Técnicas Avanzadas de Modelado y Simulación

4. Técnicas Básicas de Modelado

Ernesto Kofman

Departamento de Control, Escuela de Ingeniería Electrónica, Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario.
CIFASIS – CONICET

Organización de la Presentación

Técnicas Básicas de Modelado

- Vamos a ver como construir modelos matemáticos de sistemas de distintos dominios mediante primeros principios.
- La clave estará en descomponer el sistema en componentes simples y plantear las Relaciones Constitutivas y las Relaciones Estructurales.
- El modelo resultante será un sistema de Ecuaciones Diferenciales Algebraicas.
- En algunos casos convertiremos las DAEs en Diagramas de Bloques para analizar algunas propiedades.

Organización de la Presentación

Circuitos Eléctricos

- Si las frecuencias son suficientemente bajas podemos recurrir a la Teoría de Circuitos.
- En tales casos, tendremos como componentes básicos las fuentes, los resistores, los capacitores y los inductores.
- Asociados a estos componentes, tendremos relaciones constitutivas simples.
- Las relaciones estructurales estarán dadas por las Leyes de Kirchhoff.

Los circuitos eléctricos utilizan como variables descriptivas básicas voltajes y corrientes, por lo que las relaciones vincularán dichas magnitudes.

Organización de la Presentación

Componentes Básicos

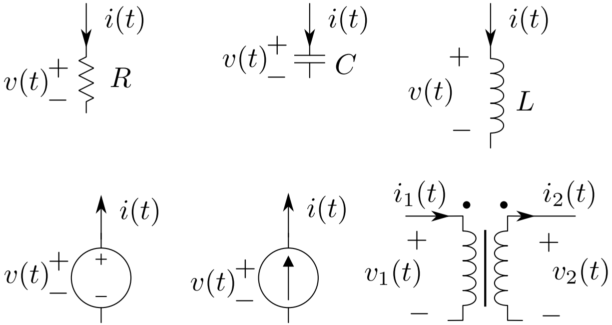


Figura 4.1: Componentes básicos de circuitos eléctricos.

Resistores

Son elementos puramente disipativos. Su ley constitutiva es una relación estática entre la corriente y el voltaje, que en el caso lineal toma la forma

$$v(t) - R\ i(t) = 0. \tag{4.1}$$

En casos más generales encontraremos leyes no lineales de la forma

$$g(v(t), i(t)) = 0, \tag{4.2}$$

donde $g(\cdot)$ definirá una función limitada al primer y tercer cuadrante que cumplirá $g(0,0) = 0$.

Teniendo en cuenta esto, podemos clasificar dentro de esta categoría también a los diodos.

Capacitores

Almacenan carga eléctrica. En el caso lineal sus relaciones constitutivas toman la forma

$$\begin{aligned} C\ u(t) - q(t) &= 0 \\ \dot{q}(t) - i(t) &= 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

de donde, si no necesitamos incluir la carga en el modelo, obtenemos

$$C\ \dot{u}(t) - i(t) = 0. \tag{4.4}$$

En el caso no lineal tendremos

$$\begin{aligned} g(u(t), q(t)) &= 0 \\ \dot{q}(t) - i(t) &= 0 \end{aligned} \tag{4.5}$$

donde $g(\cdot)$ definirá una función del primer y tercer cuadrante que cumplirá $g(0,0) = 0$.

Inductores

Almacenan energía en el campo magnético. En el caso lineal sus relaciones constitutivas toman la forma

$$\begin{aligned} L\ i(t) - \phi(t) &= 0 \\ \dot{\phi}(t) - u(t) &= 0 \end{aligned} \tag{4.6}$$

de donde, si no necesitamos incluir el flujo en el modelo, obtenemos

$$L\ \frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} - u(t) = 0. \tag{4.7}$$

En el caso no lineal tendremos

$$\begin{aligned} g(i(t), \phi(t)) &= 0 \\ \dot{\phi}(t) - u(t) &= 0 \end{aligned} \tag{4.8}$$

donde $g(\cdot)$ definirá una función del primer y tercer cuadrante que cumplirá $g(0,0) = 0$.

Fuentes Ideales

Son dipolos activos que imponen tensiones o corrientes al resto del circuito

Fuente de Voltaje: Es un dipolo cuya tensión sigue una ley independiente de la corriente que circula en el mismo.

Fuente de Corriente: Es un dipolo cuya corriente tiene una ley independiente del voltaje en el mismo.

Transformadores

Son cuadripolos que intercambian energía entre dos partes del sistema.

Transformadores Ideales: Transmiten energía sin almacenar ni disipar y están caracterizados por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} v_1(t) - n\ v_2(t) &= 0 \\ n\ i_1(t) - i_2(t) &= 0 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Transformadores Reales: Incluyen fenómenos de pérdidas y/o inductancias. Por ejemplo, si consideramos la inductancia en el primario y secundario, la Ec.(4.9) se convierte en

$$\begin{aligned} v_1(t) - L_1 \frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t} - M \frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} &= 0 \\ v_2(t) - M \frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t} - L_2 \frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} &= 0 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Organización de la Presentación

Relaciones Estructurales

$$\dot{\phi}(t) - v_L(t) = 0 \quad (4.11a)$$
$$L\ i_L(t) - \phi(t) = 0 \quad (4.11b)$$
$$v_R(t) - R\ i_R(t) = 0 \quad (4.11c)$$
$$g(v_D(t), i_D(t)) = 0 \quad (4.11d)$$
$$v_S(t) - U\ \sin(\omega\ t) = 0 \quad (4.11e)$$
$$v_{R_2}(t) - R_2\ i_{R_2}(t) = 0 \quad (4.11f)$$
$$i_{R_2}(t) - i_L(t) - i_R(t) = 0 \quad (4.11g)$$
$$i_S(t) - i_D(t) = 0 \quad (4.11h)$$
$$i_D(t) - i_{R_2}(t) = 0 \quad (4.11i)$$
$$v_S(t) - v_L(t) - v_D(t) - v_{R_2}(t) = 0 \quad (4.11j)$$
$$v_R(t) - v_L(t) = 0 \quad (4.11k)$$

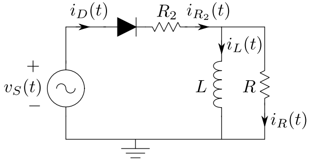


Figura 4.2: Rectificador de Media Onda con carga RL en paralelo.

El sistema de DAEs resultante contiene 11 ecuaciones y 11 variables.

Relaciones Estructurales con Potenciales

Podemos considerar directamente los potenciales eléctricos en los nodos. Esto permite resumir todas las relaciones estructurales mediante dos reglas:

1. Todos los puntos conectados a un nodo tienen el mismo potencial.
2. La suma de todas las corrientes entrantes a un nodo es cero.

Al trabajar con potenciales, deberemos además considerar explícitamente la presencia de la conexión a tierra.

Un componente representando la tierra tiene la relación constitutiva:

$$U_G(t) = 0 \tag{4.12}$$

Relaciones Estructurales con Potenciales

$$i_S(t) - i_D(t) = 0 \tag{4.13a}$$
$$i_D(t) - i_{R_2}(t) = 0 \tag{4.13b}$$
$$i_{R_2}(t) - i_L(t) - i_R(t) = 0 \tag{4.13c}$$
$$i_L(t) + i_R(t) - i_G(t) - i_S(t) = 0 \tag{4.13d}$$
$$v_S(t) - (U_1(t) - U_4(t)) = 0 \tag{4.13e}$$
$$v_D(t) - (U_1(t) - U_2(t)) = 0 \tag{4.13f}$$
$$v_{R_2}(t) - (U_2(t) - U_3(t)) = 0 \tag{4.13g}$$
$$v_L(t) - (U_3(t) - U_4(t)) = 0 \tag{4.13h}$$
$$v_R(t) - (U_3(t) - U_4(t)) = 0 \tag{4.13i}$$
$$U_G(t) - U_4(t) = 0 \tag{4.13j}$$

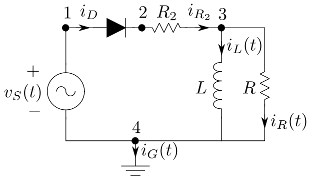


Figura 4.3: Circuito rectificador de media onda con carga RL con nodos de potencial eléctrico.

Relaciones Estructurales con Potenciales

Si bien el modelo que utiliza los potenciales tiene más variables algebraicas (y más ecuaciones, por lo tanto), veremos que su uso será conveniente ya que:

- sus leyes estructurales son mucho más simples.
- no requieren de conceptos topológicos como serie o paralelo.

Organización de la Presentación

Elementos Básicos de Conmutación

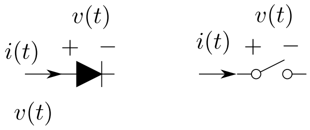


Figura 4.4: Elementos básicos de conmutación.

- Si consideramos que en corte la corriente es nula y que en conducción la diferencia de potencial es nula, es probable que tengamos problemas para causalizar las DAEs y obtener un sistema de Ecuaciones de Estado.
- Para evitar esto, se suele considerar que dichos elementos tienen una resistencia muy pequeña en estado de conducción y una muy grande en estado de corte.

Diodo Ideal

Teniendo en cuenta la idea de usar una resistencia grande o chica según el estado, el diodo ideal puede caracterizarse por

$$v_D(t) - R_D(v_D(t))\ i_D(t) = 0 \tag{4.14a}$$

donde

$$R_D(v_D) = \begin{cases} R_{\mathrm{on}} & \text{si } v_D > v_\gamma \\ R_{\mathrm{off}} & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{4.14b}$$

donde v_γ es un parámetro (un valor típico podría ser 0.6V).

