Inducción

1. Principio de Inducción

La inducción matemática es un método muy útil en algunas demostraciones. Se emplea generalmente al probar fórmulas o propiedades de los números naturales.

Los números naturales se definen de manera *inductiva.* Es decir, incluso hablando muy informalmente, al describir los números naturales no podemos nombrar a todos los números naturales puesto que son infinitos, lo que hacemos normalmente es decir algo como “1 es un número natural, también 2 y 3 y 4 y así te sigues, si le sumas 1 a un número natural te da otro número natural”.

Esos son precisamente los Axiomas de Peano, la manera en que definimos los números naturales:

a. 1 es un número natural.
b. si n es un número natural, entonces $n + 1$ también es número natural.

En el caso (b), suponemos la existencia de algún número que cumple la propiedad de ser natural. Nuestra hipótesis no es descabellada, pues a partir de (a) sabemos que existe al menos un número natural, el 1.

El principio de inducción es usar esta definición para probar cosas. Podemos definirlo de varias maneras:

I. Si A es un subconjunto de los números naturales tal que:
   a. 1 pertenece a A
   b. si n pertenece a A, entonces $n + 1$ pertenece a A

   Entonces A contiene a todos los naturales.
II. Si una propiedad P de un subconjunto de los números naturales cumple que:
   a. P es cierta para 1 y
   b. si P es cierta para n, entonces P es cierta para $n + 1$.

   Entonces P es cierta para todos los naturales.

Estas definiciones son equivalentes. Es más, adelante vamos a ver que este principio puede modificarse ligeramente: el caso base no tiene que ser necesariamente 1, por ejemplo.

2. Analogía de los dominós

Si ponemos todos nuestros dominós parados en una fila, necesitamos sólo asegurarnos de dos cosas para que se caigan:

a) Que exista al menos un dominó que se caiga.
b) Que si un dominó cae, empuja al siguiente.

Para la primera parte, no tiene que ser el primer dominó. Si tiramos el primero, queremos que se caigan todos; pero si tiramos el segundo o el tercero o el quinto, queremos que se caigan todos después el que tiramos.

Para la segunda parte tenemos que asegurarnos que la distancia entre cada dos dominós no sea demasiada o que estén en el ángulo correcto, porque si uno solo no empuja al que sigue, entonces no se van a caer todos.

Los números naturales son como un conjunto infinito pero ordenado de dominós, donde cada dominó tiene escrito un número. Las pruebas por inducción son como ordenar nuestros dominós parados en una fila y ver si es posible empujar alguno para que se caigan todos.

a) El **caso base** es asegurarse de que exista un primer dominó que se caiga.
b) El **paso inductivo** es *suponer* que si cumple para algún entero, cumple para el siguiente. Como sabemos que cumple para el caso base, entonces cumple para el siguiente; como cumple para el siguiente, cumple a su vez para su siguiente y así sucesivamente cumplen todos los enteros a partir del caso base.

Esos dos pasos nos aseguran que se caen todos los dominós sin necesidad de verlos caer.

3. Probar que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

a. Sin usar inducción

Usaremos el hecho de que $(x+1)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$.

Entonces tenemos las siguientes igualdades:

$$
\begin{aligned}
2^3 - 1^3 &= 3(1)^2 + 3(1) + 1 \\
3^3 - 2^3 &= 3(2)^2 + 3(2) + 1 \\
4^3 - 3^3 &= 3(3)^2 + 3(3) + 1 \\
5^3 - 4^3 &= 3(4)^2 + 3(4) + 1 \\
6^3 - 5^3 &= 3(5)^2 + 3(5) \\
&\ldots \\
(n-1)^3 - (n-2)^3 &= 3(n-2)^2 + 3(n-2) + 1 \\
n^3 - (n-1)^3 &= 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1 \\
(n+1)^3 - n^3 &= 3(n)^2 + 3(n) + 1
\end{aligned}
$$

Donde los puntos suspensivos significa que tenemos desigualdades equivalentes para los todos los números en el intervalo.

