

Técnicas Avanzadas de Modelado y Simulación

3. Causalización de Sistemas de DAEs

Ernesto Kofman

Departamento de Control, Escuela de Ingeniería Electrónica, Facultad de Ciencias Exactas,
Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario.
CIFASIS – CONICET

Organización de la Presentación

- 1 **Ordenamiento y Causalización de Ecuaciones**
 - Modelos Implícitos y Explícitos
 - Algoritmo de Ordenamiento Horizontal y Vertical
 - Eliminación de Ecuaciones Triviales
 - Obtención de las Ecuaciones de Estado
- 2 **Lazos Algebraicos**
 - Ejemplo Introdutorio
 - Algoritmo de Rasgado
 - Obtención de las Ecuaciones de Estado
- 3 **Sistemas de Índice Alto**
 - Ejemplo Introdutorio
 - Algoritmo de Pantelides
 - El índice de perturbación de una DAE
 - Elección de las Variables de Estado
- 4 **DAEs y Diagramas de Bloques**
 - Diagramas de Bloques y Relaciones Causales
 - Procedimiento para obtener un DB desde una DAE
 - Diagramas de Bloques y Lazos Algebraicos
 - Diagramas de Bloques y Sistemas de Índice Alto

Organización de la Presentación

- 1 **Ordenamiento y Causalización de Ecuaciones**
 - Modelos Implícitos y Explícitos
 - Algoritmo de Ordenamiento Horizontal y Vertical
 - Eliminación de Ecuaciones Triviales
 - Obtención de las Ecuaciones de Estado
- 2 **Lazos Algebraicos**
 - Ejemplo Introdutorio
 - Algoritmo de Rasgado
 - Obtención de las Ecuaciones de Estado
- 3 **Sistemas de Índice Alto**
 - Ejemplo Introdutorio
 - Algoritmo de Pantelides
 - El índice de perturbación de una DAE
 - Elección de las Variables de Estado
- 4 **DAEs y Diagramas de Bloques**
 - Diagramas de Bloques y Relaciones Causales
 - Procedimiento para obtener un DB desde una DAE
 - Diagramas de Bloques y Lazos Algebraicos
 - Diagramas de Bloques y Sistemas de Índice Alto

Organización de la Presentación

- 1 **Ordenamiento y Causalización de Ecuaciones**
 - Modelos Implícitos y Explícitos
 - Algoritmo de Ordenamiento Horizontal y Vertical
 - Eliminación de Ecuaciones Triviales
 - Obtención de las Ecuaciones de Estado
- 2 **Lazos Algebraicos**
 - Ejemplo Introdutorio
 - Algoritmo de Rasgado
 - Obtención de las Ecuaciones de Estado
- 3 **Sistemas de Índice Alto**
 - Ejemplo Introdutorio
 - Algoritmo de Pantelides
 - El índice de perturbación de una DAE
 - Elección de las Variables de Estado
- 4 **DAEs y Diagramas de Bloques**
 - Diagramas de Bloques y Relaciones Causales
 - Procedimiento para obtener un DB desde una DAE
 - Diagramas de Bloques y Lazos Algebraicos
 - Diagramas de Bloques y Sistemas de Índice Alto

Modelos Implícitos

Consideremos el circuito RLC con el sistema de DAEs que definen sus relaciones **constitutivas** y **estructurales**, donde $v(t)$ representa una función del tiempo conocida.

$$u_R(t) - R i_R(t) = 0 \quad (3.1a)$$

$$\dot{q}(t) - i_C(t) = 0 \quad (3.1b)$$

$$q(t) - C u_C(t) = 0 \quad (3.1c)$$

$$\dot{\phi}(t) - u_L(t) = 0 \quad (3.1d)$$

$$\phi(t) - L i_L(t) = 0 \quad (3.1e)$$

$$u_S(t) - v(t) = 0 \quad (3.1f)$$

$$u_L(t) + u_R(t) + u_C(t) - u_S(t) = 0 \quad (3.1g)$$

$$i_L(t) - i_R(t) = 0 \quad (3.1h)$$

$$i_C(t) - i_L(t) = 0 \quad (3.1i)$$

$$i_S(t) - i_R(t) = 0 \quad (3.1j)$$

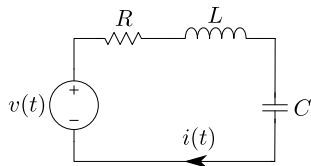


Figura 3.1: Circuito RLC Serie

Simulación de Modelos Implícitos

- Si quisiéramos simular este sistema con Forward Euler, tendríamos que implementar un algoritmo que **despeje** las derivadas de los estados.
- Calcular las derivadas implica resolver un **sistema de ecuaciones algebraicas** con **10** incógnitas.
- Este algoritmo debería ejecutarse cada vez que recalculamos las derivadas (en Forward Euler esto ocurriría una vez por paso).

Veremos dos funciones simples de Matlab/Octave que brindan una manera de realizar esto.

Modelo Implícito en Matlab/Octave

```

function res=circuit_dae(x,dx,a,t)
    R=1; C=1; L =1; % parametros
    q=x(1); phi=x(2); % estados
    der_q=dx(1); der_phi=dx(2); % derivadas de estados
    uR=a(1); iR=a(2); iC=a(3); uC=a(4); uL=a(5); iL=a(6);
    res=zeros(10,1); % residuo (debera ser cero)
    res(1) = uR - R * iR;
    res(2) = der_q - iC;
    res(3) = q - C * uC;
    res(4) = der_phi - uL;
    res(5) = phi - L * iL;
    res(6) = uS - sin(t);
    res(7) = uL + uR + uC - uS;
    res(8) = iL - iR;
    res(9) = iC - iL;
    res(10) = iS - iR;
end
    
```

Modelo Implícito en Matlab/Octave

La siguiente función sería vista como un modelo de **Ecuaciones de Estado**:

```
function dx=circuit_ode(x,t)
    F = @(z) circuit_dae(x,z(1:2),z(3:10),t);
    z0=zeros(10,1);
    z=fsolve(F,z0);
    dx=z(1:2);
end
```

y podemos entonces simular invocando:

```
[t,x]=feuler(@circuit_ode,[0;0],0.1,0,10);
plot (t,x)
```

Esto funcionará pero será **muy costoso** desde el punto de vista computacional.

Modelo Explícito

Nuestro objetivo entonces será **transformar** el sistema de DAEs en algo equivalente al sistema de Ecuaciones de Estado:

$$\begin{aligned}\dot{q}(t) &= \frac{1}{L} \phi(t) \\ \dot{\phi}(t) &= -\frac{1}{C} q(t) - \frac{R}{L} \phi(t) + v(t),\end{aligned}\tag{3.2}$$

Buscaremos tener expresiones explícitas para las derivadas de los estados en función de los propios estados y de las entradas.

Modelo Explícito

Una opción con expresiones **explícitas** es la siguiente, donde:

- El símbolo $:=$ indica una **asignación** (no una igualdad).
- En el lado izquierdo se calcula una variable que no fue calculada previamente.
- En el lado derecho se usan variables previamente calculadas o **estados**.

$$u_C(t) := \frac{q(t)}{C} \quad (3.3a)$$

$$i_L(t) := \frac{\phi(t)}{L} \quad (3.3b)$$

$$u_S(t) := v(t) \quad (3.3c)$$

$$i_R(t) := i_L(t) \quad (3.3d)$$

$$i_C(t) := i_L(t) \quad (3.3e)$$

$$i_S(t) := i_R(t) \quad (3.3f)$$

$$u_R(t) := R i_R(t) \quad (3.3g)$$

$$u_L(t) := u_S(t) - u_R(t) - u_C(t) \quad (3.3h)$$

$$\dot{q}(t) := i_C(t) \quad (3.3i)$$

$$\dot{\phi}(t) := u_L(t) \quad (3.3j)$$

Modelo Explícito en Matlab/Octave

```

function dx=circuit(x,t)
    q=x(1); phi=x(2); % estados
    R=1; L=1; C=1; % parametros
    v=sin(t); % entrada
    uC=q/c;
    iL=phi/L;
    uS=v;
    iR=iL;
    iC=iL;
    iS=iR;
    uR=R*iR;
    uL=uS-uR-uC;
    der_q=iC;
    der_phi=uL;
    dx=[der_q; der_phi]; % vector de derivadas
end
    
```

Modelo Explícito en Matlab/Octave

La función anterior es **equivalente** a la que se obtiene directamente de usar las **Ecuaciones de Estado** (3.2).

```
function dx=circuit2(x,t)
    q=x(1); phi=x(2); % estados
    R=1; L=1; C=1; % parametros
    v=sin(t); % entrada
    der_q=phi/L;
    der_phi=-q/C-R/L*phi+v;
    dx=[der_q; der_phi]; % vector de derivadas
end
```

Los modelos explícitos son mucho más **eficientes** que los implícitos ya que no involucran **iteraciones** para calcular las derivadas.

