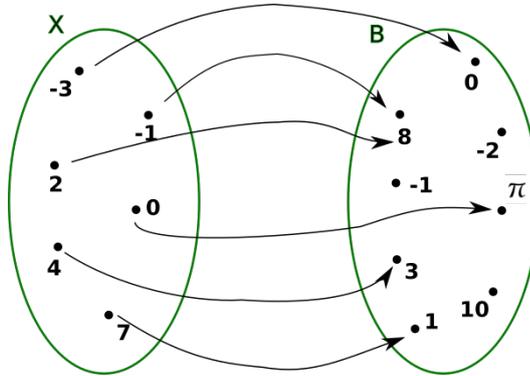


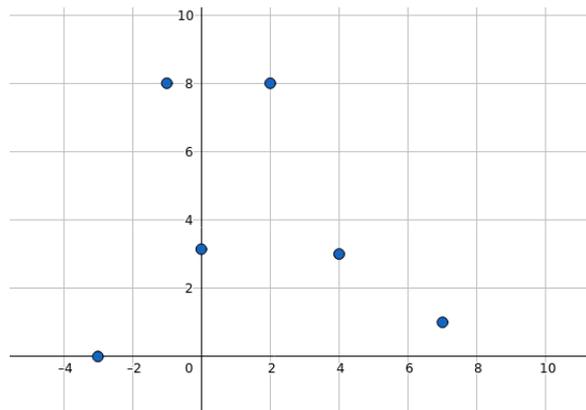


Ejercicio 1 (Evaluar una función) 1. Se consideran los conjuntos $X = \{-3, -1, 0, 2, 4, 7\}$ y $B = \{-2, -1, 0, 1, 3, \pi, 8, 10\}$ y la función $f : X \rightarrow B$ tal que $f(-3) = 0$, $f(-1) = 8$, $f(0) = \pi$, $f(2) = 8$, $f(4) = 3$, $f(7) = 1$. Representar mediante un diagrama de flechas y efectuar el gráfico de f en un sistema de ejes cartesianos.

Solución:



El gráfico de f en un sistema de ejes cartesianos resulta



2. Se considera $g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \frac{x+2}{x-1}$.

Solución:

a) Calcular:

1) $g(0) = -2$

3) $g(\pi) = \frac{\pi+2}{\pi-1}$

5) $g(3) = 5/2$

2) $g(-1) = -1/2$

4) $g(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}-1}$

6) $g(-2) = 0$

b) Calcular la preimagen de $\{0\}$ y $\{1\}$

• $g^{-1}(0) = \{-2\}$

• $g^{-1}(1) = \emptyset$

3. Se considera $h : \mathbb{R} \setminus \{0, 2\} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(x) = \frac{(2x+1)^2}{x^2-2x}$. Calcular:

Solución:

a) Calcular:



Soluciones del práctico 4: Funciones - Parte I



1) $h(-1) = 1/3$

3) $h(-\sqrt{3}) = \frac{(-2\sqrt{3}+1)^2}{3+2\sqrt{3}}$

5) $h(x+1) = \frac{(2x+3)^2}{x^2-1}$

2) $h(-\pi) = \frac{(-2\pi+1)^2}{\pi^2+2\pi}$

4) $h(\frac{1}{3}) = -5$

6) $h(x-1) = \frac{(2x-1)^2}{x^2-4x+3}$

b) Calcular la preimagen de {4} y {0}

• $h^{-1}(4) = \{-1/12\}$

• $h^{-1}(0) = \{-1/2\}$

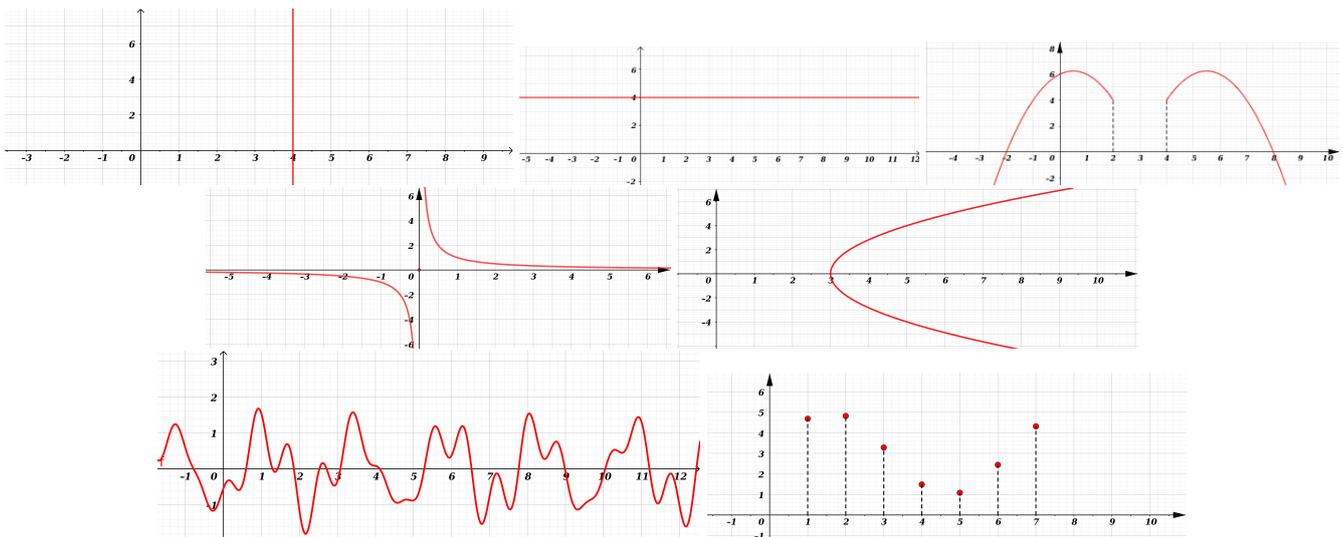
Ejercicio 2 Consideremos las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$ y $g : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \text{sen}(x)$, para todo $x \in [0, 2\pi]$.

Hallar el conjunto preimagen del conjunto \mathbb{Z} por f y el conjunto preimagen del conjunto \mathbb{R}^+ por g .

Solución: El conjunto $f^{-1}(\mathbb{Z}) = f^{-1}(\{1\}) = \mathbb{R}$ y el conjunto $g^{-1}(\mathbb{R}^+) = (0, \pi)$.

Ejercicio 3 (¿Función o no Función?)

1. a) Indicar cuál de los siguientes gráficos representa una función en \mathbb{R} :



Solución: Las únicas que son funciones definidas en \mathbb{R} son la segunda, la cuarta y la sexta, las cuales para cada valor de x existe un único valor en el codominio al cual está asociado.

b) En caso de no ser función, analizar si es posible definir $U \subset \mathbb{R}$ tal que el gráfico corresponda a una función definida en U .

Solución:

Para la primera no es posible.

Para la tercera si el dominio es $U = \mathbb{R} \setminus [2, 4]$ entonces es función.

Para la quinta si el dominio es $U = \{3\}$ entonces es función.

Para la séptima si el dominio es $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ entonces es función.

Ejercicio 4 (Dominio e Imagen)

1. Hallar el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{3x-6}$

Solución: $[2, +\infty)$

b) $f(x) = 1 - e^x$

Solución: \mathbb{R}

c) $f(x) = \log(x+5)$

Solución: $(-5, +\infty)$

d) $f(x) = |2x-5|$

Solución: \mathbb{R}

e) $f(x) = x^2 - x + 1$

Solución: \mathbb{R}

f) $f(x) = x^3 + 27$

Solución: \mathbb{R}



2. Con ayuda de GeoGebra verificar las respuestas de la parte anterior y hallar la imagen de cada función.

a) $f(x) = \sqrt{3x-6}$

Solución: $[0, +\infty)$

b) $f(x) = 1 - e^x$

Solución: $(-\infty, 1)$

c) $f(x) = \log(x+5)$

Solución: \mathbb{R}

d) $f(x) = |2x-5|$

Solución: $[0, +\infty)$

e) $f(x) = x^2 - x + 1$

Solución: $[\frac{1}{2}, +\infty)$

f) $f(x) = x^3 + 27$

Solución: \mathbb{R}

Ejercicio 5 (El conjunto “Gráfico de una función”) Se consideran las siguientes funciones:

1. $f(x) = 2x$

2. $g(x) = 2x^2$

3. $h(x) = \sqrt{x^3+1}$

Indicar si los siguientes puntos pertenecen al gráfico de alguna de las funciones anteriores

1. $A = (0, 0)$

3. $C = (-1, 2)$

5. $E = (2, 2)$

2. $B = (1, 2)$

4. $D = (1, 0)$

6. $F = (2, 3)$

Solución:

1. Los puntos A y B pertenecen a la gráfica de f.

2. Los puntos A, B y C pertenecen a la gráfica de g.

3. El punto F pertenece a la gráfica de h.

Ejercicio 6 (Dominio y ceros de una función) Determinar dominio y ceros de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \sqrt{x-1} \log(x+4)$