Llave Ideal

La misma idea aplicada a la llave ideal conduce a

$$v_S(t) - R_S(s(t))\ i_S(t) = 0 \tag{4.15a}$$

donde

$$R_S(s) = \begin{cases} R_{\mathrm{on}} & \text{si } s = 1 \\ R_{\mathrm{off}} & \text{si } s = 0 \end{cases} \tag{4.15b}$$

donde $s(t)$ es una señal de entrada que puede valer 0 (llave cerrada) o 1 (llave abierta).

La llave se comporta como una resistencia modulada, ya que la relación entre las variables $i_S(t)$ y $v_S(t)$ se encuentra modulada por una señal de entrada $s(t)$.

Ejemplo: Circuito Boost

$$C\,\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t} - i_C(t) = 0 \qquad (4.16a)$$
$$L\,\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} - v_L(t) = 0 \qquad (4.16b)$$
$$R\ i_R(t) - v_R(t) = 0 \qquad (4.16c)$$
$$R_D(v_D(t))\ i_D(t) - v_D(t) = 0 \qquad (4.16d)$$
$$R_S(s(t))\ i_S(t) - v_S(t) = 0 \qquad (4.16e)$$
$$v_F(t) - U = 0 \qquad (4.16f)$$
$$i_L(t) - i_F(t) = 0 \qquad (4.16g)$$
$$i_L(t) - i_S(t) - i_D(t) = 0 \qquad (4.16h)$$
$$i_D(t) - i_C(t) - i_R(t) = 0 \qquad (4.16i)$$
$$v_F(t) - v_L(t) - v_S(t) = 0 \qquad (4.16j)$$
$$v_S(t) - v_D(t) - v_C(t) = 0 \qquad (4.16k)$$
$$v_C(t) - v_R(t) = 0 \qquad (4.16l)$$

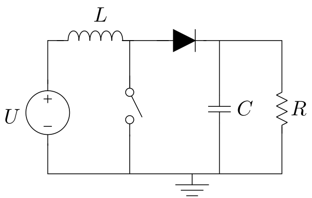


Figura 4.5: Circuito Boost o Elevador.

Ejemplo: Circuito Boost

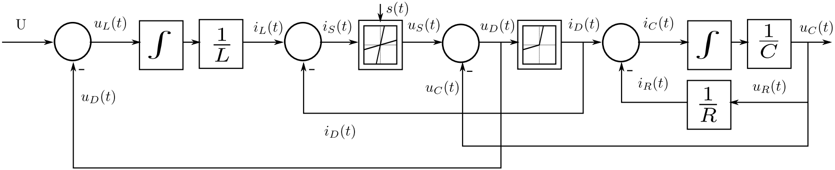


Figura 4.6: Diagrama de Bloques de la Ec.(4.16).

- Si el diodo tiene $R_{\mathrm{on}} = 0$, no se puede calcular $i_D(t)$ a partir de $u_D(t)$.
- Si la llave tiene $R_{\mathrm{off}} = \infty$, no se puede calcular el $u_S(t)$ a partir de $i_S(t)$.

Modelo Lineal a Tramos vs Modelo No Lineal

- El modelo que utilizamos para el diodo al considerar R_{on} y R_{off} se denomina lineal a tramos.
- Un modelo más realista utiliza una exponencial sin discontinuidades:

$$i_D - I_0 \left(e^{\frac{v_D}{\eta V_T}} - 1\right) = 0 \tag{4.17}$$

para ciertos parámetros I_0, η y V_T,

Generalmente conviene utilizar el modelo lineal a tramos (dependiendo de la aplicación).

Organización de la Presentación

Consideraciones sobre el orden

- A priori, el orden del modelo de un circuito sería igual al número de componentes almacenadores.
- Sin embargo, a veces los supuestos estados pueden estar vinculados estáticamente por ecuaciones de restricción, lo que reduce el orden.
- Desde el punto de vista de las DAEs, la presencia de ecuaciones de restricción implica que el sistema será de índice alto.

El orden será igual al número de componentes almacenadores menos el número de ecuaciones de restricción.

Organización de la Presentación

Sistemas Mecánicos

Los modelos matemáticos de los sistemas mecánicos se basan principalmente en la segunda ley de Newton:

$$\sum F_i(t) = m\ a(t) \tag{4.18}$$

y en leyes asociadas a distintos fenómenos que habitualmente ocurren en estos sistemas (rozamiento, por ejemplo).

Veremos entonces como plantear las relaciones constitutivas y estructurales correspondientes.

Organización de la Presentación

Modelos Mecánicos Traslacionales

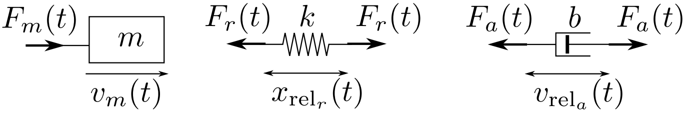


Figura 4.7: Componentes básicos de la mecánica traslacional

Componentes Traslacionales: Masa

Asociado a una masa de parámetro m que se mueve en una dimensión podemos plantear las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{x}_m(t) - v_m(t) &= 0 \\ m\ \dot{v}_m(t) - F_m(t) &= 0 \end{aligned} \tag{4.19}$$

donde $x_m(t)$ es la posición, $v_m(t)$ la velocidad y $F_m(t)$ es la fuerza neta aplicada sobre la masa.

Componentes Traslacionales: Resorte

Asociado a un resorte lineal de parámetro k podemos plantear la ecuación:

$$k\ x_{\mathrm{rel}_r}(t) - F_r(t) = 0 \tag{4.20}$$

donde $x_{\mathrm{rel}_r}(t)$ es la deformación del resorte y $F_r(t)$ es la fuerza ejercida sobre los extremos del mismo.

Según el esquema de fuerzas de la Figura 4.7 estamos considerando positiva la deformación cuando el resorte está estirado.

En casos más generales, la relación entre deformación y fuerza será:

$$g(x_{\mathrm{rel}_r}(t), F_r(t)) = 0. \tag{4.21}$$

Componentes Traslacionales: Amortiguador

Para un amortiguador lineal de parámetro b tenemos la relación constitutiva:

$$b\, v_{\mathrm{rel}_a}(t) - F_a(t) = 0 \tag{4.22}$$

donde $v_{\mathrm{rel}_a}(t)$ es la velocidad relativa entre los extremos del amortiguador y $F_a(t)$ es la fuerza que se ejerce entre dichos extremos.

Según el esquema de la Figura 4.7, estamos considerando positiva la velocidad relativa cuando el amortiguador se estira.

En casos no lineales tendremos

$$g(v_{\mathrm{rel}_a}(t), F_a(t)) = 0, \tag{4.23}$$

Relaciones Estructurales

Al igual que en los circuitos, en los modelos mecánicos encontraremos dos clases de relaciones estructurales:

- Habrá ecuaciones que vinculen posiciones y/o velocidades entre componentes vinculadas a cuestiones geométricas.
  Esto será análogo a lo que ocurría con los potenciales en el caso de los circuitos.
- Habrá ecuaciones que vinculen fuerzas basadas en el hecho que todas las fuerzas concurrentes en un punto sin masa deben sumar cero.
  Esto es de alguna manera análogo a lo que ocurría con las corrientes en los circuitos.

Ejemplo: Sistema Masa-Resorte-Amortiguador

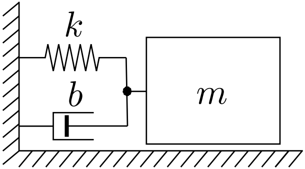


Figura 4.8: Modelo Masa-Resorte-Amortiguador

Relaciones estructurales entre posiciones o velocidades:

$$\begin{aligned} v_m(t) - v_{\mathrm{rel}_a}(t) &= 0 \\ x_{\mathrm{rel}_r}(t) + L_0 - x_m(t) &= 0 \end{aligned} \qquad (4.24)$$

Relaciones estructurales entre fuerzas:

$$F_m(t) + F_r(t) + F_a(t) = 0 \qquad (4.25)$$

Ejemplo: Sistema Masa-Resorte-Amortiguador

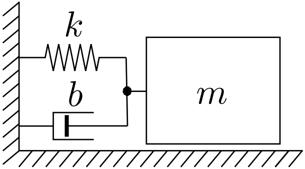


Figura 4.8: Modelo Masa-Resorte-Amortiguador

Sistema completo de DAEs:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_m(t) - v_m(t) &= 0 \\
m\ \dot{v}_m(t) - F_m(t) &= 0 \\
k\ x_{\mathrm{rel}_r}(t) - F_r(t) &= 0 \\
b\ v_{\mathrm{rel}_a}(t) - F_a(t) &= 0 \\
v_m(t) - v_{\mathrm{rel}_a}(t) &= 0 \\
x_{\mathrm{rel}_r}(t) + L_0 - x_m(t) &= 0 \\
F_m(t) + F_r(t) + F_a(t) &= 0
\end{aligned}
$$

Procedimiento de Modelado

El procedimiento que seguimos para plantear el modelo en este caso puede resumirse en los siguientes pasos:

1. Descomponer el sistema en componentes.
2. Plantear las relaciones constitutivas.
3. Plantear las relaciones estructurales que vinculan posiciones y/o velocidades.
4. Plantear las relaciones estructurales para las fuerzas.

En el tercer paso no fue muy sistemático, ya que en un caso vinculamos posiciones (resorte y masa) y en el otro velocidades (amortiguador y masa).

Sistematización de las Relaciones Estructurales

- Lo más sistemático sería vincular siempre las posiciones ya que la relación $x_1(t) = x_2(t)$ implica $v_1(t) = v_2(t)$ pero no al revés.
- Esto implicaría que deberían aparecer la posiciones (o la deformación) del amortiguador, lo que implicará que las relaciones constitutivas del amortiguador deberían ser:

$$\begin{aligned} b\ v_{\mathrm{rel}_a}(t) - F_a(t) &= 0 \\ \dot{x}_{\mathrm{rel}_a}(t) - v_{\mathrm{rel}_a}(t) &= 0 \end{aligned} \tag{4.26}$$

Notar que la presencia de la derivada de $x_{\mathrm{rel}_a}(t)$ posiblemente conduzca a un problema de índice alto.