Organización de la Presentación

- 1 Ordenamiento y Causalización de Ecuaciones**
 - Modelos Implícitos y Explícitos
 - **Algoritmo de Ordenamiento Horizontal y Vertical**
 - Eliminación de Ecuaciones Triviales
 - Obtención de las Ecuaciones de Estado
- 2 Lazos Algebraicos**
 - Ejemplo Introdutorio
 - Algoritmo de Rasgado
 - Obtención de las Ecuaciones de Estado
- 3 Sistemas de Índice Alto**
 - Ejemplo Introdutorio
 - Algoritmo de Pantelides
 - El índice de perturbación de una DAE
 - Elección de las Variables de Estado
- 4 DAEs y Diagramas de Bloques**
 - Diagramas de Bloques y Relaciones Causales
 - Procedimiento para obtener un DB desde una DAE
 - Diagramas de Bloques y Lazos Algebraicos
 - Diagramas de Bloques y Sistemas de Índice Alto

Ordenamiento Horizontal y Vertical

El pasaje del sistema de **ecuaciones implícitas** (3.1) al sistema de **ecuaciones explícitas** (3.3) implica:

- Ordenar las ecuaciones **horizontalmente** para decidir que variable se despeja de cada ecuación.
- Ordenar las ecuaciones **verticalmente** para decidir en qué orden se realizan las asignaciones.

Veremos un procedimiento que en muchos casos permite resolver este problema de ordenamiento **causalizando** un sistema de DAEs y convirtiéndolo en una **secuencia de asignaciones** que equivale a un sistema de **Ecuaciones de Estado**.

Algoritmo de Ordenamiento Horizontal y Vertical

En un caso general, tendremos un sistema de DAEs de la forma:

$$\begin{aligned}
 f_1(x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n, a_1, \dots, a_r, v_1, \dots, v_m, t) &= 0 \\
 f_2(x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n, a_1, \dots, a_r, v_1, \dots, v_m, t) &= 0 \\
 &\vdots \\
 f_{n+r}(x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n, a_1, \dots, a_r, v_1, \dots, v_m, t) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{3.4}$$

donde las variables x_i serán (en principio) los estados, las a_i son variables algebraicas y las entradas v_i se asumen conocidas.

Algoritmo de Ordenamiento Horizontal y Vertical

El objetivo del algoritmo será ordenar vertical y horizontalmente las ecuaciones de manera de poder **calcular las derivadas** de los estados \dot{x}_i . Para esto, tomaremos en cuenta lo siguiente:

- Tendremos un sistema de $n + r$ ecuaciones y $n + r$ incógnitas.
- Las incógnitas son las n **derivadas de los estados** y las r **variables algebraicas** desconocidas.
- En general no aparecerán todas las incógnitas en todas las ecuaciones.
- Asumiremos que de cada función f_i es posible **despejar** una incógnita (siempre y cuando esta aparezca en la función).
- No tendremos en cuenta (por el momento) las expresiones de las f_i , sino sólo de qué variables dependen.

Algoritmo de Ordenamiento Horizontal y Vertical

El algoritmo que utilizaremos se basará en las siguientes reglas:

Regla 1 Si una ecuación (E_i) contiene una **única** incógnita u_j :

- u_j debe despejarse de (E_i) (ordenamiento **horizontal**). De lo contrario no podríamos utilizar dicha ecuación para otra cosa.
- La ecuación (E_i) debe colocarse al principio (ordenamiento **vertical**) ya que no depende de otra incógnita.

Regla 2 Si una incógnita u_j aparece en una **única** ecuación (E_i):

- u_j debe despejarse de (E_i) (ordenamiento **horizontal**) porque no hay otra ecuación para calcular u_j .
- La ecuación (E_i) debe colocarse al final (ordenamiento **vertical**), ya que la incógnita u_j no será necesaria en ninguna otra ecuación.

Tras aplicar cada regla, la incógnita despejada dejará de ser incógnita y la ecuación utilizada se removerá.

Algoritmo de Ordenamiento: Ejemplo

$$u_R(t) - R i_R(t) = 0$$

$$\dot{q}(t) - i_C(t) = 0$$

$$q(t) - C u_C(t) = 0$$

$$\dot{\phi}(t) - u_L(t) = 0$$

$$\phi(t) - L i_L(t) = 0$$

$$u_S(t) - v(t) = 0$$

$$u_L(t) + u_R(t) + u_C(t) - u_S(t) = 0$$

$$i_L(t) - i_R(t) = 0$$

$$i_C(t) - i_L(t) = 0$$

$$i_S(t) - i_R(t) = 0$$

$$u_C(t) := \frac{q(t)}{C}$$

Algoritmo de Ordenamiento: Ejemplo

$$u_R(t) - R i_R(t) = 0 \quad u_C(t) := \frac{q(t)}{C}$$

$$\dot{q}(t) - i_C(t) = 0$$

$$q(t) - C u_C(t) = 0$$

$$\dot{\phi}(t) - u_L(t) = 0$$

$$\phi(t) - L i_L(t) = 0$$

$$u_S(t) - v(t) = 0$$

$$u_L(t) + u_R(t) + u_C(t) - u_S(t) = 0$$

$$i_L(t) - i_R(t) = 0$$

$$i_C(t) - i_L(t) = 0$$

$$i_S(t) - i_R(t) = 0$$

$$\dot{\phi}(t) := u_L(t)$$

Algoritmo de Ordenamiento: Ejemplo

$$u_R(t) - R i_R(t) = 0$$

$$\dot{q}(t) - i_C(t) = 0$$

$$q(t) - C u_C(t) = 0$$

$$\dot{\phi}(t) - u_L(t) = 0$$

$$\phi(t) - L i_L(t) = 0$$

$$u_S(t) - v(t) = 0$$

$$u_L(t) + u_R(t) + u_C(t) - u_S(t) = 0$$

$$i_L(t) - i_R(t) = 0$$

$$i_C(t) - i_L(t) = 0$$

$$i_S(t) - i_R(t) = 0$$

$$u_C(t) := \frac{q(t)}{C}$$

$$i_L(t) := \frac{\phi(t)}{L}$$

$$\dot{\phi}(t) := u_L(t)$$

Algoritmo de Ordenamiento: Ejemplo

$$u_R(t) - R i_R(t) = 0$$

$$\dot{q}(t) - i_C(t) = 0$$

$$q(t) - C u_C(t) = 0$$

$$\dot{\phi}(t) - u_L(t) = 0$$

$$\phi(t) - L i_L(t) = 0$$

$$u_S(t) - v(t) = 0$$

$$u_L(t) + u_R(t) + u_C(t) - u_S(t) = 0$$

$$i_L(t) - i_R(t) = 0$$

$$i_C(t) - i_L(t) = 0$$

$$i_S(t) - i_R(t) = 0$$

$$u_C(t) := \frac{q(t)}{C}$$

$$i_L(t) := \frac{\phi(t)}{L}$$

$$u_S(t) := v(t)$$

$$\dot{\phi}(t) := u_L(t)$$

Algoritmo de Ordenamiento: Ejemplo

$$u_R(t) - R i_R(t) = 0$$

$$\dot{q}(t) - i_C(t) = 0$$

$$q(t) - C u_C(t) = 0$$

$$\dot{\phi}(t) - u_L(t) = 0$$

$$\phi(t) - L i_L(t) = 0$$

$$u_S(t) - v(t) = 0$$

$$u_L(t) + u_R(t) + u_C(t) - u_S(t) = 0$$

$$i_L(t) - i_R(t) = 0$$

$$i_C(t) - i_L(t) = 0$$

$$i_S(t) - i_R(t) = 0$$

$$u_C(t) := \frac{q(t)}{C}$$

$$i_L(t) := \frac{\phi(t)}{L}$$

$$u_S(t) := v(t)$$

$$\dot{q}(t) := i_C(t)$$

$$\dot{\phi}(t) := u_L(t)$$

Algoritmo de Ordenamiento: Ejemplo

$$u_R(t) - R i_R(t) = 0$$

$$\dot{q}(t) - i_C(t) = 0$$

$$q(t) - C u_C(t) = 0$$

$$\dot{\phi}(t) - u_L(t) = 0$$

$$\phi(t) - L i_L(t) = 0$$

$$u_S(t) - v(t) = 0$$

$$u_L(t) + u_R(t) + u_C(t) - u_S(t) = 0$$

$$i_L(t) - i_R(t) = 0$$

$$i_C(t) - i_L(t) = 0$$

$$i_S(t) - i_R(t) = 0$$

$$u_C(t) := \frac{q(t)}{C}$$

$$i_L(t) := \frac{\phi(t)}{L}$$

$$u_S(t) := v(t)$$

$$i_R(t) := i_L(t)$$

$$i_C(t) := i_L(t)$$

$$i_S(t) := i_R(t)$$

$$u_R(t) := R i_R(t)$$

$$u_L(t) := u_S(t) - u_R(t) - u_C(t)$$

$$\dot{q}(t) := i_C(t)$$

$$\dot{\phi}(t) := u_L(t)$$

Algoritmo de Ordenamiento

- Las ecuaciones ordenadas de la Ec.(3.3) pueden utilizarse para simular usando un código **explícito**.
- También pueden usarse para obtener las **Ecuaciones de Estado** y de ahí, ya que este caso es lineal, la **Función Transferencia**.
- Dado que en cada paso del algoritmo ordenamos una ecuación, en un caso genérico como el de la Ec.(3.4) el procedimiento finalizaría tras $n + r$ pasos.
- Tanto para simplificar el ordenamiento como para generar un código más corto y eficiente para evaluar las derivadas del estado, se suelen eliminar las ecuaciones **triviales** del modelo,