Si sumamos todas las ecuaciones, tendremos lo siguiente del lado izquierdo de la igualdad:

$$2^3 - 1^3 + 3^2 - 2^3 + 4^3 - 3^3 + 5^3 - 4^3 + 6^3 - 5^3 + \cdots + n^3 - (n-1)^3 + (n+1)^3 - n^3$$

Reordenando los elementos de manera útil, tenemos:

$$-1^3 + 2^3 - 2^2 + 3^3 - 3^3 + 4^3 - 4^3 + \cdots + (n-1)^3 - (n-1)^3 + n^3 - n^3 + (n+1)^3$$

Que se simplifica como: $(n+1)^3 - 1^3$

Por otro lado, el lado derecho de la igualdad queda como sigue:

$$3(1)^2 + 3(1) + 1 + 3(2)^2 + 3(2) + 1 + 3(3)^2 + 3(3) + 1 + 3(4)^2 + 3(4) + 1 + 3(5)^2 + 3(5) \\ + 1 + 3(6)^2 + 3(6) + 1 + \cdots + 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1 + 3n^2 + 3n + 1$$

Reordenando los elementos de manera útil, tenemos:

$$3(1)^2 + 3(2)^2 + 3(3)^2 + \cdots + 3n^2 + 3(1) + 3(2) + 3(3) + \cdots + 3n + 1 + 1 + 1 + \cdots + 1$$

Factorizando, tenemos:

$$3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) + 3(1 + 2 + 3 + \cdots + n) + n$$

Recordemos que $3(1 + 2 + 3 + \cdots + n) = \frac{n(n+1)}{2}$; sustituimos:

$$3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) + 3\frac{n(n+1)}{2} + n$$

Veamos que lo que buscamos es $3(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)=S$; sustituimos:

$$3S+3\frac{n(n+1)}{2}+n$$

Uniendo ambas partes de la igualdad, tenemos:

$$(n+1)^3-1=3S+3\frac{n(n+1)}{2}+n$$

Como queremos encontrar el valor de S, debemos despejar para S:

$$(n+1)^3-1-3\frac{n(n+1)}{2}-n=3S$$

Multiplicamos por 2 para no tener fracciones:

$$2(n+1)^3-2-3n(n+1)-2n=6S$$

Vamos a desarrollar cada término.

$$2(n+1)^3=2(n^3+3n^2+3n+1)=2n^3+6n^2+6n+2$$

$$-3n(n+1)=-3n^2-3n$$

Los sustituimos en la ecuación original:

$$2n^3+6n^2+6n+2-2-3n^2-3n-2n=6S$$

Reordenando para agrupar términos semejantes:

$$2n^3-3n^2+6n^2+6n-3n-2n+2-2=6S$$

Simplificando:

$$2n^3+3n^2+n=6S$$

Factorizando:

$$n(2n^2+3n+1)=6S$$

$$n(2n+1)(n+1)=6S$$

Finalmente, terminando el despeje:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=6$$

Que es lo que queríamos demostrar. En esta demostración no sólo demostramos la validez de la fórmula, además la construimos. Este tipo de prueba se llama prueba directa.

b. Usando Inducción.

Probamos en caso base:

$$1^3 = 1 = \frac{(1)(1+1)[2(1)+1)]}{6} = \frac{1(2)(3)}{6} = 1$$

Es decir, la fórmula es válida para 1.

Necesitamos probar que si es válida para *k*, entonces es válida para *k* + 1.

Por lo tanto, nuestra hipótesis de inducción es:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Y lo que queremos demostrar es:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 \ \text{¿=?} \ \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}$$

Utilizando la hipótesis de inducción, tenemos:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

Factorizando:

$$(k+1)\left[\frac{k(2k+1)}{6} + (k+1)\right] = (k+1)\left[\frac{k(2k+1)+6(k+1)}{6}\right]$$

Desarrollando:

$$(k+1)\left[\frac{2k^2+k+6k+6}{6}\right] = (k+1)\left[\frac{2k^2+7k+6}{6}\right]$$

Factorizando:

$$(k+1)\frac{(2k+3)(k+2)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Que es lo que queríamos demostrar.

La intención de mostrar las dos pruebas es mostrar cómo las pruebas por inducción pueden ser mucho más sencillas que una prueba directa. La prueba por inducción necesitó de sólo una sustitución y un par de manipulaciones algebraicas, mientras que la prueba directa no sólo necesitó muchas más sustituciones y manipulaciones algebraicas, además partió de una idea que es sencillamente brillante.

4. Ejemplos

a. Probar por inducción que $\boldsymbol{1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}$

Caso base: para *n* = 1 tenemos que

$$1^3 = 1 = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2 = \left(\frac{2}{2}\right)^2 = 1$$

por lo tanto, la fórmula es válida para 1.