Sistematización de las Relaciones Estructurales

Relacionando entonces las posiciones, el sistema de DAEs queda:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_m(t) - v_m(t) &= 0 \\
m\ \dot{v}_m(t) - F_m(t) &= 0 \\
k\ x_{\mathrm{rel}_r}(t) - F_r(t) &= 0 \\
b\ v_{\mathrm{rel}_a}(t) - F_a(t) &= 0 \\
\dot{x}_{\mathrm{rel}_a}(t) - v_{\mathrm{rel}_a}(t) &= 0 \\
x_m(t) - x_{\mathrm{rel}_a}(t) &= 0 \\
x_{\mathrm{rel}_r}(t) + L_0 - x_m(t) &= 0 \\
F_m(t) + F_r(t) + F_a(t) &= 0
\end{aligned}
$$

Efectivamente hay un problema de índice alto debido a la ecuación de restricción $x_m(t) - x_{\mathrm{rel}_a}(t) = 0$.

Ejemplo con Serie Mecánica y Fuente

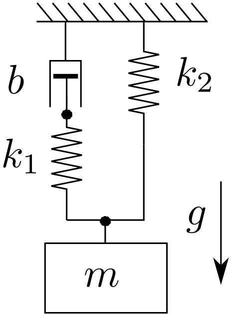


Figura 4.9: Sistema Masa-Resorte-Amortiguador con conexión serie mecánica.

$$\dot{x}_m(t) - v_m(t) = 0 \tag{4.27a}$$
$$m\ \dot{v}_m(t) - F_m(t) = 0 \tag{4.27b}$$
$$k_1\ x_{\mathrm{rel}_1}(t) - F_{r_1}(t) = 0 \tag{4.27c}$$
$$k_2\ x_{\mathrm{rel}_2}(t) - F_{r_2}(t) = 0 \tag{4.27d}$$
$$b\ v_{\mathrm{rel}_a}(t) - F_a(t) = 0 \tag{4.27e}$$
$$\dot{x}_{\mathrm{rel}_a}(t) - v_{\mathrm{rel}_a}(t) = 0 \tag{4.27f}$$
$$F_g(t) - m\ g = 0 \tag{4.27g}$$
$$x_{\mathrm{rel}_1}(t) + L_{0_1} + x_{\mathrm{rel}_a}(t) + L_{0_a} - x_m(t) = 0 \tag{4.27h}$$
$$x_{\mathrm{rel}_2}(t) + L_{0_2} - x_m(t) = 0 \tag{4.27i}$$
$$F_m(t) + F_{r_1}(t) + F_{r_2}(t) + F_g(t) = 0 \tag{4.27j}$$
$$F_{r_1}(t) + F_a(t) = 0 \tag{4.27k}$$

Ejemplo con Serie Mecánica y Fuente

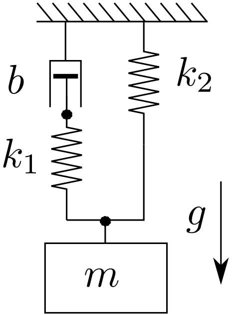


Figura 4.9: Sistema Masa-Resorte-Amortiguador con conexión serie mecánica.

- En este sistema de DAEs puede verse que no hay singularidades estructurales y que efectivamente se trata de un modelo de tercer orden.
- Apareció además aquí un nuevo componente que representa una fuente ideal debida a la fuerza de la gravedad.

Conexiones con Posiciones Absolutas

- Si bien en este último ejemplo las relaciones estructurales que involucran posiciones fueron más simples de obtener, el procedimiento sigue sin ser completamente sistemático.
- En el mismo mezclamos posiciones absolutas y relativas.
- El planteo de estas relaciones requiere analizar la geometría del esquema en lugar de las conexiones entre componentes.

Una manera más simple es definir las posiciones absolutas de los puntos de conexión de cada componente y luego las relaciones estructurales se limitarán a igualar las posiciones de los puntos conectados.

Conexiones con Posiciones Absolutas

Siguiendo esta idea, el modelo del amortiguador debería ser

$$\begin{aligned} b\ v_{\mathrm{rel}_a}(t) - F_a(t) &= 0 \\ \dot{x}_{\mathrm{rel}_a}(t) - v_{\mathrm{rel}_a}(t) &= 0 \\ x_{\mathrm{rel}_a}(t) - x_{a_1}(t) + x_{a_2}(t) &= 0 \end{aligned} \tag{4.28}$$

donde $x_{a_1}(t)$ y $x_{a_2}(t)$ son las posiciones de los extremos del amortiguador. Similarmente, el modelo del resorte será

$$\begin{aligned} k\ x_{\mathrm{rel}_r}(t) - F_r(t) &= 0 \\ x_{\mathrm{rel}_r}(t) + L_0 - x_{r_1}(t) + x_{r_2}(t) &= 0 \end{aligned} \tag{4.29}$$

donde $x_{r_1}(t)$ y $x_{r_2}(t)$ son las posiciones de los extremos del resorte y L_0 es la longitud en reposo del resorte. Luego, al conectar ambas componentes la ecuación estructural que vincula las posiciones será simplemente:

$$x_{a_1}(t) - x_{r_1}(t) = 0$$

Conexiones con Posiciones Absolutas

- Al trabajar con posiciones absolutas, tendremos además que fijar posiciones de referencia.
- Esto se puede hacer con un componente que denominaremos punto fijo que podrá modelar una pared, piso, o en general cualquier posición fija respecto al eje de coordenadas.
- Esto es análogo a lo que hicimos al utilizar potenciales absolutos en los circuitos.
- El precio que pagaremos por esta simplificación será que tendremos muchas variables algebraicas (con muchos alias y ecuaciones triviales).
- Esto no será un problema cuando trabajemos con lenguajes de modelado orientados a objetos como Modelica.

Organización de la Presentación

Modelos Mecánicos Rotacionales

Los modelos rotacionales siguen esencialmente las mismas leyes que los traslacionales cambiando las posiciones y velocidades por ángulos y velocidades angulares y la masa por el momento de inercia.

Componentes y Relaciones Constitutivas

El esquema de la Fig.4.10 muestra un sistema mecánico rotacional que tiene dos inercias con fricción contra un marco fijo, una caja de reducción y un resorte de torsión.

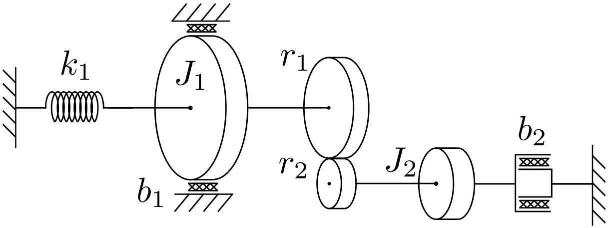


Figura 4.10: Modelo mecánico rotacional

Inercia

Análoga a la masa traslacional, puede modelarse mediante la segunda ley de Newton en variables angulares:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}(t) &= \omega(t) \\ J\,\dot{\omega}(t) &= \tau_J(t) \end{aligned} \tag{4.30}$$

donde $\theta(t)$ y $\omega(t)$ representan la posición y velocidad angular, τ_J es el torque neto aplicado y J es el parámetro que representa el momento de inercia.

Resorte de torsión

Análogo al resorte de la mecánica traslacional, se puede caracterizar por la siguiente relación constitutiva para el caso lineal:

$$k\ \theta_{\mathrm{rel}_r}(t) - \tau_r(t) = 0 \tag{4.31}$$

donde $\theta_{\mathrm{rel}_r}(t)$ es la deformación angular entre los extremos del resorte y $\tau_r(t)$ es el torque que se ejerce sobre dichos extremos. En un caso general tendremos una relación estática genérica entre torque y ángulo:

$$g(\theta_{\mathrm{rel}_r}(t), \tau_r(t)) = 0 \tag{4.32}$$

Amortiguador Rotacional

Similar al amortiguador traslacional, para el caso lineal está caracterizado por la relación constitutiva:

$$b\,\omega_b(t) - \tau_b(t) = 0 \tag{4.33}$$

donde $\omega_b(t)$ es la velocidad angular a la que se produce la fricción y $\tau_b(t)$ es el torque correspondiente. En un caso no lineal, la Ec.(4.33) toma la forma

$$g(\omega_b(t), \tau_b(t)) = 0 \tag{4.34}$$

Al igual que en el caso traslacional, podemos explicitar el ángulo para que las relaciones estructurales vinculen los mismos agregando la ecuación

$$\dot{\theta}_b(t) - \omega_b(t) = 0 \tag{4.35}$$

Caja Reductora

La caja reductora es un elemento de tipo transformador que vincula velocidades (o posiciones) y torques idealmente sin almacenar ni consumir energía y sus relaciones constitutivas son:

$$\begin{aligned} \frac{r_1}{r_2}\,\omega_1(t) - \omega_2(t) &= 0 \\ \tau_1(t) - \frac{r_1}{r_2}\,\tau_2(t) &= 0 \end{aligned} \tag{4.36}$$

donde $\omega_1(t)$ y $\omega_2(t)$ son las velocidades angulares a ambos lados de la caja siendo $\tau_1(t)$ y $\tau_2(t)$ los torques correspondientes.

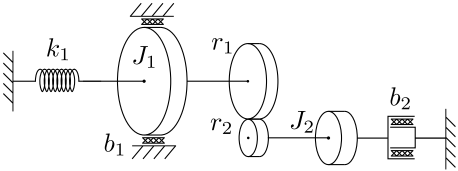
- El cociente $\frac{r_1}{r_2}$ es la relación de transformación y el hecho que sea inversa en el torque respecto de la velocidad implica que la potencia a ambos lados de la caja es idéntica.
- Si decidimos utilizar posiciones para las relaciones estructurales, se puede reemplazar las velocidades angulares $\omega_i(t)$ por los ángulos $\theta_i(t)$ en la Ec.(4.36).

