduce que la función f es integrable en el intervalo $[a_i, a_{i+1}]$[16]. Por la propiedad de aditividad respecto al intervalo, se concluye que la función f es integrable en el intervalo $[a,b] = [a_0, a_1] \cup \cdots \cup [a_{n-1}, a_n]$. □

3.4. Aplicación: el teorema del valor medio

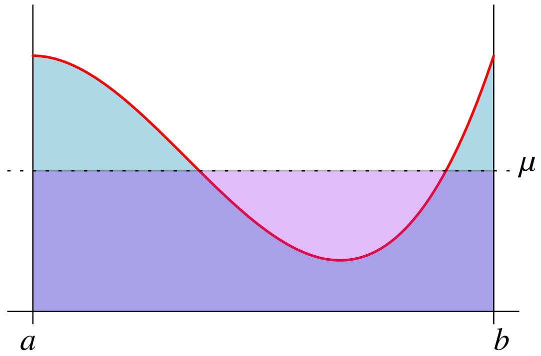
Definición 127 (Valor medio de una función integrable)**.** Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable en un intervalo $[a,b]$ (con $a < b$). Se llama *valor medio de la función f en el intervalo* $[a,b]$ al número $\mu \in \mathbb{R}$ definido por:

$$\mu := \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx\,.$$

Observación 128. Intuitivamente, el valor medio de la función f en el intervalo $[a,b]$ representa el "promedio continuo" de los valores tomados por la función f en el intervalo $[a,b]$. Gráficamente, se puede interpretar el valor medio μ de los siguientes modos:

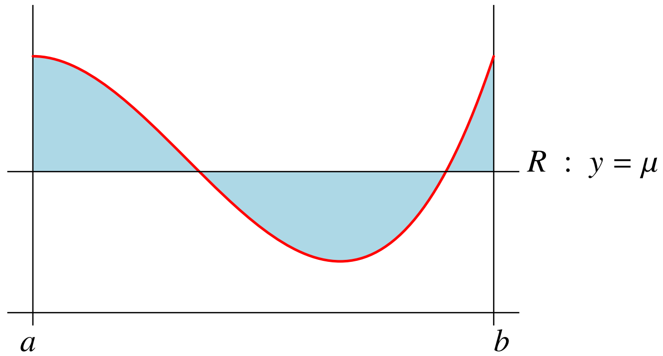
[16]Véase capítulo sobre las integrales, Prop. 82 p. 33.

- Como la altura (algebraica) del rectángulo de ancho $b - a$ que tiene la misma área algebraica que la región ubicada entre el eje x y la gráfica de la función f:



$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; (b-a)\mu$$

- Como la ordenada de la recta horizontal R que divide la gráfica de la función f de tal modo que la región por encima de la recta R y la por debajo de R tengan la misma área:



$$\int_a^b (f(x) - \mu)\,dx \;=\; 0$$

Ejemplo 129. Dado que las anteriores dos figuras representan la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 1$ en el intervalo $[-1, 2]$, calcular el correspondiente valor medio μ.

Teorema 130 (Valor medio)**.** *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua en un intervalo $[a, b]$ (con $a < b$), entonces existe un punto $c \in [a, b]$ donde la función f alcanza su valor medio:*

$$f(c) \;=\; \mu \;=\; \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Demostración. Como la función f es continua en el intervalo $[a, b]$, es integrable en $[a, b]$, lo que justifica la existencia de la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ y del valor medio $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$. Por el teorema de Weierstrass (Teorema 95 p. 31), existen $x_0, x_1 \in [a, b]$ tales que $f(x_0) = m$ y $f(x_1) = M$, donde m (resp. M) es el mínimo (resp. el máximo) de la función f en el intervalo $[a, b]$. Por lo tanto, tenemos que $m \le f(x) \le M$ para todo $x \in [a, b]$, de tal modo que

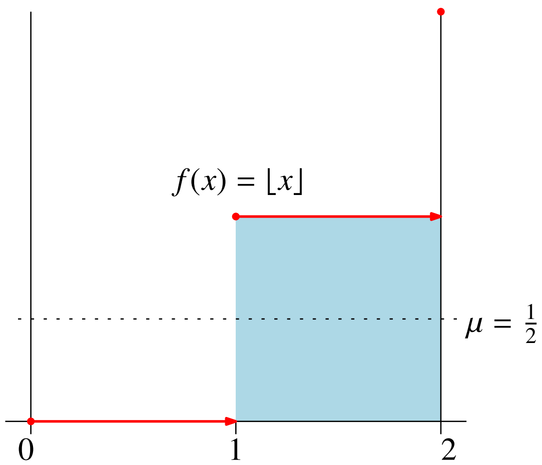
$$m(b-a) \;\le\; \int_a^b f(x)\,dx \;\le\; M(b-a)\,.$$

Dividiendo las desigualdades anteriores por $b - a > 0$, se obtiene que

$$m \;\; (= f(x_0)) \;\le\; \mu \;\le\; M \;\; (= f(x_1))\,.$$

Y por el teorema de los valores intermedios (Coro. 87 p. 29), se deduce que existe un punto c entre x_0 y x_1 tal que $f(c) = \mu$. $\square$

Observación 131. ¡Cuidado! El teorema del valor medio requiere que la función f sea continua en el intervalo $[a, b]$, y no se cumple (en general) cuando f sólo es seccionalmente continua. Un contraejemplo es dado por la función $f(x) = \lfloor x \rfloor$ (parte entera de x) en el intervalo $[0, 2]$:



La función f es seccionalmente continua en el intervalo $[0, 2]$ (es una función escalonada), y en dicho intervalo, tiene valor medio

$$\mu \ := \ \frac{1}{2} \int_0^2 \lfloor x \rfloor \, dx \ = \ \frac{1}{2} \cdot 1 \ = \ \frac{1}{2} \cdot$$

Sin embargo, no existe ningún punto $c \in [0, 2]$ tal que $f(c) = \lfloor c \rfloor = \dfrac{1}{2}$.