Vamos a suponer que es válida para algún entero *k*. Es decir,

$$1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$$

y, usando esto, queremos demostrar que

$$1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \left(\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}\right)^2$$

Usando la hipótesis de inducción sabemos que

$$1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3$$

Vamos a factorizar $(k+1)^2$ y tenemos que

$$(k+1)^2\left(\left(\frac{k}{2}\right)^2 + (k+1)\right)$$

Vamos a resolver la suma de adentro del paréntesis

$$(k+1)^2\left(\frac{k^2}{4} + \frac{4(k+1)}{4}\right) = (k+1)^2\left(\frac{k^2+4k+4}{4}\right) = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

Puesto que $k^2 + 4k + 4 = (k+2)^2$

Sólo falta observar que esa expresión es lo mismo que

$$\left(\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}\right)^2$$

que es lo que queríamos demostrar.

Por lo tanto, hemos terminado nuestra inducción.

b. Probar por inducción que $\boldsymbol{2^n < n!}$

Lo primero que tenemos que encontrar es nuestro caso base.

Si *n* = 1, $2^1 = 2 > 1 = 1!$

Si *n* = 2, $2^2 = 4 > 2 = 2!$

Si *n* = 3, $2^3 = 8 > 6 = 3!$

Si *n* = 4, $2^4 = 16 < 24 = 4!$

Vamos a tomar 4 como nuestro caso base porque es el primer natural que cumple.

Nuestra hipótesis de inducción entonces es la siguiente

$$2^k < k!$$

siempre que $k \geq 4$.

Usando eso, queremos demostrar que

$$2^{k+1} < (k+1)!$$

Nunca podemos insistir demasiado en que no conocemos la validez de ese signo de *menor que*. Lo escribimos simplemente porque es más sencillo trabajarlo así.

Vamos a usar la hipótesis de inducción

$$2^{k+1} = 2 \times 2^k < 2 \times k!$$

La otra hipótesis que hicimos es que $k \geq 4$, que implica, en particular, que $k + 1 > 2$

$$2 \times k! < (k+1) \times k! = (k+1)!$$

que es lo que queríamos demostrar. Hemos terminado la inducción. Esta inducción se trabajo considerablemente distintas a las anteriores, porque no habíamos trabajando con desigualdades; léela las veces que consideres necesaria hasta entenderla.

c. Probar el criterio de divisibilidad de 11.

El criterio de divisibilidad de 11 establece que un número es múltiplo de 11 si la suma y resta de sus cifras en cierto orden es múltiplo de 11. En concreto: si nuestro número es *abcdefghij* donde cada letra representa un dígito, entonces es divisible entre 11 si y sólo si $(b + d + f + h + j) - (a + c + e + g + i)$ es un múltiplo de 11.

Lo que está detrás de este criterio son las siguientes dos proposiciones:

(1) $10^{2n} = 11k + 1$
(2) $10^{2n+1} = 11k - 1$

Es decir, que las potencias pares de 10 son un múltiplo de 11 menos 1 y las potencias impares de 10 son un múltiplo de 11 más 1.

Queremos hacer una observación muy importante. La *k* que está en las proposiciones es un "adorno". Sirve para poder traducir la frase "múltiplo de 11" a la ecuación, pero la inducción no se hace sobre *k* ni tenemos la proposición *en función* de *k.* Lo único que necesitamos verificar es que existe un entero que satisface la proposición, pero no nos interesa saber nada más sobre dicho entero.

Tenemos, entonces, dos proposiciones. Para demostrarlas necesitaríamos dos inducciones. Vamos a hacer dos inducciones pero con una única hipótesis de inducción.

Primero, veamos algunos casos base

$$1 = 10^0 = 11(0) + 1$$

$$10 = 10^1 = 11(1) - 1$$

$$100 = 10^2 = 11(9) + 1$$

$$1000 = 10^3 = 11(91) - 1$$

Por primera vez en nuestra inducción vamos a ver lo importante que resulta el caso base.

Nuestra hipótesis de inducción será la siguiente:

$$10^{2n} = 11k + 1$$

Y queremos demostrar que

$$10^{2(n+1)} = 11k' + 1$$

Marcamos con ' la *k* porque, aunque en principio es distinta, como ya dijimos antes, no nos interesa mucho quién es *k.*

Usando la hipótesis de inducción

$$10^{2(n+1)} = 10^{2n+2} = 10^{2n} \times 10^2 = (11k + 1) \times 10^2$$

Sustituyendo lo que sabemos por los casos base que hicimos

$$(11k + 1) \times 10^2 = (11k + 1)(11(9) + 1)$$

Desarrollando el producto, tenemos que es igual a

$$11k \times 11(9) + 11k + 11(9) + 1$$

Factorizando 11

$$11[11(9)k + k + 9] + 1$$

Y tenemos que $11(9)k + k + 9 = k'$ es un entero, como queríamos. Por lo tanto, hemos terminado la demostración de que las potencias pares de 10 son un múltiplo de 11 más 1.