Relaciones Estructurales

En cuanto a las relaciones estructurales, valen las mismas consideraciones que en la mecánica traslacional:

- Se igualan las posiciones o velocidades al conectar dos componentes.
- La suma de todos los torques conectados a un mismo punto es cero.

Ejemplo



Relaciones constitutivas

$$\dot{\theta}_1(t) - \omega_1(t) = 0 \tag{4.37a}$$

$$J_1\ \dot{\omega}_1(t) - \tau_{J_1}(t) = 0 \tag{4.37b}$$

$$\dot{\theta}_2(t) - \omega_2(t) = 0 \tag{4.37c}$$

$$J_2\ \dot{\omega}_2(t) - \tau_{J_2}(t) = 0 \tag{4.37d}$$

$$k\ \theta_{\mathrm{rel}_r}(t) - \tau_r(t) = 0 \tag{4.37e}$$

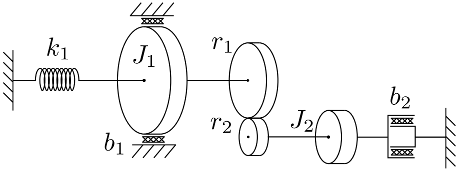
$$b_1\ \omega_{b_1}(t) - \tau_{b_1}(t) = 0 \tag{4.37f}$$

$$b_2\ \omega_{b_2}(t) - \tau_{b_2}(t) = 0 \tag{4.37g}$$

$$\frac{r_1}{r_2}\ \omega_{r_1}(t) - \omega_{r_2}(t) = 0 \tag{4.37h}$$

$$\tau_{r_1}(t) - \frac{r_1}{r_2}\ \tau_{r_2}(t) = 0 \tag{4.37i}$$

Ejemplo



Relaciones estructurales

$$\theta_1(t) - \theta_{\mathrm{rel}_r}(t) = 0 \quad (4.37a)$$

$$\omega_1(t) - \omega_{b_1}(t) = 0 \quad (4.37b)$$

$$\omega_1(t) - \omega_{r_1}(t) = 0 \quad (4.37c)$$

$$\omega_2(t) - \omega_{r_2}(t) = 0 \quad (4.37d)$$

$$\omega_2(t) - \omega_{b_2}(t) = 0 \quad (4.37e)$$

$$\tau_r(t) + \tau_{b_1}(t) + \tau_{r_1}(t) + \tau_{J_1}(t) = 0 \quad (4.37f)$$

$$\tau_{b_2}(t) + \tau_{r_2}(t) + \tau_{J_2}(t) = 0 \quad (4.37g)$$

Ejemplo

$$\begin{aligned}
\dot{\theta}_1(t) - \omega_1(t) &= 0 \\
J_1\ \dot{\omega}_1(t) - \tau_{J_1}(t) &= 0 \\
\dot{\theta}_2(t) - \omega_2(t) &= 0 \\
J_2\ \dot{\omega}_2(t) - \tau_{J_2}(t) &= 0 \\
k\ \theta_{\mathrm{rel}_r}(t) - \tau_r(t) &= 0 \\
b_1\ \omega_{b_1}(t) - \tau_{b_1}(t) &= 0 \\
b_2\ \omega_{b_2}(t) - \tau_{b_2}(t) &= 0 \\
\frac{r_1}{r_2}\ \omega_{r_1}(t) - \omega_{r_2}(t) &= 0 \\
\tau_{r_1}(t) - \frac{r_1}{r_2}\ \tau_{r_2}(t) &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta_1(t) - \theta_{\mathrm{rel}_r}(t) &= 0 \\
\omega_1(t) - \omega_{b_1}(t) &= 0 \\
\omega_1(t) - \omega_{r_1}(t) &= 0 \\
\omega_2(t) - \omega_{r_2}(t) &= 0 \\
\omega_2(t) - \omega_{b_2}(t) &= 0 \\
\tau_r(t) + \tau_{b_1}(t) + \tau_{r_1}(t) + \tau_{J_1}(t) &= 0 \\
\tau_{b_2}(t) + \tau_{r_2}(t) + \tau_{J_2}(t) &= 0
\end{aligned}$$

- Hay índice alto (4 estados aparentes pero $\omega_1(t)$ y $\omega_2(t)$ están relacionadas por la caja reductora.)

Ejemplo

$$
\begin{aligned}
\dot{\theta}_1(t) - \omega_1(t) &= 0 \\
J_1\ \dot{\omega}_1(t) - \tau_{J_1}(t) &= 0 \\
\dot{\theta}_2(t) - \omega_2(t) &= 0 \\
J_2\ \dot{\omega}_2(t) - \tau_{J_2}(t) &= 0 \\
k\ \theta_{\mathrm{rel}_r}(t) - \tau_r(t) &= 0 \\
b_1\ \omega_{b_1}(t) - \tau_{b_1}(t) &= 0 \\
b_2\ \omega_{b_2}(t) - \tau_{b_2}(t) &= 0 \\
\frac{r_1}{r_2}\ \omega_{r_1}(t) - \omega_{r_2}(t) &= 0 \\
\tau_{r_1}(t) - \frac{r_1}{r_2}\ \tau_{r_2}(t) &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\theta_1(t) - \theta_{\mathrm{rel}_r}(t) &= 0 \\
\omega_1(t) - \omega_{b_1}(t) &= 0 \\
\omega_1(t) - \omega_{r_1}(t) &= 0 \\
\omega_2(t) - \omega_{r_2}(t) &= 0 \\
\omega_2(t) - \omega_{b_2}(t) &= 0 \\
\tau_r(t) + \tau_{b_1}(t) + \tau_{r_1}(t) + \tau_{J_1}(t) &= 0 \\
\tau_{b_2}(t) + \tau_{r_2}(t) + \tau_{J_2}(t) &= 0
\end{aligned}
$$

- Si aplicamos Pantelides, llegamos a un modelo de orden 3 con variables de estado $\omega_1(t)$, $\theta_1(t)$ y $\theta_2(t)$.

Ejemplo

$$\begin{aligned}
\dot{\theta}_1(t) - \omega_1(t) &= 0 \\
J_1\ \dot{\omega}_1(t) - \tau_{J_1}(t) &= 0 \\
\dot{\theta}_2(t) - \omega_2(t) &= 0 \\
J_2\ \dot{\omega}_2(t) - \tau_{J_2}(t) &= 0 \\
k\ \theta_{\mathrm{rel}_r}(t) - \tau_r(t) &= 0 \\
b_1\ \omega_{b_1}(t) - \tau_{b_1}(t) &= 0 \\
b_2\ \omega_{b_2}(t) - \tau_{b_2}(t) &= 0 \\
\frac{r_1}{r_2}\ \omega_{r_1}(t) - \omega_{r_2}(t) &= 0 \\
\tau_{r_1}(t) - \frac{r_1}{r_2}\ \tau_{r_2}(t) &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta_1(t) - \theta_{\mathrm{rel}_r}(t) &= 0 \\
\omega_1(t) - \omega_{b_1}(t) &= 0 \\
\omega_1(t) - \omega_{r_1}(t) &= 0 \\
\omega_2(t) - \omega_{r_2}(t) &= 0 \\
\omega_2(t) - \omega_{b_2}(t) &= 0 \\
\tau_r(t) + \tau_{b_1}(t) + \tau_{r_1}(t) + \tau_{J_1}(t) &= 0 \\
\tau_{b_2}(t) + \tau_{r_2}(t) + \tau_{J_2}(t) &= 0
\end{aligned}$$

- En realidad el sistema es de orden 2 pero no pusimos ninguna relación entre $\theta_1(t)$ y $\theta_2(t)$.

Ejemplo

$$
\begin{aligned}
\dot{\theta}_1(t) - \omega_1(t) &= 0 \\
J_1\ \dot{\omega}_1(t) - \tau_{J_1}(t) &= 0 \\
\dot{\theta}_2(t) - \omega_2(t) &= 0 \\
J_2\ \dot{\omega}_2(t) - \tau_{J_2}(t) &= 0 \\
k\ \theta_{\mathrm{rel}_r}(t) - \tau_r(t) &= 0 \\
b_1\ \omega_{b_1}(t) - \tau_{b_1}(t) &= 0 \\
b_2\ \omega_{b_2}(t) - \tau_{b_2}(t) &= 0 \\
\frac{r_1}{r_2}\ \omega_{r_1}(t) - \omega_{r_2}(t) &= 0 \\
\tau_{r_1}(t) - \frac{r_1}{r_2}\ \tau_{r_2}(t) &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\theta_1(t) - \theta_{\mathrm{rel}_r}(t) &= 0 \\
\omega_1(t) - \omega_{b_1}(t) &= 0 \\
\omega_1(t) - \omega_{r_1}(t) &= 0 \\
\omega_2(t) - \omega_{r_2}(t) &= 0 \\
\omega_2(t) - \omega_{b_2}(t) &= 0 \\
\tau_r(t) + \tau_{b_1}(t) + \tau_{r_1}(t) + \tau_{J_1}(t) &= 0 \\
\tau_{b_2}(t) + \tau_{r_2}(t) + \tau_{J_2}(t) &= 0
\end{aligned}
$$

- Es conveniente utilizar los ángulos para las relaciones estructurales.

Organización de la Presentación

Modelos Roto-Traslacionales

- Combinan componentes traslacionales y rotacionales.
- Los componentes novedosos serán los que ejerzan de interfaz entre ambos dominios.
- Estos serán de tipo transformador, ya que no almacenarán ni consumirán energía.

Ejemplo Roto-Traslacional

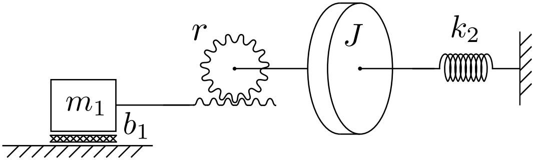


Figura 4.11: Sistema Roto-Traslacional

Vemos en este sistema un nuevo componente denominado piñón-cremallera.

