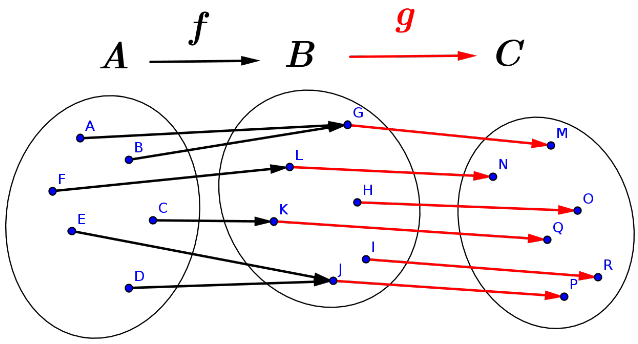
# Práctico 7: Composición e Inversa de funciones

**Ejercicio 1** *Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones dadas por el siguiente diagrama*




*Determinar $g \circ f$.*

**Ejercicio 2** *Para los siguientes pares de funciones definidas en $\mathbb{R}$ calcular $f \circ g$ y $g \circ f$.*

1. a) $f(x) = 2x + 1$, $\quad g(x) = x^3 - x^2 - 4$
   b) $f(x) = x^2 + x + 4$, $\quad g(x) = \cos(x)$
   c) $f(x) = x^3$, $\quad g(x) = \frac{x}{x^4+5}$
2. a) $f(x) = |x + 1|$, $\quad g(x) = |2x|$
   b) $f(x) = x + 1$, $\quad g(x) = \text{máx}\{1, x - 1\}$
   c) $f(x) = \begin{cases} -1 & si \quad x \leq 0 \\ 0 & si \quad x > 0 \end{cases}$, $\quad g(x) = \begin{cases} -x^2 & si \quad x < 2 \\ x + 2 & si \quad x > 2 \end{cases}$

**Ejercicio 3** *Para los siguientes pares de funciones calcular $f \circ g$ y $g \circ f$. En caso de que no esté bien definida la composición modificar los dominios para que resulte bien definida.*

1. $f : \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = \frac{x}{x^2-9}$ *y* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $g(x) = 2x + 1$.
2. $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = \log(x)$ *y* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $g(x) = 2x - 1$.
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = |x|$ *y* $g : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ *tal que* $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

**Ejercicio 4** *Para las funciones $f$, $g$ y $g \circ f$, del Ejercicio 1 determinar cuáles son inyectivas, sobreyectivas y biyectivas.*

**Ejercicio 5** *Consideremos las siguientes funciones:*

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = x^2$
2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ *tal que* $g(x) = x^2$.
3. $h : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ *tal que* $h(x) = x^2$.
4. $i : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ *tal que* $i(x) = x^2$.

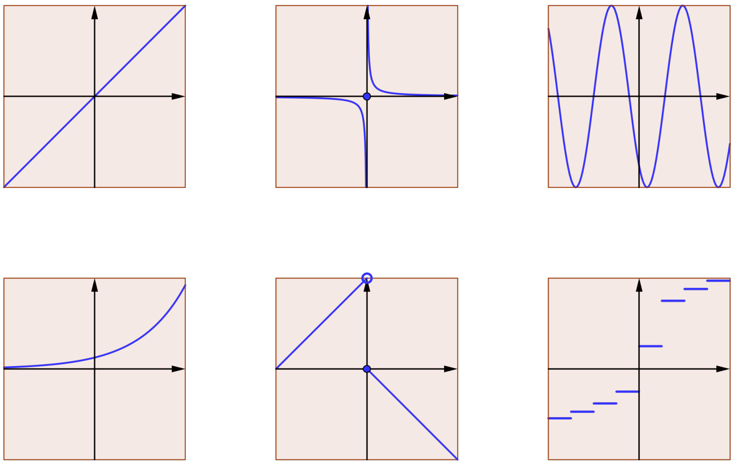
*a) ¿Son todas las funciones iguales? Justificar.*

*b) Estudiar inyectividad, sobreyectividad y biyectividad.*

**Ejercicio 6** *Determinar para las siguientes funciones $f : A \to B$ cuáles son inyectivas, sobreyectivas y biyectivas:*

1. $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{N}$, $f(x) = x + 5$
2. $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}$, $f(x) = x + 5$
3. $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$, $f(x) = x + 5$
4. $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{N}$, $f(x) = 2x$
5. $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}$, $f(x) = 2x$
6. $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$

**Ejercicio 7** *Determinar para los siguientes bosquejos de funciones cuáles son inyectivas, sobreyectivas y biyectivas:*



