Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Soluciones - Examen febrero

20 de febrero de 2024

MÚLTIPLE OPCIÓN

Versión 1
(Comienza con "La parte real del complejo...")

1	2	3	4	5	6
C	A	E	D	C	D

Versión 2
(Comienza con 'Sea $y(x)$ la solución de la ecuación diferencial...")

1	2	3	4	5	6
B	D	C	A	E	E

DESARROLLO

Ejercicio 1

1. Ver definición 2.3 en las notas del curso
2. (Observar que es el ejercicio 2.10, parte 1, de las notas del curso)
   Llamemos A y B al límite de a_n y b_n respectivamente. Supongamos que no es cierto que $A \leq B$. Es decir, que $A > B$. Sea ahora $\varepsilon = \frac{A-B}{2}$. Usando la definición de límite para ese ε, tenemos que, por un lado, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ para todo $n > n_1$. De la misma forma, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $b_n \in (B-\varepsilon, B+\varepsilon)$ para todo $n > n_2$. A partir del más grande entre n_1 y n_2, suceden ambas cosas. En particular $a_n > A - \varepsilon = \frac{A+B}{2}$, y $b_n < B + \varepsilon = \frac{A+B}{2}$. Pero entonces tenemos que a partir de ese natural, $a_n > b_n$, contradiciendo la hipótesis.
3. No es cierto. Un contraejemplo es $a_n = \frac{-1}{n}$, $b_n = \frac{1}{n}$. En este caso, claramente se cumple que $a_n < b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sin embargo ambas sucesiones tienen igual límite, que en este caso es 0.

Ejercicio 2

Una posible manera de plantear la integral iterada es

$$\int_0^1 \int_{x^2}^1 x e^{y^2} dy dx \ ,$$

pero en este orden no la podemos resolver, ya que no podemos hallar una primitiva de e^{y^2}. Si aplicamos Fubini en el otro orden, la integral se resuelve fácilmente:

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} x e^{y^2} dx dy = \int_0^1 e^{y^2} \left(\frac{x^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{y}} \right) dy = \frac{1}{2} \int_0^1 y e^{y^2} dy = \frac{1}{4} \int_0^1 e^u du = \frac{e-1}{4} \ ,$$

donde el cambio de variable es $u = y^2$.