Piñón-Cremallera

El mecanismo piñón–cremallera que puede caracterizarse por la siguiente ley:

$$\begin{aligned} r\ \omega(t) - v(t) &= 0 \\ \tau(t) - r\ F(t) &= 0 \end{aligned} \tag{4.38}$$

Si usamos las posiciones para las relaciones estructurales, resulta:

$$\begin{aligned} r\ \theta(t) - x(t) + L_0 &= 0 \\ \tau(t) - r\ F(t) &= 0 \end{aligned} \tag{4.39}$$

donde L_0 es la posición $x(t)$ de la cremallera cuando el ángulo es $\theta(t) = 0$.

Otros componentes rototraslacionales como una polea simple obedecen a las mismas relaciones constitutivas.

Sistema Biela-Manivela

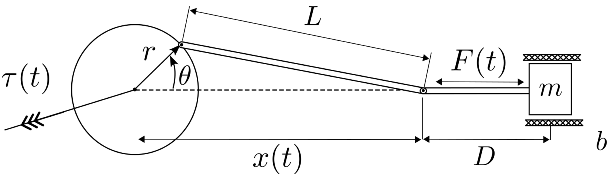


Figura 4.12: Sistema Roto-Traslacional Biela-Manivela

Usando el Teorema del Coseno obtenemos

$$x(t)^2 + r^2 - 2\ r\ x(t)\ \cos(\theta(t)) = L^2 \tag{4.40}$$

lo que vincula las posiciones. Además, como no se consume potencia,

$$\tau(t)\ \omega(t) - F(t)\ v(t) = 0 \tag{4.41}$$

lo que vincula la fuerza y el torque.

Sistema Biela-Manivela

La segunda ecuación tiene problemas cuando las velocidades son nulas ya que no establece relación entre fuerza y torque. Para subsanar esto derivamos la Ec.(4.40) para encontrar la relación entre $v(t)$ y $\omega(t)$:

$$2\ x(t)\ v(t) - 2\ r\ v(t)\ \cos(\theta) + 2\ r\ x(t)\ \sin(\theta)\ \omega(t) = 0 \implies$$

$$(x(t) - r\ \cos(\theta))\ v(t) + r\ x(t)\ \sin(\theta)\ \omega(t) = 0 \implies$$

$$v(t) = -\frac{r\ x(t)\ \sin(\theta)}{x(t) - r\ \cos(\theta)}\ \omega(t)$$

y reemplazando en la Ec.(4.41) se obtiene

$$\tau(t)\ (x(t) - r\ \cos(\theta)) + F(t)\ (r\ x(t)\ \sin(\theta)) = 0 \qquad (4.42)$$

que junto a la Ec.(4.40) constituyen las relaciones estructurales del componente.

Biela-Manivela

Las relaciones constitutivas de un sistema biela-manivela son entonces

$$x(t)^2 + r^2 - 2\ r\ x(t)\ \cos(\theta(t)) = L^2$$
$$\tau(t)\ (x(t) - r\ \cos(\theta)) + F(t)\ (r\ x(t)\ \sin(\theta)) = 0$$

- El elemento es un transformador, pero con una relación de transformación no lineal.
- Dado el ángulo $\theta(t)$ queda determinada la posición $x(t)$ pero no al revés.
- Convendrá entonces usar las variables angulares como estados ante un problema de índice alto.

Organización de la Presentación

Mecánica Planar

- Cuando analizamos los componentes mecánico-traslacionales, lo hicimos asumiendo que el movimiento se realizaba en una única dimensión.
- En la mecánica planar se asume que los objetos se pueden desplazar en dos dimensiones, pudiendo eventualmente rotar sobre sus ejes (ejes perpendiculares al plano de movimiento).
- Por el momento, consideraremos sólo la presencia de masas puntuales.
- En este caso, las leyes serán esencialmente las mismas de la mecánica traslacional, pero para ambas dimensiones.

Componentes básicos y relaciones constitutivas

La Figura muestra el esquema de un péndulo, que consiste en una masa puntual m y una barra rígida sin masa de longitud L.

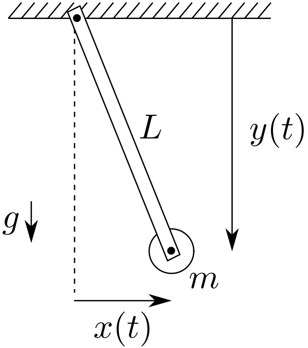


Figura 4.13: Péndulo simple

Masa Puntual:

La masa puntual se puede caracterizar por las siguientes relaciones constitutivas:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) - v_x(t) &= 0 \\ \dot{y}(t) - v_y(t) &= 0 \\ m\ \dot{v}_x(t) - F_x(t) &= 0 \\ m\ \dot{v}_y(t) - F_y(t) &= 0 \end{aligned} \tag{4.43}$$

que son una extensión directa a dos dimensiones del caso de la masa que se desplaza en una dimensión.

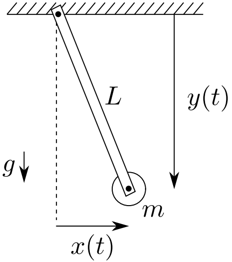
Fuente de Fuerza:

Representando la fuerza de la gravedad, podemos caracterizar una fuente ideal de fuerza mediante las relaciones constitutivas:

$$
\begin{aligned}
F_{x_g}(t) &= 0 \\
F_{y_g}(t) + m\,g &= 0
\end{aligned}
\tag{4.44}
$$

Barra rígida sin masa

Se puede representar la barra rígida mediante las ecuaciones:

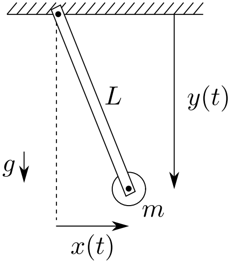


$$\begin{aligned} L\ \sin(\theta) - (x_2(t) - x_1(t)) &= 0 \\ L\ \cos(\theta) - (y_2(t) - y_1(t)) &= 0 \\ F_{x_1}(t) - F(t)\ \sin(\theta) &= 0 \\ F_{y_1}(t) - F(t)\ \cos(\theta) &= 0 \\ F_{x_1}(t) + F_{x_2}(t) &= 0 \\ F_{y_1}(t) + F_{y_2}(t) &= 0 \\ \dot{\theta}(t) &= \omega \end{aligned} \tag{4.45}$$

- $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son las posiciones horizontales de cada extremo.
- $y_1(t)$ e $y_2(t)$ son las posiciones verticales de cada extremo.

Barra rígida sin masa

Se puede representar la barra rígida mediante las ecuaciones:

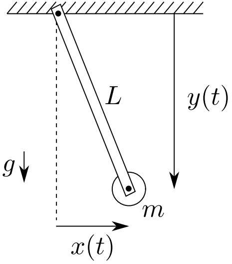


$$
\begin{aligned}
L\ \sin(\theta) - (x_2(t) - x_1(t)) &= 0 \\
L\ \cos(\theta) - (y_2(t) - y_1(t)) &= 0 \\
F_{x_1}(t) - F(t)\ \sin(\theta) &= 0 \\
F_{y_1}(t) - F(t)\ \cos(\theta) &= 0 \\
F_{x_1}(t) + F_{x_2}(t) &= 0 \\
F_{y_1}(t) + F_{y_2}(t) &= 0 \\
\dot{\theta}(t) &= \omega
\end{aligned}
\tag{4.45}
$$

- El ángulo $\theta(t)$ es el que forma la barra con la dirección vertical.
- La fuerza $F(t)$ es la que transmite la barra en sentido longitudinal.

Barra rígida sin masa

Se puede representar la barra rígida mediante las ecuaciones:

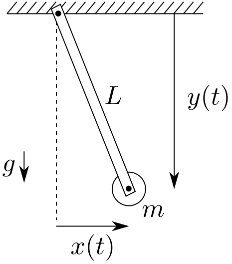


$$\begin{aligned}
L\ \sin(\theta) - (x_2(t) - x_1(t)) &= 0 \\
L\ \cos(\theta) - (y_2(t) - y_1(t)) &= 0 \\
F_{x_1}(t) - F(t)\ \sin(\theta) &= 0 \\
F_{y_1}(t) - F(t)\ \cos(\theta) &= 0 \\
F_{x_1}(t) + F_{x_2}(t) &= 0 \\
F_{y_1}(t) + F_{y_2}(t) &= 0 \\
\dot{\theta}(t) &= \omega
\end{aligned} \tag{4.45}$$

- $F_{x_1}(t)$ y $F_{x_2}(t)$ son las fuerzas que transmiten los extremos en dirección horizontal.

Barra rígida sin masa

Se puede representar la barra rígida mediante las ecuaciones:

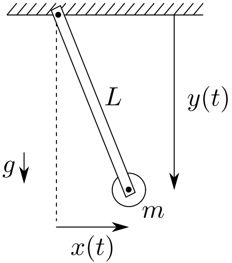


$$\begin{aligned} L\ \sin(\theta) - (x_2(t) - x_1(t)) &= 0 \\ L\ \cos(\theta) - (y_2(t) - y_1(t)) &= 0 \\ F_{x_1}(t) - F(t)\ \sin(\theta) &= 0 \\ F_{y_1}(t) - F(t)\ \cos(\theta) &= 0 \\ F_{x_1}(t) + F_{x_2}(t) &= 0 \\ F_{y_1}(t) + F_{y_2}(t) &= 0 \\ \dot{\theta}(t) &= \omega \end{aligned} \tag{4.45}$$

- $F_{y_1}(t)$ y $F_{y_2}(t)$ son las fuerzas que transmiten los extremos en dirección vertical.