Solución: $[1, +\infty)$

2. $f(x) = \frac{\sqrt{-2x+8}}{x^3+x^2}$

Solución: $(-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 4]$

3. $f(x) = \frac{1}{\log(x^2+10x+25)}$

Solución: $\mathbb{R} \setminus \{-5\}$

4. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+6x+5}}{\log(x+1)}$

Solución: $(-1, +\infty)$

5. $f(x) = \frac{x+3}{x^2-16x+64}$

Solución: $\mathbb{R} \setminus \{-8\}$

6. $f(x) = \left| \frac{-x+2}{x-3} \right|$

Solución: $\mathbb{R} \setminus \{3\}$

Verificar con GeoGebra.

1. $f(x) = \sqrt{x-1} \log(x+4)$

Solución: $\{1\}$

2. $f(x) = \frac{\sqrt{-2x+8}}{x^3+x^2}$

Solución: $\{4\}$

3. $f(x) = \frac{1}{\log(x^2+10x+25)}$

Solución: \emptyset

4. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+6x+5}}{\log(x+1)}$

Solución: $\{-1\}$

5. $f(x) = \frac{x+3}{x^2-16x+64}$

Solución: $\{-3\}$

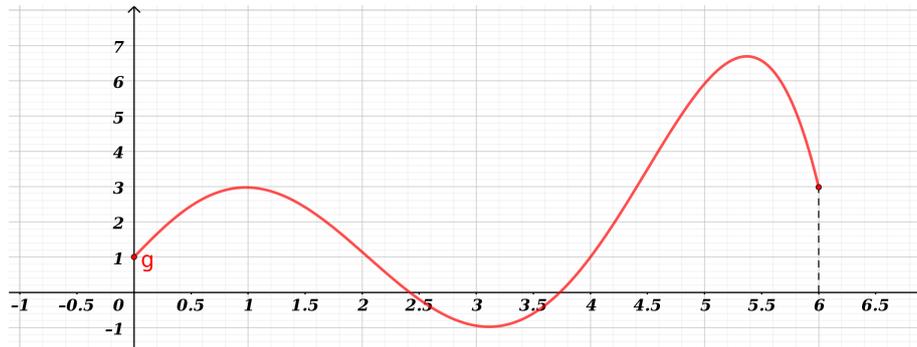
6. $f(x) = \left| \frac{-x+2}{x-3} \right|$

Solución: $\{2\}$

Ejercicio 7 (Interpretación Gráfica) La representación gráfica de una función $f : [0, 6] \rightarrow \mathbb{R}$ es la siguiente:



Soluciones del práctico 4: Funciones - Parte I



1. ¿Cuál es la imagen de $x = 1$?

Solución: $f(1) = 3$

2. Determinar $f(5)$.

Solución: $f(5) = 6$

3. Hallar un valor de x tal que $f(x) < 0$.

Solución: $x = 3$

4. ¿Para qué valores de x se tiene $f(x) = 1$?

Solución: $f(x) = 1$ si y sólo si $x \in \{0, 2, 4\}$

5. ¿Cuántas raíces tiene f ?

Solución: f tiene dos raíces.

6. ¿Cuántos valores de x satisfacen $f(x) = 5$?

Solución: dos valores.

7. Determinar si $y = 7$ pertenece a la imagen de f

Solución: 7 no pertenece a la imagen de f .

8. Hallar una preimagen de 6.

Solución: 5 es una preimagen de 6.

Ejercicio 8 (Interpretación Gráfica) La gráfica corresponde a la altura de un objeto en función del tiempo transcurrido desde el momento de su lanzamiento hasta que llega al suelo.



Observando el gráfico, determinar:

1. ¿Cuánto tiempo demoró el objeto en llegar al suelo?

Solución: El objeto demoró 12 segundos en llegar al suelo.

2. ¿Cuál fue la altura máxima alcanzada, y en qué momento la alcanzó?

Solución: La altura máxima alcanzada es de 8 metros y se alcanza a los 6 segundos.

3. ¿A qué altura se encontraba a los 3 segundos luego de su lanzamiento? ¿Alcanzó esa altura en algún otro momento?

Solución: A los 3 segundos se encontraba a una altura de 6 metros y vuelve a alcanzar esta altura a los 9 segundos.

4. ¿En qué momentos se encontraba a una altura aproximada de 7 metros?

Solución: A los 4 y 8 segundos.



Ejercicio 9 (Funciones Lineales) Las funciones lineales son aquellas de la forma $f(x) = ax + b$ con a y b en \mathbb{R} . Observar que el gráfico de f es una recta.