Organización de la Presentación

- 1 **Ordenamiento y Causalización de Ecuaciones**
 - Modelos Implícitos y Explícitos
 - Algoritmo de Ordenamiento Horizontal y Vertical
 - **Eliminación de Ecuaciones Triviales**
 - Obtención de las Ecuaciones de Estado
- 2 **Lazos Algebraicos**
 - Ejemplo Introdutorio
 - Algoritmo de Rasgado
 - Obtención de las Ecuaciones de Estado
- 3 **Sistemas de Índice Alto**
 - Ejemplo Introdutorio
 - Algoritmo de Pantelides
 - El índice de perturbación de una DAE
 - Elección de las Variables de Estado
- 4 **DAEs y Diagramas de Bloques**
 - Diagramas de Bloques y Relaciones Causales
 - Procedimiento para obtener un DB desde una DAE
 - Diagramas de Bloques y Lazos Algebraicos
 - Diagramas de Bloques y Sistemas de Índice Alto

Eliminación de Ecuaciones Triviales

- Las **ecuaciones triviales** son las que tienen la forma $a_i - a_j = 0$ (o sea, $a_i = a_j$).
- En tal caso se dice que las variables algebraicas a_i y a_j son **alias** y se puede eliminar una de ellas junto con la ecuación.

En la Ec.(3.1) podríamos eliminar las últimas tres ecuaciones reemplazando todas las corrientes por i_L :

$$u_R(t) - R i_L(t) = 0$$

$$\dot{q}(t) - i_L(t) = 0$$

$$q(t) - C u_C(t) = 0$$

$$\dot{\phi}(t) - u_L(t) = 0$$

$$\phi(t) - L i_L(t) = 0$$

$$u_S(t) - v(t) = 0$$

$$u_L(t) + u_R(t) + u_C(t) - u_S(t) = 0$$

Eliminación de Ecuaciones Triviales

Podemos también eliminar $i_L(t)$ y $u_L(t)$ ya que ambas son iguales a dos derivadas de los estados. En tal caso, el sistema se reduce a

$$u_R(t) - R \dot{q}(t) = 0 \quad (3.6a)$$

$$q(t) - C u_C(t) = 0 \quad (3.6b)$$

$$\phi(t) - L \dot{q}(t) = 0 \quad (3.6c)$$

$$u_S(t) - v(t) = 0 \quad (3.6d)$$

$$\dot{\phi}(t) + u_R(t) + u_C(t) - u_S(t) = 0 \quad (3.6e)$$

que sólo contiene tres variables algebraicas.

Organización de la Presentación

- 1 Ordenamiento y Causalización de Ecuaciones**
 - Modelos Implícitos y Explícitos
 - Algoritmo de Ordenamiento Horizontal y Vertical
 - Eliminación de Ecuaciones Triviales
 - **Obtención de las Ecuaciones de Estado**
- 2 Lazos Algebraicos**
 - Ejemplo Introdutorio
 - Algoritmo de Rasgado
 - Obtención de las Ecuaciones de Estado
- 3 Sistemas de Índice Alto**
 - Ejemplo Introdutorio
 - Algoritmo de Pantelides
 - El índice de perturbación de una DAE
 - Elección de las Variables de Estado
- 4 DAEs y Diagramas de Bloques**
 - Diagramas de Bloques y Relaciones Causales
 - Procedimiento para obtener un DB desde una DAE
 - Diagramas de Bloques y Lazos Algebraicos
 - Diagramas de Bloques y Sistemas de Índice Alto

Obtención de las Ecuaciones de Estado

Una vez ordenado horizontal y verticalmente un sistema de DAEs, la obtención de las EE es directa ya que se pueden reemplazar las variables algebraicas tomando en orden las ecuaciones. Consideremos el sistema ordenado que se obtiene del sistema reducido (sin ecuaciones triviales) de la Ec.(3.6):

$$u_C(t) := \frac{q(t)}{C} \quad (3.7a)$$

$$\dot{q}(t) := \frac{\phi(t)}{L} \quad (3.7b)$$

$$u_S(t) := v(t) \quad (3.7c)$$

$$u_R(t) := R \dot{q}(t) \quad (3.7d)$$

$$\dot{\phi}(t) := u_S(t) - u_R(t) - u_C(t) \quad (3.7e)$$

$$(3.7f)$$

Obtención de las Ecuaciones de Estado

A partir del sistema ordenado podemos proceder como sigue:

$$u_C(t) := \frac{q(t)}{C}$$

$$\dot{q}(t) := \frac{\phi(t)}{L}$$

$$u_S(t) := v(t)$$

$$u_R(t) := R \dot{q}(t) = R \frac{\phi(t)}{L}$$

$$\dot{\phi}(t) := u_S(t) - u_R(t) - u_C(t) = v(t) - R \frac{\phi(t)}{L} - \frac{q(t)}{C}$$

de manera que las EE son:

$$\dot{q}(t) = \frac{\phi(t)}{L}$$

$$\dot{\phi}(t) = v(t) - R \frac{\phi(t)}{L} - \frac{q(t)}{C}$$

Organización de la Presentación

- 1 **Ordenamiento y Causalización de Ecuaciones**
 - Modelos Implícitos y Explícitos
 - Algoritmo de Ordenamiento Horizontal y Vertical
 - Eliminación de Ecuaciones Triviales
 - Obtención de las Ecuaciones de Estado
- 2 **Lazos Algebraicos**
 - Ejemplo Introductorio
 - Algoritmo de Rasgado
 - Obtención de las Ecuaciones de Estado
- 3 **Sistemas de Índice Alto**
 - Ejemplo Introductorio
 - Algoritmo de Pantelides
 - El índice de perturbación de una DAE
 - Elección de las Variables de Estado
- 4 **DAEs y Diagramas de Bloques**
 - Diagramas de Bloques y Relaciones Causales
 - Procedimiento para obtener un DB desde una DAE
 - Diagramas de Bloques y Lazos Algebraicos
 - Diagramas de Bloques y Sistemas de Índice Alto

Organización de la Presentación

- 1 **Ordenamiento y Causalización de Ecuaciones**
 - Modelos Implícitos y Explícitos
 - Algoritmo de Ordenamiento Horizontal y Vertical
 - Eliminación de Ecuaciones Triviales
 - Obtención de las Ecuaciones de Estado
- 2 **Lazos Algebraicos**
 - **Ejemplo Introdutorio**
 - Algoritmo de Rasgado
 - Obtención de las Ecuaciones de Estado
- 3 **Sistemas de Índice Alto**
 - Ejemplo Introdutorio
 - Algoritmo de Pantelides
 - El índice de perturbación de una DAE
 - Elección de las Variables de Estado
- 4 **DAEs y Diagramas de Bloques**
 - Diagramas de Bloques y Relaciones Causales
 - Procedimiento para obtener un DB desde una DAE
 - Diagramas de Bloques y Lazos Algebraicos
 - Diagramas de Bloques y Sistemas de Índice Alto

Ejemplo Introdutorio

La Figura 3.2 muestra un circuito RL con sus relaciones constitutivas y estructurales.

$$u_{R_1}(t) - R_1 i_{R_1}(t) = 0 \quad (3.8a)$$

$$u_{R_2}(t) - R_2 i_{R_2}(t) = 0 \quad (3.8b)$$

$$\dot{\phi}(t) - u_L(t) = 0 \quad (3.8c)$$

$$\phi(t) - L i_L(t) = 0 \quad (3.8d)$$

$$i_L(t) + i_{R_1}(t) + i_{R_2}(t) = 0 \quad (3.8e)$$

$$u_{R_1}(t) - u_{R_2}(t) = 0 \quad (3.8f)$$

$$u_L(t) - u_{R_2}(t) = 0 \quad (3.8g)$$

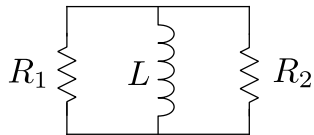


Figura 3.2: Circuito RL Paralelo

Veremos que ocurre al aplicar el algoritmo de ordenamiento en este sistema de DAEs.