Barra rígida sin masa

Se puede representar la barra rígida mediante las ecuaciones:

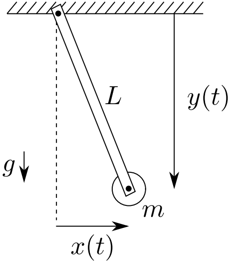


$$
\begin{aligned}
L\ \sin(\theta) - (x_2(t) - x_1(t)) &= 0 \\
L\ \cos(\theta) - (y_2(t) - y_1(t)) &= 0 \\
F_{x_1}(t) - F(t)\ \sin(\theta) &= 0 \\
F_{y_1}(t) - F(t)\ \cos(\theta) &= 0 \\
F_{x_1}(t) + F_{x_2}(t) &= 0 \\
F_{y_1}(t) + F_{y_2}(t) &= 0 \\
\dot{\theta}(t) &= \omega
\end{aligned}
\tag{4.45}
$$

La inclusión de la velocidad angular no es estrictamente necesaria, pero permitirá utilizar θ como variable de estado, lo que será conveniente.

Relaciones Estructurales

El modelo del péndulo puede completarse con las siguientes relaciones estructurales:



$$\begin{aligned} x_1(t) &= 0 \\ y_1(t) &= 0 \\ x_2(t) - x(t) &= 0 \\ y_2(t) - y(t) &= 0 \\ F_x(t) + F_{x_2}(t) + F_{x_g}(t) &= 0 \\ F_y(t) + F_{y_2}(t) + F_{y_g}(t) &= 0 \end{aligned} \qquad (4.46)$$

Estas junto a las Ecs.(4.43), (4.44) y (4.45) forman un sistema de 19 ecuaciones e incógnitas.

Puente Grúa

Usando los mismos componentes que en el péndulo y agregando una masa y amortiguador traslacional, podemos modelar un puente grúa:

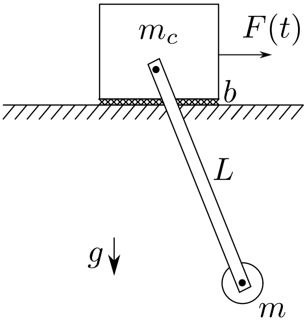


Figura 4.14: Puente grúa

Relaciones estructurales:

$$
\begin{aligned}
x_1(t) - x_m(t) &= 0 \\
y_1(t) &= 0 \\
x_2(t) - x(t) &= 0 \\
y_2(t) - y(t) &= 0 \\
F_x(t) + F_{x_2}(t) + F_{x_g}(t) &= 0 \\
F_y(t) + F_{y_2}(t) + F_{y_g}(t) &= 0 \\
x_m(t) - x_{\mathrm{rel}_a}(t) &= 0 \\
F_m(t) + F_{x_1}(t) + F_a(t) &= 0
\end{aligned}
\tag{4.47}
$$

Organización de la Presentación

Consideraciones sobre el Orden

- El orden será igual al número de condiciones iniciales que podamos asignar arbitrariamente.
- Asociado a cada posición que podamos asignar independientemente en el modelo, tenemos además la velocidad.

En principio, el orden es el doble de los grados de libertad del modelo.

- Esto vale siempre y cuando asociemos cada posición con una masa.
- En un punto de unión de dos o más elementos sin masa, en el mejor de los casos podemos asignar una única variable ya que aparecerán restricciones (suma de fuerzas nula implica restricciones entre posiciones y/o velocidades).

Organización de la Presentación

Sistemas Hidráulicos

Los modelos matemáticos de sistemas hidráulicos vinculan magnitudes correspondientes a presiones $P(t)$ y caudales $Q(t)$.

- Aparecerán también el volumen $V(t)$ y a veces el momento de presión $\Gamma(t)$, donde valen las relaciones:

$$\dot{V}(t) = Q(t); \quad \dot{\Gamma}(t) = P(t)$$

- Bajo ciertas hipótesis simplificatorias, estos sistemas se pueden analizar como circuitos hidráulicos análogos a los circuitos eléctricos.
- El caudal será análogo a la corriente, la presión al potencial, el volumen a la carga y el momento de presión al flujo magnético.

Generalmente trabajaremos con presiones manométricas, medidas respecto de la presión atmosférica.

Organización de la Presentación

Componentes Básicos y Relaciones Constitutivas

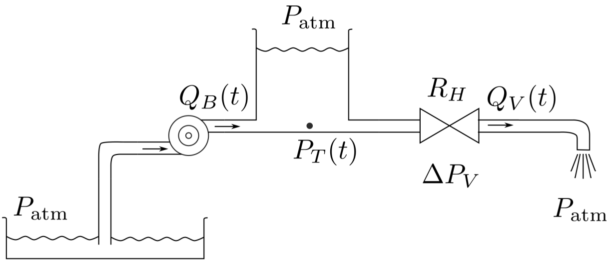


Figura 4.15: Sistema hidráulico simple

En el esquema podemos reconocer los siguientes componentes:

- Válvula, de parámetro R_H.
- Tanque.
- Fuente Ideal de Caudal.

Válvula

Representa el fenómeno de Resistencia Hidráulica y si suponemos que el componente es lineal tendremos la relación constitutiva

$$\Delta P_V(t) - R_H \; Q_V(t) = 0. \tag{4.48}$$

Generalmente las válvulas hidráulicas se modelan como elementos no lineales, donde la relación entre la diferencia de presión y caudal está dada por

$$Q_V(t) - C_v \sqrt{\Delta P_V} = 0,$$

o, para considerar la posibilidad de caudal en ambos sentidos,

$$Q_V(t) - C_v \sqrt{|\Delta P_V|}\, \mathrm{sign}(\Delta P_V) = 0. \tag{4.49}$$

Un caso más general aún está dado por

$$g(\Delta P_V(t), Q_V(t)) = 0. \tag{4.50}$$

Válvulas controladas

Las válvulas suelen controlarse con una variable de apertura $z(t)$:

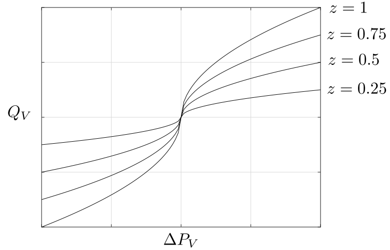


Figura 4.16: Característica de una Válvula Controlada

Esto puede representarse mediante una relación constitutiva:

$$Q_V(t) - C_v(z)\sqrt{|\Delta P_V|}\,\mathrm{sign}(\Delta P_V) = 0, \quad (4.51)$$

o más generalmente

$$g(\Delta P_V, Q_V(t), z(t)) = 0. \quad (4.52)$$

Tanque

Considerando presiones manométricas la presión en el fondo del tanque resulta:

$$P_T(t) = \rho \; g \; h_T(t) \tag{4.53}$$

donde $h_T(t)$ es la altura de la columna de agua, g es la aceleración de la gravedad y ρ es la densidad del agua (del orden de $1000 Kg/m^3$). Además,

$$h_T(t) = \frac{V_T(t)}{A} \tag{4.54}$$

donde $V_T(t)$ es el volumen del tanque y A es el área del tanque. Luego, las relaciones constitutivas tanque son:

$$\begin{aligned} \dot{V}_T(t) - Q_T(t) &= 0 \\ P_T(t) - \frac{\rho \; g}{A} \; V_T(t) &= 0 \end{aligned} \tag{4.55}$$

siendo $Q_T(t)$ el caudal neto que ingresa al tanque.

Tanque

- El componente definido por la Ec.(4.55) es lineal porque la presión depende linealmente de la altura en la Ec.(4.53) y la altura depende linealmente del volumen en la Ec.(4.54).
- Si se considera la compresibilidad del fluido o si el área del tanque no es constante con la altura la relación resulta no lineal.

En un caso general, por lo tanto, tendremos

$$\begin{aligned} \dot{V}_T(t) - Q_T(t) &= 0 \\ g(P_T(t), V_T(t)) &= 0. \end{aligned} \tag{4.56}$$

Bomba de Caudal

Una bomba ideal de caudal impone un caudal $Q_B(t)$ independiente de la diferencia de presión entre la entrada y la salida.
De esta forma, la relación constitutiva de la bomba ideal es

$$Q_B(t) - v(t) = 0 \tag{4.57}$$

donde $v(t)$ es una función conocida.

Organización de la Presentación

Relaciones Estructurales

De manera similar a lo que ocurre en los circuitos eléctricos, podemos obtener las relaciones estructurales con las siguientes reglas:

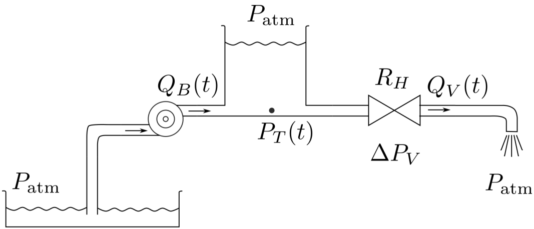
1. Todo lo que está conectado a un mismo punto tiene la misma presión.
2. La suma de los caudales entrantes a un punto es cero.

Con esto, para el sistema hidráulico de la Figura 4.15 podemos plantear las siguientes relaciones estructurales:

$$\begin{aligned} Q_B(t) - Q_V(t) - Q_T(t) &= 0 \\ P_T - \Delta P_V &= 0 \end{aligned} \tag{4.58}$$

Relaciones Estructurales

El sistema completo de DAEs resulta



$$
\begin{aligned}
\Delta P_V(t) - R_H\ Q_V(t) &= 0\\
\dot{V}_T(t) - Q_T(t) &= 0\\
P_T(t) - \frac{\rho\ g}{A}\ V_T(t) &= 0\\
Q_B(t) - v(t) &= 0\\
Q_B(t) - Q_V(t) - Q_T(t) &= 0\\
P_T - \Delta P_V &= 0
\end{aligned}
\tag{4.59}
$$

Esto constituye un sistema de 6 ecuaciones en 6 variables (5 algebraicas y una de estado).