1. Recordar la interpretación de a y b .
2. Dibujar las siguientes funciones lineales:

a) $f(x) = x + 1$

d) $f(x) = 2x - 1/2$

g) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$

b) $f(x) = x - 1$

e) $f(x) = -3x + 1$

h) $f(x) = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$

c) $f(x) = 2x + 3$

f) $f(x) = -3x - 1$

i) $f(x) = 5x$

3. Determinar si los puntos P del plano pertenecen al gráfico de la función f indicada:

Punto	Función	Solución
$P = (1, 0)$	$f(x) = x - 1$	Si
$P = (-1, 1)$	$f(x) = 2x + 3$	Si
$P = (1/2, 1/2)$	$f(x) = 2x - 1/2$	Si
$P = (1/3, 0)$	$f(x) = -3x + 1$	Si
$P = (2, 0)$	$f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$	No
$P = (1, 1)$	$f(x) = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$	No

4. Grados Celsius vs. Grados Fahrenheit. La relación de conversión entre ambas escalas está dada por la fórmula:

$$f(x) = \frac{9}{5}x + 32$$

siendo x la temperatura expresada en grados Celsius y $f(x)$ la misma temperatura expresada en grados Fahrenheit.

a) Graficar la recta correspondiente a los grados Fahrenheit en función de los grados Celsius.

b) ¿Cuántos grados Fahrenheit son 20 grados centígrados?

Solución: $f(20) = \frac{9}{5} \times 20 + 32 = 68$.

c) ¿Cuántos grados Celsius son 50 grados Fahrenheit?

Solución: $50 = \frac{9}{5}x + 32 \Leftrightarrow x = 10$.

d) ¿Para qué valores de temperatura, expresada en grados Celsius, la temperatura equivalente en grados Fahrenheit es negativa?

Solución: $f(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{9}{5}x + 32 < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{160}{9} \approx -17,7$.

5. Supongamos que un taxi cobra una tarifa inicial fija de 53,05 pesos uruguayos (bajada de bandera), más un costo de 3,08 por cada 100 metros recorridos. La tarifa nocturna se incrementa un 20% sobre la diurna.

a) Hallar la función que indica el costo del viaje en función de los metros recorridos.

Solución: La función es

$$f(x) = \frac{3,08}{100}x + 53,05 = 0,0308x + 53,05$$

Para la tarifa nocturna es

$$g(x) = \frac{3,08}{100}(1,2)x + 53,05 = 0,03696x + 53,05$$



- b) Determinar el costo de un viaje de 4 kilómetros de recorrido. ¿Cuál es el costo si el viaje se realiza en la noche?

Solución: Se debe calcular $f(4000)$ lo cual es igual a $f(4000) = (0,0308)4000 + 53,05 = 176,25$ o sea 177 pesos en el día. En la tarifa nocturna $g(4000) = (0,308)(1,2)4000 + 53,05 = 200,89$ o sea 201 pesos en la noche.

- c) Determinar la cantidad de kilómetros que podemos recorrer si disponemos de 350 pesos uruguayos. ¿Cuántos kilómetros serían si el viaje se realiza con tarifa nocturna?

Solución: Se tiene que hallar x y luego $x/1000$ para que $f(x) = 350$. Resolvemos entonces

$$350 = 0,0308x + 53,05$$

que da aproximadamente 9641 metros por lo tanto podemos recorrer aproximadamente 9.6 kilómetros. Para la tarifa nocturna es similar usando la función g .

6. En un cierto empleo se paga un monto fijo mensual de 2300 pesos uruguayos, más 120 por cada hora de trabajo.

- a) Hallar la función que indique el sueldo mensual de un empleado en función de las horas de trabajo.

Solución: $f(x) = 120x + 2300$

- b) Determinar lo que cobrará un empleado en el mes que trabajó 20 horas.

Solución: Se debe calcular $f(20)$, lo cual es igual a $120 \times 20 + 2300 = 4700$ pesos

- c) Determinar la cantidad de horas que debe trabajar un empleado al mes para cobrar 23900 pesos.

Solución: Se debe hallar x para que $23900 = 120x + 2300$ y ésto corresponde a $x = 180$ horas.

- d) ¿Cuál es el mínimo de horas mensuales que deberá trabajar para que el sueldo supere los 25000 pesos uruguayos?

Solución: Se debe resolver la inecuación $f(x) > 25000$ lo cual equivale en hallar x para que $120x + 2300 > 25000$ cuya solución es el conjunto $\{x : x > 190\}$.