Pasamos a las potencias impares.

Vamos a manejar la misma hipótesis de inducción, pero lo que queremos demostrar ahora es que $10^{2n+1} = 11k' - 1$, partiendo de nuestros casos base.

Usando la hipótesis de inducción, tenemos que

$$10^{2n+1} = 10^{2n} \times 10 = (11k + 1) \times 10$$

Vamos a sustituir lo que sabemos para el caso base 10 y desarrollar el producto

$$(11k + 1) \times 10 = (11k + 1)(11 - 1) = 11k \times 11 - 11k + 11 - 1$$

Factorizando 11 tenemos

$$11(11k - k + 1) - 1$$

Y $11k - k + 1 = k'$ es un entero por ser suma y producto de enteros. Con esto concluimos la inducción.

d. Probar que 6 divide a $n^3 - n$ para todo *n* natural.

Lo que queremos probar es que existe algún *k* entero*,* tal que $n^3 - n = 6k$ para todo *n* natural. Igual que en el ejemplo anterior, este *k* es más o menos un "adorno"; una convención de notación para simbolizar la frase "múltiplo de".

Ya sabemos cómo proceder.

Caso base: para *n* = 1 tenemos que $1^3 - 1 = 0$ que es múltiplo de 11.

Nuestra hipótesis de inducción es

$$x^3 - x = 6k$$

y debemos usarla para demostrar que

$$(x + 1)^3 - (x + 1) = 6k'$$

Como es usual, desarrollamos el cubo

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - x - 1$$

Aquí hay un ligero detalle, si procedemos a reducir términos semejantes, nos va a quedar $x^3 + 3x^2 + 2x$ y es una expresión con la que –a simple vista- no podemos trabajar ya con la hipótesis de inducción. Por lo tanto, decidimos *primero* usar la hipótesis de inducción y luego reducir términos semejantes.

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - x - 1 = 3x^2 + 3x + 1 - 1 = 3x^2 + 3x$$

Usamos la hipótesis de inducción de la siguiente manera: si $a|b$, entonces $a|b + c \Leftrightarrow a|c$. La raya vertical se lee "divide a". Es decir, como ya sabemos que 6 divide a $x^3 - x$ por la hipótesis de inducción, entonces necesitamos verificar solamente que el resto es también divisible entre 6.

Desgraciadamente, a partir de la expresión que tenemos $3x^2 + 3x$, sólo podemos concluir que 3 divide a $(x + 1)^3 - (x + 1)$. Lo que quisiéramos para que 6 dividiera a $(x + 1)^3 - (x + 1)$ sería que 2 dividiera a $3x^2 + 3x$, o lo que es lo mismo, que 2 divida a $x^2 + x$. ¿Cómo demostramos eso? Pues con otra inducción.

Caso base: para *x* = 1, $1^2 + 1 = 2$ que sí es múltiplo de 2.

Hipótesis de inducción: $y^2 + y = 2k$.

Por demostrar: $(y + 1)^2 + (y + 1) = 2k'$

Desarrollamos el cuadrado

$$y^2 + 2y + 1 + y + 1$$

y volvemos a aplicar la hipótesis de inducción antes de reducir términos semejantes. Igual que en el caso anterior, $(y + 1)^2 + (y + 1) = 2k'$ si y sólo si $2y + 1 + 1 = 2k'$ lo cual es claro.

Hemos terminado la segunda inducción y con eso demostramos que 6 divide a $n^3 - n$ para todo *n* natural. Para este problema tuvimos que usar una inducción adentro de una inducción.

Vamos a resolverlo ahora de manera no inductiva. Observemos que

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n + 1)(n - 1)$$

es el producto de tres enteros consecutivos. En tres enteros consecutivos siempre tenemos un múltiplo de 3 y al menos un múltiplo de 2. Por lo tanto, su producto es múltiplo de 2 y de 3, es decir, es múltiplo de 6.

La prueba no inductiva es de un solo renglón mientras que la inducción nos tomó más de una página. ¿Cómo sabremos cuándo usar inducción y cuándo no? Sólo la práctica y la experiencia nos lo dirá.