Ejemplo Introdutorio - Algoritmo de Causalización

$$u_L(t) - R_1 i_{R_1}(t) = 0$$

$$u_L(t) - R_2 i_{R_2}(t) = 0$$

$$\dot{\phi}(t) - u_L(t) = 0$$

$$\phi(t) - L i_L(t) = 0$$

$$i_L(t) + i_{R_1}(t) + i_{R_2}(t) = 0$$

$$\dot{\phi}(t) := u_L(t)$$

Ejemplo Introdutorio - Algoritmo de Causalización

$$u_L(t) - R_1 i_{R_1}(t) = 0$$

$$u_L(t) - R_2 i_{R_2}(t) = 0$$

$$\dot{\phi}(t) - u_L(t) = 0$$

$$\phi(t) - L i_L(t) = 0$$

$$i_L(t) + i_{R_1}(t) + i_{R_2}(t) = 0$$

$$i_L(t) := \frac{\phi(t)}{L}$$

$$\dot{\phi}(t) := u_L(t)$$

Ejemplo Introdutorio - Algoritmo de Causalización

$$u_L(t) - R_1 i_{R_1}(t) = 0$$

$$u_L(t) - R_2 i_{R_2}(t) = 0$$

$$\dot{\phi}(t) - u_L(t) = 0$$

$$\phi(t) - L i_L(t) = 0$$

$$i_L(t) + i_{R_1}(t) + i_{R_2}(t) = 0$$

$$i_L(t) := \frac{\phi(t)}{L}$$

$$\dot{\phi}(t) := u_L(t)$$

Tras dos pasos, no podemos aplicar ninguna de las reglas:

- todas las ecuaciones contienen al menos dos incógnitas,
- todas las incógnitas aparecen en al menos dos ecuaciones.

Ejemplo Introdutorio - Lazo Algebraico

$$u_L(t) - R_1 i_{R_1}(t) = 0$$

$$u_L(t) - R_2 i_{R_2}(t) = 0$$

$$\dot{\phi}(t) - u_L(t) = 0$$

$$\phi(t) - L i_L(t) = 0$$

$$i_L(t) + i_{R_1}(t) + i_{R_2}(t) = 0$$

$$i_L(t) := \frac{\phi(t)}{L}$$

$$u_L(t) - R_1 i_{R_1}(t) = 0$$

$$u_L(t) - R_2 i_{R_2}(t) = 0$$

$$i_L(t) + i_{R_1}(t) + i_{R_2}(t) = 0$$

$$\dot{\phi}(t) := u_L(t)$$

- Nos quedó un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas (i_{R_1} , i_{R_2} y u_L) que deben resolverse **simultáneamente**.
- Estas ecuaciones constituyen un **lazo algebraico**.

Simulación de un Modelo con Lazos Algebraicos

- Podríamos resolver el problema implementando algo similar al código de Matlab/Octave para el **modelo implícito** del circuito RLC.
- Si hacemos esto directamente sobre la Ec.(3.8) tendríamos un sistema de **7** ecuaciones y **7** incógnitas.
- Eliminando las **ecuaciones triviales** el sistema se reduciría a **5** ecuaciones e incógnitas.
- Utilizando lo que nos quedó tras el proceso de causalización incompleto, tendremos un problema con **3** ecuaciones e incógnitas.

Código de Octave de un Modelo con Lazo Algebraico

```
function res=rlcircuit_loop(uL,iR1,iR2,iL)
    R1=1;R2=2;L=1; % parametros

    % la siguiente funcion debe ser 0
    res=zeros(3,1);
    res(1)=uL-R1*iR1;
    res(2)=uL-R2*iR2;
    res(3)=iL+iR1+iR2;
end
```

Código de Octave de un Modelo con Lazo Algebraico

```
function dx=rlcircuit(x,t)
    R1=1; R2=2; L=1; % parametros
    phi=x; % estado
    iL=phi/L;

    F = @(z) rlcircuit_loop(z(1),z(2),z(3),iL);
    z0=zeros(3,1);
    z=fsolve(F,z0);
    uL=z(1); iR1=z(2); iR2=z(3);

    der_phi=uL; dx=der_phi;
end
```

Esto es más eficiente que usar un sistema de 7 ecuaciones como el que resulta al colocar directamente la DAE, pero podemos reducirlo aún más.

Organización de la Presentación

- 1 **Ordenamiento y Causalización de Ecuaciones**
 - Modelos Implícitos y Explícitos
 - Algoritmo de Ordenamiento Horizontal y Vertical
 - Eliminación de Ecuaciones Triviales
 - Obtención de las Ecuaciones de Estado
- 2 **Lazos Algebraicos**
 - Ejemplo Introdutorio
 - **Algoritmo de Rasgado**
 - Obtención de las Ecuaciones de Estado
- 3 **Sistemas de Índice Alto**
 - Ejemplo Introdutorio
 - Algoritmo de Pantelides
 - El índice de perturbación de una DAE
 - Elección de las Variables de Estado
- 4 **DAEs y Diagramas de Bloques**
 - Diagramas de Bloques y Relaciones Causales
 - Procedimiento para obtener un DB desde una DAE
 - Diagramas de Bloques y Lazos Algebraicos
 - Diagramas de Bloques y Sistemas de Índice Alto

Algoritmo de Rasgado

Cuando en el procedimiento de ordenamiento nos encontramos con un lazo algebraico, podemos proceder como sigue:

- Suponemos que conocemos una incógnita del lazo (la llamaremos **variable de rasgado**).
- Guardamos una ecuación donde aparezca dicha incógnita (**ecuación de rasgado**).
- Continuamos el proceso de ordenamiento hasta que queden calculadas las demás incógnitas de la ecuación de rasgado.

Si esto funciona, tendremos un sistema con una única incógnita (la variable de rasgado).

Algoritmo de Rasgado – Ejemplo

Suponemos conocida $u_L(t)$ y reservamos la ecuación
 $u_L(t) - R_1 i_{R_1}(t) = 0$.

$$u_L(t) - R_1 i_{R_1}(t) = 0$$

$$u_L(t) - R_2 i_{R_2}(t) = 0$$

$$\dot{\phi}(t) - u_L(t) = 0$$

$$\phi(t) - L i_L(t) = 0$$

$$i_L(t) + i_{R_1}(t) + i_{R_2}(t) = 0$$

$$i_L(t) := \frac{\phi(t)}{L}$$

$$i_{R_2}(t) := \frac{u_L(t)}{R_2}$$

$$\dot{\phi}(t) := u_L(t)$$

Algoritmo de Rasgado – Ejemplo

Suponemos conocida $u_L(t)$ y reservamos la ecuación

$$u_L(t) - R_1 i_{R_1}(t) = 0.$$

$$u_L(t) - R_1 i_{R_1}(t) = 0$$

$$u_L(t) - R_2 i_{R_2}(t) = 0$$

$$\dot{\phi}(t) - u_L(t) = 0$$

$$\dot{\phi}(t) - L i_L(t) = 0$$

$$i_L(t) + i_{R_1}(t) + i_{R_2}(t) = 0$$

$$i_L(t) := \frac{\phi(t)}{L}$$

$$i_{R_2}(t) := \frac{u_L(t)}{R_2}$$

$$i_{R_1}(t) := -i_{R_2}(t) - i_L(t)$$

$$\dot{\phi}(t) := u_L(t)$$

Algoritmo de Rasgado – Ejemplo

Tras este paso, la ecuación de rasgado $u_L(t) - R_1 i_{R_1}(t) = 0$ no tiene más incógnitas.

$$u_L(t) - R_1 i_{R_1}(t) = 0$$

$$u_L(t) - R_2 i_{R_2}(t) = 0$$

$$\dot{\phi}(t) - u_L(t) = 0$$

$$\phi(t) - L i_L(t) = 0$$

$$i_L(t) + i_{R_1}(t) + i_{R_2}(t) = 0$$

$$i_L(t) := \frac{\phi(t)}{L}$$

$$i_{R_2}(t) := \frac{u_L(t)}{R_2}$$

$$i_{R_1}(t) := -i_{R_2}(t) - i_L(t)$$

$$u_L(t) - R_1 i_{R_1}(t) = 0$$

$$\dot{\phi}(t) := u_L(t)$$

Algoritmo de Rasgado – Ejemplo

El lazo algebraico tiene una única incógnita u_L y se puede resolver usando el siguiente código de Matlab/Octave.

```
function res=rlcircuit_loop2(uL,iL)
    R1=1; R2=2; L=1; % parametros

    iR2=uL/R2;
    iR1=-iR2-iL;
    res=uL-R1*iR1; % expresion que debe ser 0
end
```

Algoritmo de Rasgado – Ejemplo

El código que evalúa la derivada queda finalmente:

```
function dx=rlcircuit2(x,t)
    R1=1; R2=2; L=1; % parametros
    phi=x; % estado
    iL=phi/L;
    % la siguiente funcion debe ser 0
    F = @(uL) rlcircuit_loop2(uL,iL);
    uL=fsolve(F,0);
    der_phi=uL;
    dx=der_phi;
end
```

Algoritmo de Rasgado

El algoritmo de rasgado permite **reducir el número de incógnitas** de los lazos algebraicos.

- En ocasiones, se necesita más de una variable de rasgado para romper un lazo algebraico.
- El número de variables de rasgado necesarias determinará el **costo computacional** de las iteraciones.
- El número de variables de rasgado necesarias depende en general de la elección de las mismas.