Organización de la Presentación

Otros Componentes

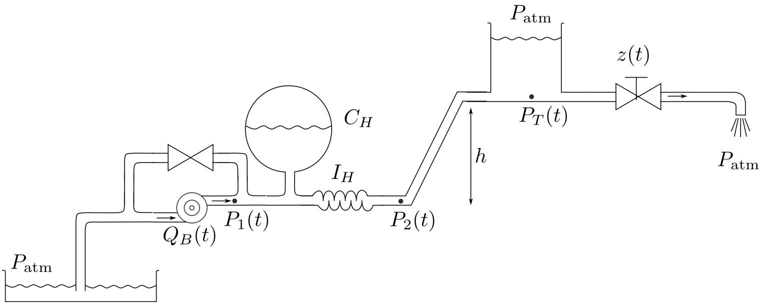


Figura 4.17: Sistema hidráulico con inertancia y columna de agua.

Encontramos aquí, además de los componentes ya vistos:

- Una columna de líquido de altura h.
- Una inertancia.
- Un acumulador hidráulico.

Columna de Líquido

Representa la diferencia de presión entre dos puntos debida al peso del líquido. Asumiendo que el fluido es incompresible, la diferencia de presión entre la parte inferior y la superior de la columna está dada por

$$P_{\mathrm{inf}}(t) - P_{\mathrm{sup}}(t) = \rho\ g\ h \tag{4.60}$$

lo que puede verse como una relación análoga a la de una fuente de tensión constante.

Inertancia

Modela la inercia de la masa de líquido. Su relación constitutiva es

$$
\begin{aligned}
\dot{\Gamma}_I(t) - \Delta P_I(t) &= 0 \\
\Gamma_I(t) - I_H \; Q_I(t) &= 0
\end{aligned}
\tag{4.61}
$$

- $\Delta P_I(t)$ es la diferencia de presión a ambos lados del componente.
- $\Gamma_I(t)$ es el momento de presión.
- $Q_I(t)$ es el caudal.
- I_H es un parámetro que se denomina inertancia

Este componente puede pensarse como análogo a un inductor eléctrico.

Acumulador Hidráulico

Modela algo similar a un tanque, excepto que el fluido se acumula aumentando la presión por la propia compresibilidad del fluido o por la de un gas que se encuentra confinado dentro del contenedor.
Las relaciones constitutivas son

$$\begin{aligned} \dot{V}_C(t) - Q_C(t) &= 0 \\ C_H\ P_C(t) - V_C(t) &= 0 \end{aligned} \tag{4.62}$$

para el caso lineal, lo que resulta análogo a un capacitor.

Organización de la Presentación

Consideraciones sobre el Orden

- Al igual que en los circuitos eléctricos, el orden de los modelos matemáticos de sistemas hidráulicos coincide en principio con el número de almacenadores de energía: tanques, inertancias y acumuladores hidráulicos.
- Sin embargo, al igual que en los circuitos, suele haber restricciones que reducen el orden.

Organización de la Presentación

Sistemas Térmicos

Los modelos matemáticos de los sistemas térmicos suelen ser de parámetros distribuidos, ya que en muchos casos no se puede ignorar la dependencia espacial de los fenómenos involucrados, en especial la difusión y la convección.

Difusión: Es la conducción de calor por diferencia de temperatura. Se representa mediante la Ecuación del Calor, que en una dimensión toma la forma:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \sigma \, \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \tag{4.63}$$

Convección: Es el transporte de calor por el movimiento de un fluido que se desplaza y se modela mediante la ecuación:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = -v \, \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \tag{4.64}$$

donde v representa la velocidad a la que se mueve el fluido (o algo proporcional a ella).

Sistemas Térmicos

- Aunque la difusión y la conducción ocurran distribuidos en el espacio, bajo ciertas hipótesis simplificatorias se pueden concentrar en uno o más puntos.
- Con este enfoque de parámetros concentrados veremos cómo modelar sistemas térmicos relativamente simples caracterizados por fenómenos de difusión, convección y radiación.
- En los modelos utilizaremos como variables descriptivas de las magnitudes del sistema:
    - la temperatura $T(t)$ (su unidad estará dada en grados Kelvin),
    - el calor $E(t)$ (en Joules),
    - el flujo de calor $q(t)$ (en Watts, es decir, calor por unidad de tiempo).

Organización de la Presentación

Componentes y Relaciones Constitutivas Básicas

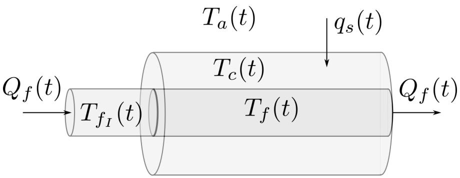


Figura 4.18: Colector Solar.

- El colector tiene temperatura $T_c(t)$ y recibe un flujo de calor $q_s(t)$ por radiación solar.
- Circula un caudal $Q_f(t)$ de fluido ingresando a una temperatura $T_{f_I}(t)$.
- Hay intercambio de calor por conducción entre el fluido y el colector.

Fenómenos del Modelo:

Capacidad Térmica: Almacenamiento de calor en el colector y el fluido.

Conducción: Desde el colector hacia el fluido y hacia el exterior.

Convección: Debida al transporte de calor por parte del fluido.

Radiación: Absorción y emisión de energía radiante.

Fuentes Ideales: de temperatura y de flujo de calor.

Capacidad Térmica

Cuando concentramos parámetros podemos dividir cada objeto en uno o más recintos con capacidad de almacenar calor, asumiendo que en el interior de cada recinto la temperatura es uniforme y obedece una relación constitutiva:

$$C\ \dot{T}(t) - q(t) = 0 \tag{4.65}$$

- $T(t)$ es la temperatura del recinto.
- $q(t)$ es el flujo neto de calor entrante al recinto.
- C es la capacidad térmica.

La capacidad térmica de un recinto puede calcularse a partir de la masa m del recinto y de la *capacidad calorífica específica* del material c según

$$C = m\ c \tag{4.66}$$

Notar la analogía entre la capacidad térmica y la capacidad eléctrica.

Capacidad Térmica

Suponiendo que el fluido del ejemplo tiene densidad ρ_f y capacidad calorífica específica c_f, y que el recinto tiene un volumen V_f, se obtiene:

$$C_f = \rho_f \; V_f \; c_f \tag{4.67}$$

- Cuando se considera relevante la dependencia de la capacidad térmica con la temperatura, la ley de la Ec.(4.65) se torna no lineal.
- Además, en ocasiones se modela también la dependencia de la capacidad térmica con la presión.

Conducción

Al considerar parámetros concentrados, el fenómeno de conducción o difusión de calor se reduce a un flujo de temperatura entre recintos proporcional a la diferencia de temperatura entre los mismos:

$$\Delta T(t) - R\, q(t) = 0 \tag{4.68}$$

- $\Delta T(t)$ es la diferencia de temperatura,
- $q(t)$ es el flujo de calor,
- R es la Resistencia Térmica.

La resistencia térmica depende de la conductividad de los materiales y de la geometría de los recintos y su interfaz.

Si consideramos la conducción a través de un material de espesor e, área A y conductividad λ, la resistencia térmica resulta:

$$R_T = \frac{e}{\lambda\, A} \tag{4.69}$$

Convección

El transporte de materia entre recintos se corresponde al fenómeno de convección, y el intercambio de calor ocurre porque la materia ingresa o egresa llevando su calor. Cuando un fluido ingresa a un recinto con un caudal $Q(t)$ a una temperatura $T(t)$, el flujo de calor es:

$$q(t) = \rho\ c\ T(t)\ Q(t) \tag{4.70}$$

- ρ es la densidad y c la capacidad calorífica específica del fluido.
- En el colector de la Figura 4.18 hay dos componentes de convección: uno debido al caudal entrante al recinto y el otro debido al caudal saliente.
- En modelos más detallados los caños se suelen dividir en secciones conformando varios recintos consecutivos, de manera que el flujo de calor saliente de un recinto es el que entra al siguiente.

Radiación

El fenómeno de radiación se corresponde a la emisión y absorción de energía radiante por parte de los átomos y moléculas, gobernada por la ley de Stephan-Boltzmann, que establece que la energía emitida por una superficie es proporcional a la cuarta potencia de la temperatura absoluta:

$$q(t) = \sigma\ \varepsilon\ A\ T(t)^4 \tag{4.71}$$

- σ es la constante de Stephan-Boltzmann.
- ε es el coeficiente de emisión de la superficie.
- $T(t)$ es la temperatura absoluta en grados Kelvin.

En el caso del colector solar, podemos modelar entonces el intercambio de calor por radiación entre el ambiente y el colector mediante una ecuación

$$q_{ca}(t) = \alpha\ (T_c(t)^4 - T_a(t)^4) \tag{4.72}$$

para cierta constante α.

Fuentes Ideales

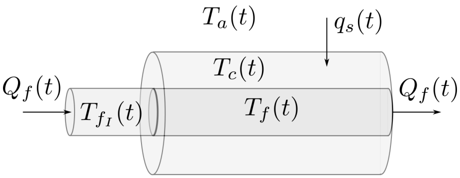
Fuente Ideal de Temperatura: Podemos considerar la temperatura ambiente $T_a(t)$ como una fuente ideal, ya que se puede asumir que su evolución es independiente de lo que ocurre en el colector.

Fuente Ideal de Flujo de Calor: El flujo de calor que se recibe por radiación solar puede considerarse una fuente ideal, ya que el mismo es independiente de lo que ocurre en el colector.

Notar la analogía con fuentes ideales de tensión y corriente.