Ya vimos que el caso base no es necesariamente 1, que podemos encontrarnos con dos inducciones que utilicen la misma hipótesis de inducción, que es posible tener una inducción adentro de una inducción y que la inducción no es siempre la herramienta más sencilla. Hay muchos matices para la inducción, vamos a ver dos detalles sobre los que hay que tener mucho cuidado.

5. Probar por inducción que $n + 1 = n$

Vamos a realizar primero el paso inductivo: probar que si cumple para un entero *k*, entonces cumple para el entero *k* + 1.

Nuestra hipótesis de inducción es $k = k + 1$.

Lo que queremos demostrar es que $k + 1 = k + 2$.

Utilizando la hipótesis de inducción:

$$k + 2 = k + 1 + 1 = k + 1$$

Que es lo que queríamos demostrar.

Acabamos de mostrar que si existe algún entero que cumple, entonces todos los enteros después de ese también cumplen. El detalle es que, si existiera algún entero que cumpliese, tendríamos que:

$$x = x + 1 \Leftrightarrow 0 = 1$$

Lo que sabemos que es falso.

Queremos enfatizar el cuidado que se tiene que tener con la inducción: hemos probado que si un dominó se cae, sin duda empujará a todos los demás; el detalle es que no existe un solo dominó que se caiga.

6. Probar por inducción que f(n) = $n^2 + n + 41$ genera puros números primos.

Es más o menos sabido que no existe una función que genere puros números primos. Los primos no se encuentran en ninguna serie aritmética o geométrica conocida; aunque es sabido que existen series que generan infinitos primos.

Vamos a probar una serie de casos base para convencernos de la veracidad de esta afirmación.

$n = 1: 1 + 1 + 41 = 43$
$n = 2: 4 + 2 + 41 = 47$
$n = 3: 9 + 3 + 41 = 53$
$n = 4: 16 + 4 + 41 = 61$
$n = 5: 25 + 5 + 41 = 71$
$n = 6: 36 + 6 + 41 = 83$
$n = 7: 49 + 7 + 41 = 97$
$n = 8: 64 + 8 + 41 = 113$
$n = 9: 81 + 9 + 41 = 131$
$n = 10: 100 + 10 + 41 = 151$

Hasta ahora, la fórmula ha arrojado sólo números primos por lo que tenemos –hasta ahora- algo de evidencia para suponer que quizás pueda ser cierta. Como quisiéramos probarla para todos los números, la inducción es una buena manera de proceder.

Lo siguiente, entonces, es dar el paso inductivo:

Hipótesis de inducción:

$$n^2 + n + 41 = q \text{ primo}$$

Paso inductivo:

$$\text{P.D. } (n + 1)^2 + (n + 1) + 41 = p \text{ primo}$$

Desarrollando el cuadrado:

$$n^2 + 2n + 1 + n + 1 + 41$$

Usando la hipótesis de inducción:

$$q + 2n + 2$$

¿Existe alguna manera de demostrar que esa última expresión es un primo? No lo creemos. Es más, espero que no, puesto que para $n = 41$, $41^2 + 41 + 41 = 41(41 + 1 + 1) = 41 \times 43$ que claramente es múltiplo de 41 y por lo tanto no es primo.

Queremos recalcar aquí que la inducción no es todopoderosa. En particular, las expresiones con números primos escapan muy sencillamente de las capacidades de una prueba por inducción, puesto que los primos no están todos sobre alguna progresión aritmética o geométrica conocida –incluso si se conocen varias progresiones que contienen infinitos primos sobre ellas.

Pensemos nada más que si la inducción no tuviera límites, problemas como la Conjetura de Goldbach no habría escapado a su solución por casi trescientos años.

7. Ejercicios y problemas

Prueba por inducción las siguientes proposiciones. ¿Puedes encontrar una prueba no inductiva para alguno de ellos?

a. $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1) = n^2$

b. $2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 2n = n(n + 1)$

c. $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \frac{n(3n-1)}{2}$

d. $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

e. $1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^x = \frac{a^{x+1}-1}{a-1}$

f. $\frac{1}{1\times2} + \frac{1}{2\times3} + \frac{1}{3\times4} + \cdots + \frac{1}{n\times(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

g. 8 divide a $3^{2n} - 1$ para todo *n* natural.

h. 9 divide a $4^n + 15n - 1$ para todo *n* natural.

i. $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \cdots + n \times (n + 1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

j. $1 \times 1! + 2 \times 2! + \cdots + n \times n! = (n + 1)! - 1$