Organización de la Presentación

- 1 **Ordenamiento y Causalización de Ecuaciones**
 - Modelos Implícitos y Explícitos
 - Algoritmo de Ordenamiento Horizontal y Vertical
 - Eliminación de Ecuaciones Triviales
 - Obtención de las Ecuaciones de Estado
- 2 **Lazos Algebraicos**
 - Ejemplo Introductorio
 - Algoritmo de Rasgado
 - **Obtención de las Ecuaciones de Estado**
- 3 **Sistemas de Índice Alto**
 - Ejemplo Introductorio
 - Algoritmo de Pantelides
 - El índice de perturbación de una DAE
 - Elección de las Variables de Estado
- 4 **DAEs y Diagramas de Bloques**
 - Diagramas de Bloques y Relaciones Causales
 - Procedimiento para obtener un DB desde una DAE
 - Diagramas de Bloques y Lazos Algebraicos
 - Diagramas de Bloques y Sistemas de Índice Alto

Obtención de las Ecuaciones de Estado

A partir del sistema ordenado

$$i_L(t) := \frac{\phi(t)}{L} \quad (3.9a)$$

$$i_{R_2}(t) := \frac{u_L(t)}{R_2} \quad (3.9b)$$

$$i_{R_1}(t) := -i_{R_2}(t) - i_L(t) \quad (3.9c)$$

$$u_L(t) - R_1 i_{R_1}(t) = 0 \quad (3.9d)$$

$$\dot{\phi}(t) := u_L(t) \quad (3.9e)$$

podemos obtener las **Ecuaciones de Estado** reemplazando las variables algebraicas en orden hasta llegar a la **ecuación de rasgado**.

Obtención de las Ecuaciones de Estado

Reemplazando en orden, se obtiene

$$i_L(t) := \frac{\phi(t)}{L} \quad (3.10a)$$

$$i_{R_2}(t) := \frac{u_L(t)}{R_2} \quad (3.10b)$$

$$i_{R_1}(t) := -i_{R_2}(t) - i_L(t) = -\frac{u_L(t)}{R_2} - i_L(t) \quad (3.10c)$$

$$u_L(t) - R_1 i_{R_1}(t) = u_L(t) - R_1 \left(-\frac{u_L(t)}{R_2} - i_L(t) \right) = 0 \quad (3.10d)$$

y de la última ecuación se puede despejar

$$u_L(t) = -\frac{R_1}{1 + \frac{R_1}{R_2}} i_L(t). \quad (3.11)$$

Obtención de las Ecuaciones de Estado

Queda entonces el **sistema explícito**:

$$i_L(t) := \frac{\phi(t)}{L} \quad (3.12a)$$

$$u_L(t) := -\frac{R_1}{1 + \frac{R_1}{R_2}} i_L(t) \quad (3.12b)$$

$$\dot{\phi}(t) := u_L(t). \quad (3.12c)$$

y finalmente la **Ecuación de Estados** es

$$\dot{\phi}(t) = -\frac{R_1}{1 + \frac{R_1}{R_2}} \frac{\phi(t)}{L}. \quad (3.13)$$

Organización de la Presentación

- 1 **Ordenamiento y Causalización de Ecuaciones**
 - Modelos Implícitos y Explícitos
 - Algoritmo de Ordenamiento Horizontal y Vertical
 - Eliminación de Ecuaciones Triviales
 - Obtención de las Ecuaciones de Estado
- 2 **Lazos Algebraicos**
 - Ejemplo Introdutorio
 - Algoritmo de Rasgado
 - Obtención de las Ecuaciones de Estado
- 3 **Sistemas de Índice Alto**
 - Ejemplo Introdutorio
 - Algoritmo de Pantelides
 - El índice de perturbación de una DAE
 - Elección de las Variables de Estado
- 4 **DAEs y Diagramas de Bloques**
 - Diagramas de Bloques y Relaciones Causales
 - Procedimiento para obtener un DB desde una DAE
 - Diagramas de Bloques y Lazos Algebraicos
 - Diagramas de Bloques y Sistemas de Índice Alto

Organización de la Presentación

- 1 **Ordenamiento y Causalización de Ecuaciones**
 - Modelos Implícitos y Explícitos
 - Algoritmo de Ordenamiento Horizontal y Vertical
 - Eliminación de Ecuaciones Triviales
 - Obtención de las Ecuaciones de Estado
- 2 **Lazos Algebraicos**
 - Ejemplo Introdutorio
 - Algoritmo de Rasgado
 - Obtención de las Ecuaciones de Estado
- 3 **Sistemas de Índice Alto**
 - **Ejemplo Introdutorio**
 - Algoritmo de Pantelides
 - El índice de perturbación de una DAE
 - Elección de las Variables de Estado
- 4 **DAEs y Diagramas de Bloques**
 - Diagramas de Bloques y Relaciones Causales
 - Procedimiento para obtener un DB desde una DAE
 - Diagramas de Bloques y Lazos Algebraicos
 - Diagramas de Bloques y Sistemas de Índice Alto

Ejemplo Introdutorio

Consideremos ahora el circuito RC de la figura y el correspondiente sistema de DAEs (3.14).

$$C_1 \dot{u}_{C_1}(t) - i_{C_1}(t) = 0 \quad (3.14a)$$

$$C_2 \dot{u}_{C_2}(t) - i_{C_2}(t) = 0 \quad (3.14b)$$

$$u_R(t) - R i_R(t) = 0 \quad (3.14c)$$

$$i_R(t) + i_{C_1}(t) + i_{C_2}(t) = 0 \quad (3.14d)$$

$$u_{C_1}(t) - u_R(t) = 0 \quad (3.14e)$$

$$u_{C_1}(t) - u_{C_2}(t) = 0 \quad (3.14f)$$

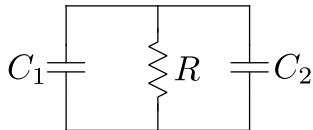


Figura 3.3: Circuito RC Paralelo

Puede verse fácilmente que la última ecuación no tiene incógnitas y por lo tanto no podremos finalizar el ordenamiento.

Ecuaciones de Restricción

- El problema se debe a que estamos caracterizando con dos variables de estado (u_{C_1} y u_{C_2}) un modelo de **primer orden**.
- Es de primer orden porque conociendo u_{C_1} podemos calcular cualquier otra variable (no podemos asignar dos **condiciones iniciales** independientes).
- Una ecuación que se queda sin incógnitas durante la causalización se denomina **Ecuación de Restricción**.

La presencia de **Ecuaciones de Restricción** indica que el orden del modelo es menor que el número de supuestas variables de estado y decimos que el modelo tiene una **Singularidad Estructural**.

Simulación de Modelos con Singularidades

Ya que no podemos causalizar el modelo, intentaremos simularlo directamente como hicimos al principio con el circuito RLC.

```
function res=rc_circuit_dae(x,dx,a,t)
    C1=1;C2=2;R=1; % parametros
    uC1=x(1); uC2=x(2); % estados
    der_uC1=dx(1); der_uC2=dx(2); % derivadas de estados
    uR=a(1); iR=a(2); iC1=a(3); iC2=a(4); % algebraicas
    res=zeros(6,1); % residuo (debe ser cero)
    res(1) = C1*der_uC1-iC1;
    res(2) = C2*der_uC2-iC2;
    res(3) = uR-R*iR;
    res(4) = iR+iC1+iC2;
    res(5) = uC1-uR;
    res(6) = uC1-uC2;
end
```

Simulación de Modelos con Singularidades

```
function dx=rccircuit_ode(x,t)
    F = @(z) rccircuit_dae(x,z(1:2),z(3:6),t);
    z0=zeros(6,1);
    z=fsolve(F,z0);
    dx=z(1:2);
end
```

Esta idea tampoco funciona, ya que el sistema de ecuaciones es **singular** y no se puede encontrar un conjunto de derivadas y variables algebraicas que lo verifique.

Organización de la Presentación

- 1 **Ordenamiento y Causalización de Ecuaciones**
 - Modelos Implícitos y Explícitos
 - Algoritmo de Ordenamiento Horizontal y Vertical
 - Eliminación de Ecuaciones Triviales
 - Obtención de las Ecuaciones de Estado
- 2 **Lazos Algebraicos**
 - Ejemplo Introdutorio
 - Algoritmo de Rasgado
 - Obtención de las Ecuaciones de Estado
- 3 **Sistemas de Índice Alto**
 - Ejemplo Introdutorio
 - **Algoritmo de Pantelides**
 - El índice de perturbación de una DAE
 - Elección de las Variables de Estado
- 4 **DAEs y Diagramas de Bloques**
 - Diagramas de Bloques y Relaciones Causales
 - Procedimiento para obtener un DB desde una DAE
 - Diagramas de Bloques y Lazos Algebraicos
 - Diagramas de Bloques y Sistemas de Índice Alto

Algoritmo de Pantelides

La idea básica, debida a Constantino Pantelides, es **derivar** respecto al tiempo las **ecuaciones de restricción**:

- Si $u_{C_1}(t) - u_{C_2}(t) = 0$, luego debe cumplirse también que $\dot{u}_{C_1}(t) - \dot{u}_{C_2}(t) = 0$.
- Agregaremos entonces esta última ecuación al sistema.
- Dado que ahora tenemos una ecuación más, necesitamos también una incógnita más.
- Esto lo lograremos decidiendo que una de las variables de estado de la Ecuación de Restricción **no sea más variable de estado**.

