

**Ejercicio 1 (IC en sumatorias)** Probar las siguientes igualdades por el método de inducción completa:

1.  $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ .

2.  $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .

3. Si  $a \neq 1$ , entonces  $\sum_{i=0}^n a^i = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$  (suma geométrica).

4. a)  $\sum_{i=1}^n i(i+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$ .

b) Probar la igualdad anterior utilizando las partes 1 y 2 de este ejercicio.

**Ejercicio 2 (Aplicación)**

Sobre un tablero ( $8 \times 8$ ) de ajedrez, se intentan colocar:

- 1 grano de arroz en el primer casillero,
- 2 granos en el segundo casillero,
- 4 granos en el tercer casillero,
- 8 granos en el cuarto casillero,
- y así hasta el sexagésimocuarto (64-ésimo) casillero.

Al final, ¿cuántos granos de arroz habría sobre el tablero?

**Ejercicio 3 (IC en desigualdades)**

1. Completar el siguiente cuadro:

$n$	$2^n$	$2n+1$	$n^2$
0	1	1	0
1			
2			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
10			

2. a) Probar que para todo natural  $n \geq 3$  se tiene que  $2^n \geq 2n+1$ .

b) Se considera el enunciado matemático  $P(n) : 2^n \geq 2n+1$ . Con ayuda del cuadro anterior completar la siguiente tabla indicando si el enunciado es verdadero (V) o falso (F):

$n$	$P(n)$	$P(n+1)$
0		
1		
2		
3		
4		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

3. Repetir la tabla anterior, para el enunciado  $P(n) : 2^n \geq n^2$ . Hallar  $n_0$  y probar por inducción completa que para todo natural  $n \geq n_0$  se cumple que  $2^n \geq n^2$ .

### Ejercicio 4 (IC y divisibilidad)

1. Probar que para todo  $n \geq 1$ ,  $n^3 - n$  es divisible por 3.
2. Probar que para todo  $n \geq 1$ ,  $3^{2n} - 1$  es divisible por 8.
3. Probar que para todo  $n$  impar,  $7^n + 1$  es divisible por 8.
4. Probar que la suma de tres números naturales consecutivos, siendo el menor impar, es divisible por 6.

### Ejercicio 5 (Ejercicios de pruebas anteriores)

1. Probar la siguiente igualdad utilizando el método de inducción completa:

$$\sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2, \quad \forall n \geq 1.$$

2. Demostrar que

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n^2 + n}{2}, \quad \forall n \geq 1$$

a partir del ítem anterior, SIN usar inducción completa.

### Ejercicio 6 (Ejercicios de pruebas anteriores)

Considerar la desigualdad

$$(n + 2)\sqrt{n} \geq 3\sqrt{n^2 + 1}$$

1. Hallar el menor natural para el cual la desigualdad es válida.
2. Demostrar por Inducción Completa la desigualdad, a partir de la base inductiva hallada en la parte anterior.