Organización de la Presentación

Relaciones Estructurales



- Las temperaturas resultan análoga a los potenciales, por lo que se igualan en un punto.
- Los flujos de calor son análogos a las corrientes, por lo que suman cero en un punto.

$$
\begin{aligned}
C_f\ \dot{T}_f(t) - q_f(t) &= 0 \\
C_c\ \dot{T}_c(t) - q_c(t) &= 0 \\
\Delta T_{cf}(t) - R_{cf}\ q_{cf}(t) &= 0 \\
\Delta T_{ca}(t) - R_{ca}\ q_{ca}(t) &= 0 \\
q_i(t) - \rho_f\ c_f\ T_{f_I}(t)\ Q_f(t) &= 0 \\
q_o(t) - \rho_f\ c_f\ T_f(t)\ Q_f(t) &= 0 \\
T_a(t) - v_1(t) &= 0 \\
T_{F_I}(t) - v_2(t) &= 0 \\
q_s(t) - v_3(t) &= 0 \\
Q_f(t) - v_4(t) &= 0 \\
\Delta T_{cf}(t) - (T_c(t) - T_f(t)) &= 0 \\
\Delta T_{ca}(t) - (T_c(t) - T_a(t)) &= 0 \\
q_f(t) - (q_{cf}(t) + q_i(t) - q_o(t)) &= 0 \\
q_c(t) - (q_s(t) - q_{cf}(t) - q_{ca}(t)) &= 0
\end{aligned}
\tag{4.73}
$$

Discretización Espacial

- En muchas ocasiones el problema que queremos resolver hace que no podamos ignorar la distribución espacial de los fenómenos térmicos.
- En esos casos habría que usar ecuaciones en derivadas parciales como la Ec.(4.63) o la Ec.(4.64).
- Para simular ecuaciones en derivadas parciales, hay que discretizar no sólo el tiempo, sino también el espacio.
- Para esto último puede usarse el Método de Líneas que transforma las ecuaciones en derivadas parciales en sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.
- El resultado será equivalente a dividir cada dominio espacial en muchos recintos donde podemos utilizar lo que vimos para sistemas de parámetros concentrados.

Discretización Espacial

Consideremos por ejemplo nuevamente el sistema de la Fig.4.18 pero asumiendo ahora que la temperatura del fluido no es uniforme, sino que se va calentando a medida que circula por el colector. Para esto:

- Dividimos el caño en N recintos iguales con temperaturas $T_{f_1}(t), T_{f_2}(t), \ldots, T_{f_N}(t)$.
- La capacidad térmica de cada recinto, recordando que es proporcional a la masa, será C_f/N.
- La resistencia térmica entre cada recinto y el colector será $N\ R_{cf}$ ya que la misma es inversamente proporcional a la superficie de contacto entre los recintos.
- Habrá convección entre recintos consecutivos, de manera que el flujo de calor entrante en un recinto $q_{i_j}(t)$ será el saliente del anterior $q_{o_{j-1}}(t)$.

Discretización Espacial

Con esto, las ecuaciones asociadas al j-ésimo recinto serán:

$$\begin{aligned}
\frac{C_f}{N}\ \dot{T}_{f_j}(t) - q_{f_j}(t) = 0 \\
\Delta T_{cf_j}(t) - N\ R_{cf}\ q_{cf_j}(t) = 0 \\
q_{o_j}(t) - \rho_f\ c_f\ T_{f_j}(t)\ Q_f(t) = 0 \\
\Delta T_{cf_j}(t) - (T_c(t) - T_{f_j}(t)) = 0 \\
q_{f_j}(t) - (q_{cf_j}(t) + q_{i_j}(t) - q_{o_j}(t)) = 0 \\
q_{i_j}(t) - q_{o_{j-1}}(t) = 0
\end{aligned} \tag{4.74}$$

con la salvedad que la última ecuación sólo vale para j entre 2 y N. Para $j = 1$ tenemos el flujo de convección de entrada:

$$q_{i_1}(t) - \rho_f\ c_f\ T_{f_l}(t)\ Q_f(t) = 0. \tag{4.75}$$

Las Ecs.(4.74)–(4.75) son $6\ N$ ecuaciones, resultando un sistema de $6\ N + 8$ ecuaciones en la Ec.(4.73).

Organización de la Presentación

Consideraciones Sobre el Orden y Analogías

En los modelos matemáticos a parámetros concentrados de sistemas térmicos, el orden resulta igual al número de recintos con capacidad de almacenar calor, es decir, es igual al número de capacitores térmicos.

- En teoría podría haber restricciones que hagan que el orden resulte menor, pero esto implicaría que haya recintos forzados a tener idéntica temperatura.
- Una singularidad de los sistemas térmicos es que carecen de fenómenos análogos a la inductancia. Hay una única forma de almacenar energía.
- Una consecuencia de que no haya fenómenos análogos a la inductancia es que en los modelos matemáticos puramente térmicos no puede haber modos oscilantes. Es decir, el comportamiento será siempre sobreamortiguado.

Organización de la Presentación

Sistemas Multidominio

- Hasta aquí vimos por separado modelos matemáticos que representan fenómenos en el dominio eléctrico, en el mecánicos, en el hidráulico y en el térmicos
- En la práctica, muchos de los sistemas de interés involucran fenómenos que se corresponden a más de un dominio.
- Estos fenómenos multidominio resultan en nuevos componentes, con sus correspondientes relaciones constitutivas, que ejercen de interfaz entre sub-modelos de cada dominio.

Sistemas Electro-Mecánicos

Motor de Corriente Continua con excitación constante:

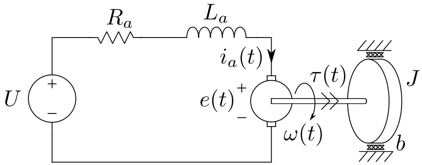


Figura 4.19: Motor de Corr. Continua

Relaciones constitutivas:

$$\begin{aligned} e(t) - K_m\ \omega(t) &= 0 \\ \tau(t) - K_m\ i_a(t) &= 0 \end{aligned} \qquad (4.76)$$

- $e(t)$ es la fuerza contraelectromotriz,
- $i_a(t)$ es la corriente de armadura,
- $\omega(t)$ es la velocidad angular
- $\tau(t)$ es el torque electromotriz.

Se transmite potencia sin que se pierda o almacene energía, ya que

$$P_{\mathrm{elec}}(t) = e(t)\ i_a(t) = \tau(t)\ \omega(t) = P_{\mathrm{mec}}(t) \qquad (4.77)$$

Sistemas Electro-Mecánicos

Motor de Corriente Continua con excitación independiente:

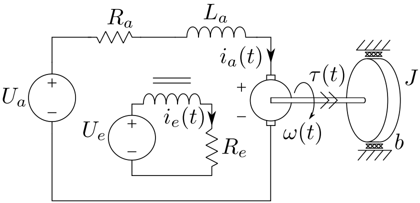


Figura 4.20: Motor de Corriente Continua con Excitación Independiente

Relaciones constitutivas:

$$\begin{aligned} e(t) - K\ \phi_e(t)\ \omega(t) &= 0 \\ \tau(t) - K\ \phi_e(t)\ i_a(t) &= 0 \end{aligned} \tag{4.78}$$

donde $\phi_e(t)$ es el flujo de excitación.

La relación de la Ec.(4.78) se complementa con la del inductor no lineal:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_e(t) - u_e(t) &= 0 \\ g(i_e(t)) - \phi_e(t) &= 0 \end{aligned} \tag{4.79}$$

Sistemas Hidráulico-Mecánicos

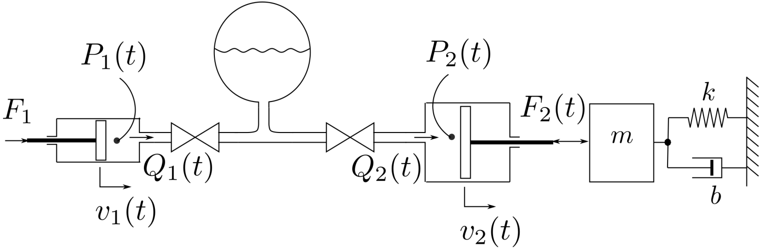


Figura 4.21: Sistema Hidráulico-Mecánico

Relaciones constitutivas del pistón:

$$\begin{aligned} Q(t) - A\ v(t) &= 0 \\ F(t) - A\ P(t) &= 0 \end{aligned} \tag{4.80}$$

Como en todo elemento transformador, se preserva la potencia.

Sistemas Hidráulico-Mecánicos

- Dado que en el dominio mecánico conviene utilizar las posiciones para plantear las relaciones estructurales, generalmente complementaremos la Ecuación (4.80) con la relación $\dot{x}(t) - v(t) = 0$.
- En cualquier caso, las relaciones planteadas en términos de velocidad y caudal establecen una relación entre posición y volumen.
- Una implicancia de esto en el modelo de la Figura 4.21 es que la posición de ambos pistones y el volumen de líquido en el acumulador hidráulico están vinculados,

Componentes Modulados

- Hasta aquí vimos componentes de interfaz donde la vinculación implica intercambio de energía entre los dominios.
- Otra manera de interacción se da cuando un subsistema es afectado por otro, pero de manera unidireccional.
- Por ejemplo, en una válvula controlada la acción mecánica sobre la posición del vástago afecta la relación entre presión y caudal, pero no implica intercambio de energía entre los dominios.
- Es decir, lo que ocurre en el dominio hidráulico no carga a la parte mecánica. En tal caso, decimos que la válvula está modulada por el sistema mecánico.

Componentes Modulados

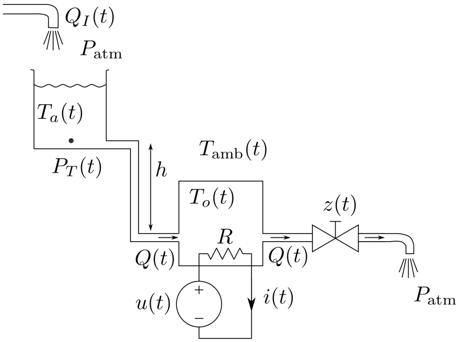


Figura 4.22: Sistema Hidráulico-Térmico-Eléctrico

Potencia Eléctrica: La potencia de la resistencia R actúa como fuente de flujo de calor en el sistema térmico según la ley:

$$q_R(t) - u_R(t)\ i_R(t) = 0$$

Convección: Siguiendo la ley de la Ec.(4.70), tenemos dos fenómenos de convección donde el flujo de calor depende del caudal.