Algoritmo de Pantelides - Derivadas Ficticias

Suponiendo que u_{C_2} no es más un estado, el sistema queda:

$$C_1 \dot{u}_{C_1}(t) - i_{C_1}(t) = 0 \quad (3.15a)$$

$$C_2 du_{C_2}(t) - i_{C_2}(t) = 0 \quad (3.15b)$$

$$u_R(t) - R i_R(t) = 0 \quad (3.15c)$$

$$i_R(t) + i_{C_1}(t) + i_{C_2}(t) = 0 \quad (3.15d)$$

$$u_{C_1}(t) - u_R(t) = 0 \quad (3.15e)$$

$$u_{C_1}(t) - u_{C_2}(t) = 0 \quad (3.15f)$$

$$\dot{u}_{C_1}(t) - du_{C_2}(t) = 0 \quad (3.15g)$$

- Lo que antes llamábamos \dot{u}_{C_2} ahora es una variable algebraica du_{C_2} .
- Diremos que du_{C_2} es una **derivada ficticia** (*dummy derivative*).

Intentaremos causalizar entonces el nuevo sistema.

Algoritmo de Pantelides

$$C_1 \dot{u}_{C_1}(t) - i_{C_1}(t) = 0$$

$$C_2 du_{C_2}(t) - i_{C_2}(t) = 0$$

$$u_R(t) - R i_R(t) = 0$$

$$i_R(t) + i_{C_1}(t) + i_{C_2}(t) = 0$$

$$u_{C_1}(t) - u_R(t) = 0$$

$$u_{C_1}(t) - u_{C_2}(t) = 0$$

$$\dot{u}_{C_1}(t) - du_{C_2}(t) = 0$$

Algoritmo de Pantelides

$$C_1 \dot{u}_{C_1}(t) - i_{C_1}(t) = 0$$

$$C_2 du_{C_2}(t) - i_{C_2}(t) = 0$$

$$u_R(t) - R i_R(t) = 0$$

$$i_R(t) + i_{C_1}(t) + i_{C_2}(t) = 0$$

$$u_{C_1}(t) - u_R(t) = 0$$

$$u_{C_1}(t) - u_{C_2}(t) = 0$$

$$\dot{u}_{C_1}(t) - du_{C_2}(t) = 0$$

$$u_R(t) := u_{C_1}(t)$$

Algoritmo de Pantelides

$$C_1 \dot{u}_{C_1}(t) - i_{C_1}(t) = 0$$

$$C_2 du_{C_2}(t) - i_{C_2}(t) = 0$$

$$u_R(t) - R i_R(t) = 0$$

$$i_R(t) + i_{C_1}(t) + i_{C_2}(t) = 0$$

$$u_{C_1}(t) - u_R(t) = 0$$

$$u_{C_1}(t) - u_{C_2}(t) = 0$$

$$\dot{u}_{C_1}(t) - du_{C_2}(t) = 0$$

$$u_R(t) := u_{C_1}(t)$$

$$u_{C_2}(t) := u_{C_1}(t)$$

Algoritmo de Pantelides

$$C_1 \dot{u}_{C_1}(t) - i_{C_1}(t) = 0$$

$$C_2 du_{C_2}(t) - i_{C_2}(t) = 0$$

$$u_R(t) - R i_R(t) = 0$$

$$i_R(t) + i_{C_1}(t) + i_{C_2}(t) = 0$$

$$u_{C_1}(t) - u_R(t) = 0$$

$$u_{C_1}(t) - u_{C_2}(t) = 0$$

$$\dot{u}_{C_1}(t) - du_{C_2}(t) = 0$$

$$u_R(t) := u_{C_1}(t)$$

$$u_{C_2}(t) := u_{C_1}(t)$$

$$i_R(t) := \frac{u_R(t)}{R}$$

Algoritmo de Pantelides

$$C_1 \dot{u}_{C_1}(t) - i_{C_1}(t) = 0$$

$$C_2 du_{C_2}(t) - i_{C_2}(t) = 0$$

$$u_R(t) - R i_R(t) = 0$$

$$i_R(t) + i_{C_1}(t) + i_{C_2}(t) = 0$$

$$u_{C_1}(t) - u_R(t) = 0$$

$$u_{C_1}(t) - u_{C_2}(t) = 0$$

$$\dot{u}_{C_1}(t) - du_{C_2}(t) = 0$$

$$u_R(t) := u_{C_1}(t)$$

$$u_{C_2}(t) := u_{C_1}(t)$$

$$i_R(t) := \frac{u_R(t)}{R}$$

- Encontramos ahora un **lazo algebraico**.
- Utilizaremos entonces como **variable de rasgado** a \dot{u}_{C_1} reservando la primera ecuación.

Algoritmo de Pantelides - Resolución del Lazo

El resultado (tras 3 pasos) es el sistema de la Ec.(3.16) que resulta en iteraciones en una única variable.

$$u_R(t) := u_{C_1}(t) \quad (3.16a)$$

$$u_{C_2}(t) := u_{C_1}(t) \quad (3.16b)$$

$$i_R(t) := \frac{u_R(t)}{R} \quad (3.16c)$$

$$du_{C_2}(t) := \dot{u}_{C_1}(t) \quad (3.16d)$$

$$i_{C_2}(t) := C_2 du_{C_2} \quad (3.16e)$$

$$i_{C_1}(t) := -i_R(t) - i_{C_2}(t) \quad (3.16f)$$

$$C_1 \dot{u}_{C_1}(t) - i_{C_1}(t) = 0 \quad (3.16g)$$

Simulación en Matlab/Octave

```
function dx=rccircuit2(x,t)
    C1=1;C2=2;R=1; % parametros
    uC1=x; % estado
    uR=uC1;
    uC2=uC1;
    iR=uR/R;
    % la siguiente funcion debe ser 0
    F = @(dot_uC1) rccircuit_loop2(dot_uC1,iR);
    dot_uC1=fsolve(F,0);
    dx=dot_uC1;
end

function res=rccircuit_loop2(dot_uC1,iR)
    C1=1;C2=2;R=1; % parametros
    duC2=dot_uC1;
    iC2=C2*duC2;
    iC1=iR-iC2;
    % la siguiente funcion debe ser 0
    res=C1*dot_uC1-iC1;
end
```

Obtención de las Ecuaciones de Estado

Reemplazando en orden en las ecuaciones del lazo, se obtiene:

$$u_R(t) := u_{C_1}(t)$$

$$u_{C_2}(t) := u_{C_1}(t)$$

$$i_R(t) := \frac{u_R(t)}{R} = \frac{u_{C_1}(t)}{R}$$

$$du_{C_2}(t) := \dot{u}_{C_1}(t)$$

$$i_{C_2}(t) := C_2 du_{C_2} = C_2 \dot{u}_{C_1}(t)$$

$$i_{C_1}(t) := -i_R(t) - i_{C_2}(t) = -i_R(t) - C_2 \dot{u}_{C_1}(t)$$

$$C_1 \dot{u}_{C_1}(t) - i_{C_1}(t) = C_1 \dot{u}_{C_1}(t) - \left(-\frac{u_{C_1}(t)}{R} - C_2 \dot{u}_{C_1}(t) \right) = 0$$

de donde la **Ecuación de Estados** resulta

$$\dot{u}_{C_1}(t) = -\frac{u_{C_1}(t)}{R(C_1 + C_2)} \quad (3.17)$$

Algoritmo de Pantelides

El algoritmo de Pantelides se puede resumir mediante los siguientes pasos:

- Reemplazar las **variables algebraicas** por sus expresiones en función de los estados en las **ecuaciones de restricción** (esto no fue necesario en el ejemplo).
- **Derivar** respecto al tiempo las ecuaciones de restricción, agregarlas al sistema y transformar una variable de estado en algebraica por cada restricción.
- Al derivar, llamar $\dot{x}_i(t)$ a las derivadas de los estados $x_i(t)$ y $dx_j(t)$ a las derivadas de las variables algebraicas $x_j(t)$ que dejaron de ser estados.
- Verificar que el nuevo sistema sea **causalizable**. Si no lo es, se debe aplicar nuevamente el procedimiento.

Organización de la Presentación

- 1 Ordenamiento y Causalización de Ecuaciones
 - Modelos Implícitos y Explícitos
 - Algoritmo de Ordenamiento Horizontal y Vertical
 - Eliminación de Ecuaciones Triviales
 - Obtención de las Ecuaciones de Estado
- 2 Lazos Algebraicos
 - Ejemplo Introdutorio
 - Algoritmo de Rasgado
 - Obtención de las Ecuaciones de Estado
- 3 **Sistemas de Índice Alto**
 - Ejemplo Introdutorio
 - Algoritmo de Pantelides
 - **El índice de perturbación de una DAE**
 - Elección de las Variables de Estado
- 4 DAEs y Diagramas de Bloques
 - Diagramas de Bloques y Relaciones Causales
 - Procedimiento para obtener un DB desde una DAE
 - Diagramas de Bloques y Lazos Algebraicos
 - Diagramas de Bloques y Sistemas de Índice Alto

El índice de perturbación de una DAE

- Los sistemas de DAEs que no contienen lazos algebraicos y que pueden causalizarse completamente utilizando las Reglas 1 y 2 se denominan **DAEs de índice 0**.
- Un sistema con lazos algebraicos del cual se puede obtener la derivada del vector de estados \dot{x} sin modificar el sistema se denomina **DAE de índice 1**.
- Cuando un sistema bien formulado no se puede causalizar se dice que es una **DAE de índice alto**.
- El circuito RC de la Ec.(3.14) tiene **índice 2** ya que fue necesario aplicar una única vez el algoritmo de Pantelides para que nos quede un sistema de índice 1.
- Si en un sistema debemos aplicar dos veces el algoritmo para llegar a una DAE de índice 1, entonces diremos que el sistema tiene índice 3, y así sucesivamente.