**Ejercicio 8** *Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ dos funciones.*

1. *Probar que si $f$ y $g$ son inyectivas entonces también lo es $g \circ f$.*
2. *Probar que si $f$ y $g$ son sobreyectivas entonces también lo es $g \circ f$.*
3. a) *Enunciar el recíproco de 1.*
   b) *¿Es verdadero el enunciado anterior? Discutir en detalle.*
4. a) *Enunciar el recíproco de 2.*
   b) *¿Es verdadero el enunciado anterior? Discutir en detalle.*

**Ejercicio 9** *¿Verdadero o falso?*

1. *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es estrictamente creciente (resp. decreciente) entonces $f$ es inyectiva (si es verdadero pruébelo, si es falso dé contraejemplo).*
2. *Si $f$ es inyectiva, ¿debe ser estrictamente creciente?*
3. *La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3 + x$ es biyectiva.*

**Ejercicio 10** *Verificar que los pares de funciones dadas corresponden a una función y su inversa. Salvo que se indique lo contrario el dominio es el más grande posible.*

1. $\begin{cases} f(x) = 2x - 1 \\ g(x) = \frac{x+1}{2} \end{cases}$
2. $\begin{cases} f(x) = x^{1/3} \\ g(x) = x^3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} f(x) = \log_2(x+1) & \text{con dominio } (0,\infty) \\ g(x) = 2^x - 1 & \text{con dominio } \mathbb{R} \end{cases}$

4. $\begin{cases} f(x) = 2 + e^{x-1} & \text{con dominio } \mathbb{R} \\ g(x) = \ln(x-2) + 1 & \text{con dominio } (2,\infty) \end{cases}$

*Graficar ambas funciones en cada caso en un mismo sistema de ejes. ¿Puedes observar alguna característica entre el gráfico de $f$ y de $g$?*

**Ejercicio 11** *Se consideran las funciones trigonométricas:*

- $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ *tal que* $f(x) = \sin(x)$.
- $g : [0,\pi] \to [-1,1]$ *tal que* $g(x) = \cos(x)$.
- $h : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ *tal que* $h(x) = \tan(x)$.

1. *Graficar cada función.*
2. *Notar con la ayuda del gráfico cada una de ellas es biyectiva y por tanto se define*
   - $f^{-1} : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *como* $f^{-1}(x) = \arcsin(x)$.
   - $g^{-1} : [-1,1] \to [0,\pi]$ *como* $g^{-1}(x) = \arccos(x)$.
   - $h^{-1} : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ *como* $h^{-1}(x) = \arctan(x)$.

   *Realizar un bosquejo del gráfico de las inversas.*

**Ejercicio 12** *Verificar que las siguientes funciones son biyectivas y hallar una fórmula para la función inversa.*

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = x + 7$.
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = 2 - 3x^3$.
3. $f : \mathbb{R} \setminus \{5/2\} \to \mathbb{R} \setminus \{3/2\}$ *tal que* $f(x) = \frac{3x+2}{2x-5}$.
4. $f : \left[\frac{-4}{3}, \infty\right) \to [0,+\infty)$ *con* $f(x) = \sqrt{3x+4}$.

*Graficar $f^{-1}$. Utilizar GeoGebra.*

**Ejercicio 13** *Demostrar que las siguientes funciones son biyectivas y hallar una fórmula para la función inversa.*

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = \sqrt[3]{x} + 1$.
2. $f : [0,4] \to [0,32]$ *tal que* $f(x) = -x^2 - 4x + 32$.
3. $f : (1,\infty) \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = 2\ln(x-1)$.
4. $f : [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = e^x$.

*Graficar $f^{-1}$. Utilizar GeoGebra.*

***Ejercicio 14*** *Sean $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{1}{1-x}$ y $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = e^{-x/2}$. Consideramos la composición: $h = f \circ g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to Im(h)$ .*
*Indicar la opción correcta:*

1. *$h$ es invertible y $h^{-1}(x) = 2\ln(\frac{x}{x-1})$.*
2. *$h$ no es invertible.*
3. *$h$ es invertible y $h^{-1}(x) = \ln(\frac{2x}{x-1})$.*
4. *$h$ es invertible y $h^{-1}(x) = 2\ln(\frac{1}{x}) + 1$.*

***Ejercicio 15 (Ejercicios de pruebas anteriores)*** *Indicar si la siguiente afirmación es verdadera o falsa.*
*La función $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [0,2]$ dada por $f(x) = cos(x) + 1$ es biyectiva.*