Ejemplo con Restricciones Mecánicas

El modelo del péndulo de la Fig.3.4 está dado por el sistema de DAEs de la Ec.(3.18).

$$\dot{x}(t) - v_x(t) = 0 \quad (3.18a)$$

$$\dot{y}(t) - v_y(t) = 0 \quad (3.18b)$$

$$m \dot{v}_x(t) + \frac{x(t)}{L} F(t) = 0 \quad (3.18c)$$

$$m \dot{v}_y(t) + \frac{y(t)}{L} F(t) - m g = 0 \quad (3.18d)$$

$$x(t)^2 + y(t)^2 - L^2 = 0 \quad (3.18e)$$

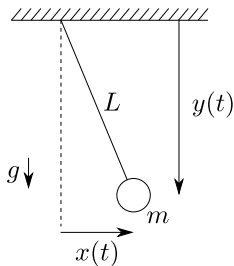


Figura 3.4: Péndulo

Al igual que en el circuito RC, la última ecuación no tiene incógnitas.

Ejemplo con Restricciones Mecánicas

Siguiendo el algoritmo de Pantelides y derivando la ecuación de restricción, se obtiene

$$\dot{x}(t) - v_x(t) = 0 \quad (3.19a)$$

$$dy(t) - v_y(t) = 0 \quad (3.19b)$$

$$m \dot{v}_x(t) + \frac{x(t)}{L} F(t) = 0 \quad (3.19c)$$

$$m \dot{v}_y(t) + \frac{y(t)}{L} F(t) - m g = 0 \quad (3.19d)$$

$$x(t)^2 + y(t)^2 - L^2 = 0 \quad (3.19e)$$

$$2 x(t) \dot{x}(t) + 2 y(t) dy(t) = 0 \quad (3.19f)$$

donde decidimos además que $y(t)$ no sea más variable de estado por lo que $dy(t)$ es una **derivada ficticia**.

Ejemplo con Restricciones Mecánicas

Tras tres pasos de ordenamiento sobre el sistema (3.19) resulta

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) - v_x(t) &:= 0 & y(t) &:= \sqrt{L^2 - x(t)^2} \\
 dy(t) - v_y(t) &= 0 & \dot{x}(t) &:= v_x(t) \\
 m \dot{v}_x(t) + \frac{x(t)}{L} F(t) &= 0 & dy(t) &:= -\frac{x(t)}{y(t)} \dot{x}(t) \\
 m \dot{v}_y(t) + \frac{y(t)}{L} F(t) - m g &= 0 \\
 x(t)^2 + y(t)^2 - L^2 &= 0 \\
 2 x(t) \dot{x}(t) + 2 y(t) dy(t) &= 0
 \end{aligned}$$

Ahora tenemos una nueva **ecuación de restricción**. Debemos aplicar entonces nuevamente Pantelides.

Ejemplo con Restricciones Mecánicas

Primero reemplazamos las variables algebraicas de la ecuación de restricción $dy(t) - v_y(t) = 0$ en función de las variables de estado aprovechando las ecuaciones ya causalizadas:

$$y(t) := \sqrt{L^2 - x(t)^2} \quad (\text{está bien porque } x(t) \text{ es estado}).$$

$$\dot{x}(t) := v_x(t) \quad (\text{está bien porque } v_x(t) \text{ es estado}).$$

$$dy(t) := -\frac{x(t)}{y(t)} \dot{x}(t) = -\frac{x(t)}{\sqrt{L^2 - x(t)^2}} v_x(t)$$

con lo que la ecuación de restricción queda

$$dy(t) - v_y(t) = -\frac{x(t)}{\sqrt{L^2 - x(t)^2}} v_x(t) - v_y(t) = 0 \quad (3.20)$$

que depende sólo de las variables de estado.

Ejemplo con Restricciones Mecánicas

Tras este paso, eliminamos v_y de la lista de variables de estado y su derivada que era \dot{v}_y será ahora la derivada ficticia dv_y . Luego, derivando la ecuación de restricción (??) obtenemos

$$\frac{d \left(-\frac{x(t)}{\sqrt{L^2 - x(t)^2}} v_x(t) - v_y(t) \right)}{dt} = \quad (3.21)$$

$$= -h(x(t), \dot{x}(t), v_x(t), \dot{v}_x(t)) - dv_y(t) = 0$$

donde $h(x(t), \dot{x}(t), v_x(t), \dot{v}_x(t))$ es la expresión de la derivada del primer término, cuya obtención queda como ejercicio.

Ejemplo con Restricciones Mecánicas

Agregando entonces la Ec.(??) al sistema de ecuaciones de la Ec.(3.19), tenemos

$$\dot{x}(t) - v_x(t) = 0 \quad (3.22a)$$

$$dy(t) - v_y(t) = 0 \quad (3.22b)$$

$$m \dot{v}_x(t) + \frac{x(t)}{L} F(t) = 0 \quad (3.22c)$$

$$m dv_y(t) + \frac{y(t)}{L} F(t) - m g = 0 \quad (3.22d)$$

$$x(t)^2 + y(t)^2 - L^2 = 0 \quad (3.22e)$$

$$2 x(t) \dot{x}(t) + 2 y(t) dy(t) = 0 \quad (3.22f)$$

$$-h(x(t), \dot{x}(t), v_x(t), \dot{v}_x(t)) - dv_y(t) = 0 \quad (3.22g)$$

Puede verse que el procedimiento de causalización en este sistema finaliza encontrando un lazo algebraico en 3 variables ($\dot{v}_x(t)$, $F(t)$, $dv_y(t)$).

Ejemplo con Restricciones Mecánicas

Usando como variable de rasgado $\dot{v}_x(t)$ se obtiene:

$$\dot{x}(t) := v_x(t) \quad (3.23a)$$

$$y(t) := \pm \sqrt{L^2 - x^2} \quad (3.23b)$$

$$dy(t) := \frac{x(t)}{y(t)} \dot{x}(t) \quad (3.23c)$$

$$v_y(t) := dy(t) \quad (3.23d)$$

$$dv_y(t) := -h(x(t), \dot{x}(t), v_x(t), \dot{v}_x(t)) \quad (3.23e)$$

$$F(t) := \frac{m L}{y(t)} (g - dv_y(t)) \quad (3.23f)$$

$$m \dot{v}_x(t) + \frac{x(t)}{L} F(t) = 0 \quad (3.23g)$$

Organización de la Presentación

- 1 **Ordenamiento y Causalización de Ecuaciones**
 - Modelos Implícitos y Explícitos
 - Algoritmo de Ordenamiento Horizontal y Vertical
 - Eliminación de Ecuaciones Triviales
 - Obtención de las Ecuaciones de Estado
- 2 **Lazos Algebraicos**
 - Ejemplo Introdutorio
 - Algoritmo de Rasgado
 - Obtención de las Ecuaciones de Estado
- 3 **Sistemas de Índice Alto**
 - Ejemplo Introdutorio
 - Algoritmo de Pantelides
 - El índice de perturbación de una DAE
 - **Elección de las Variables de Estado**
- 4 **DAEs y Diagramas de Bloques**
 - Diagramas de Bloques y Relaciones Causales
 - Procedimiento para obtener un DB desde una DAE
 - Diagramas de Bloques y Lazos Algebraicos
 - Diagramas de Bloques y Sistemas de Índice Alto

Elección de las Variables de Estado

Si observamos el sistema de la Ec.(3.25) podemos ver ciertos problemas:

- El signo de $y(t)$ no queda bien definido.
- La variable $y(t)$ aparece dividiendo en varias ecuaciones.

Mientras asumamos que el péndulo no alcanza un ángulo de 90 grados respecto de vertical, no habrá problemas ya que podemos tomar siempre la solución positiva para $y(t)$ y nunca ocurrirá que $y(t) = 0$.

Si hubiésemos elegido $y(t)$ como variable de estado en lugar de $x(t)$ tendríamos un problema más grave, por las divisiones por 0 y por la falta de unicidad de la solución.

La elección de las variables de estado es crucial en los **sistemas No Lineales con restricciones**.

Organización de la Presentación

- 1 **Ordenamiento y Causalización de Ecuaciones**
 - Modelos Implícitos y Explícitos
 - Algoritmo de Ordenamiento Horizontal y Vertical
 - Eliminación de Ecuaciones Triviales
 - Obtención de las Ecuaciones de Estado
- 2 **Lazos Algebraicos**
 - Ejemplo Introdutorio
 - Algoritmo de Rasgado
 - Obtención de las Ecuaciones de Estado
- 3 **Sistemas de Índice Alto**
 - Ejemplo Introdutorio
 - Algoritmo de Pantelides
 - El índice de perturbación de una DAE
 - Elección de las Variables de Estado
- 4 **DAEs y Diagramas de Bloques**
 - Diagramas de Bloques y Relaciones Causales
 - Procedimiento para obtener un DB desde una DAE
 - Diagramas de Bloques y Lazos Algebraicos
 - Diagramas de Bloques y Sistemas de Índice Alto

Organización de la Presentación

- 1 Ordenamiento y Causalización de Ecuaciones
 - Modelos Implícitos y Explícitos
 - Algoritmo de Ordenamiento Horizontal y Vertical
 - Eliminación de Ecuaciones Triviales
 - Obtención de las Ecuaciones de Estado
- 2 Lazos Algebraicos
 - Ejemplo Introdutorio
 - Algoritmo de Rasgado
 - Obtención de las Ecuaciones de Estado
- 3 Sistemas de Índice Alto
 - Ejemplo Introdutorio
 - Algoritmo de Pantelides
 - El índice de perturbación de una DAE
 - Elección de las Variables de Estado
- 4 DAEs y Diagramas de Bloques
 - Diagramas de Bloques y Relaciones Causales
 - Procedimiento para obtener un DB desde una DAE
 - Diagramas de Bloques y Lazos Algebraicos
 - Diagramas de Bloques y Sistemas de Índice Alto

Diagramas de Bloques y Relaciones Causales

Los **Diagramas de Bloques** permiten expresar de manera gráfica relaciones matemáticas entre variables, agregando **relaciones causales** entre las mismas. Dada una relación

$$K a_1(t) - a_2(t) = 0$$

se asume que $a_2(t) := K a_1(t)$ o bien que $a_1(t) := \frac{a_2(t)}{K}$, lo que se traduce en los dos posibles Diagrama de Bloques de la Figura 3.5.

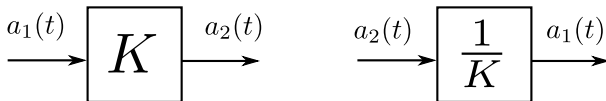


Figura 3.5: Dos posibles Diagramas de Bloques para $K a_1(t) - a_2(t) = 0$.

Diagramas de Bloques y Relaciones Causales

- La **falta de unicidad** en la representación de las relaciones matemáticas hace que los DBs no sean una herramienta muy adecuada para construir modelos.
- Asumir una determinada causalidad entre variables de un modelo puede provocar que luego no podamos **conectar** dicho modelo con otro.
- Por esto, las DAEs y los **lenguajes acausales** en general son las representaciones más adecuadas para las tareas de modelado.

Sin embargo, los DBs son una herramienta útil en muchos casos ya que permiten analizar de manera simple algunas propiedades importantes de los modelos que representan.

Organización de la Presentación

- 1 Ordenamiento y Causalización de Ecuaciones
 - Modelos Implícitos y Explícitos
 - Algoritmo de Ordenamiento Horizontal y Vertical
 - Eliminación de Ecuaciones Triviales
 - Obtención de las Ecuaciones de Estado
- 2 Lazos Algebraicos
 - Ejemplo Introductorio
 - Algoritmo de Rasgado
 - Obtención de las Ecuaciones de Estado
- 3 Sistemas de Índice Alto
 - Ejemplo Introductorio
 - Algoritmo de Pantelides
 - El índice de perturbación de una DAE
 - Elección de las Variables de Estado
- 4 DAEs y Diagramas de Bloques
 - Diagramas de Bloques y Relaciones Causales
 - **Procedimiento para obtener un DB desde una DAE**
 - Diagramas de Bloques y Lazos Algebraicos
 - Diagramas de Bloques y Sistemas de Índice Alto

Procedimiento para obtener un DB desde una DAE

- 1 Elegir una variable de la DAE y colocar una flecha en el DB con dicha señal.
- 2 Tomar una señal del DB que no esté calculada por ningún bloque.
- 3 Buscar una ecuación de la DAE donde aparezca dicha variable:
 - Si es un estado $x_i(t)$ usar la ecuación $x_i(t) = \int \dot{x}_i(t)$.
 - Si es una derivada $\dot{x}_i(t)$ y no quedara otra ecuación, usar $\dot{x}_i(t) = \frac{d}{dt}x_i(t)$.
- 4 Agregar un bloque que calcule la señal según la ecuación elegida.
- 5 Eliminar la ecuación utilizada de la DAE.
- 6 Si las variables de entrada al bloque agregado ya están calculadas en el DB como salida de otro bloque, conectarlas.
- 7 Si queda alguna variable en el DB que aún no es salida de ningún bloque, volver al paso 2.

De la DAE al DB - Ejemplo

Veremos entonces estos pasos sobre el modelo del circuito RLC serie de la Ec.(3.1), simplificado tras **eliminar las ecuaciones triviales**:

$$u_R(t) - R \dot{q}(t) = 0 \quad (3.24a)$$

$$q(t) - C u_C(t) = 0 \quad (3.24b)$$

$$\phi(t) - L \dot{q}(t) = 0 \quad (3.24c)$$

$$u_S(t) - v(t) = 0 \quad (3.24d)$$

$$\dot{\phi}(t) + u_R(t) + u_C(t) - u_S(t) = 0 \quad (3.24e)$$

De la DAE al DB - Ejemplo

$$u_R(t) - R \dot{q}(t) = 0$$

$$q(t) - C u_C(t) = 0$$

$$\phi(t) - L \dot{q}(t) = 0$$

$$u_S(t) - v(t) = 0$$

$$\dot{\phi}(t) + u_R(t) + u_C(t) - u_S(t) = 0$$

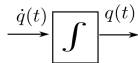


Figura 3.6: Construcción del DB a partir del sistema de DAEs de la Ec.(3.26).

De la DAE al DB - Ejemplo

$$u_R(t) - R \dot{q}(t) = 0$$

$$q(t) - C u_C(t) = 0$$

$$\phi(t) - L \dot{q}(t) = 0$$

$$u_S(t) - v(t) = 0$$

$$\dot{\phi}(t) + u_R(t) + u_C(t) - u_S(t) = 0$$

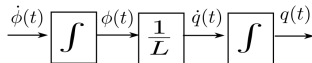


Figura 3.7: Construcción del DB a partir del sistema de DAEs de la Ec.(3.26).

De la DAE al DB - Ejemplo

$$u_R(t) - R \dot{q}(t) = 0$$

$$q(t) - C u_C(t) = 0$$

$$\phi(t) - L \dot{q}(t) = 0$$

$$u_S(t) - v(t) = 0$$

$$\dot{\phi}(t) + u_R(t) + u_C(t) - u_S(t) = 0$$

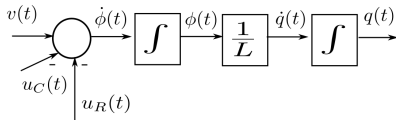


Figura 3.8: Construcción del DB a partir del sistema de DAEs de la Ec.(3.26).

De la DAE al DB - Ejemplo

$$u_R(t) - R \dot{q}(t) = 0$$

$$q(t) - C u_C(t) = 0$$

$$\phi(t) - L \dot{q}(t) = 0$$

$$u_S(t) - v(t) = 0$$

$$\dot{\phi}(t) + u_R(t) + u_C(t) - u_S(t) = 0$$

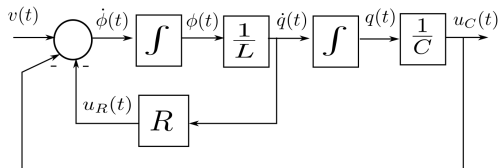


Figura 3.9: Construcción del DB a partir del sistema de DAEs de la Ec.(3.26).

Organización de la Presentación

- 1 Ordenamiento y Causalización de Ecuaciones
 - Modelos Implícitos y Explícitos
 - Algoritmo de Ordenamiento Horizontal y Vertical
 - Eliminación de Ecuaciones Triviales
 - Obtención de las Ecuaciones de Estado
- 2 Lazos Algebraicos
 - Ejemplo Introdutorio
 - Algoritmo de Rasgado
 - Obtención de las Ecuaciones de Estado
- 3 Sistemas de Índice Alto
 - Ejemplo Introdutorio
 - Algoritmo de Pantelides
 - El índice de perturbación de una DAE
 - Elección de las Variables de Estado
- 4 DAEs y Diagramas de Bloques
 - Diagramas de Bloques y Relaciones Causales
 - Procedimiento para obtener un DB desde una DAE
 - **Diagramas de Bloques y Lazos Algebraicos**
 - Diagramas de Bloques y Sistemas de Índice Alto

Diagramas de Bloques y Lazos Algebraicos

Consideremos nuevamente el ejemplo del circuito RL que contenía un lazo algebraico, dado por la Ec.(3.8). Eliminando las ecuaciones triviales y alias obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(t) - R_1 i_{R_1}(t) &= 0 \\ \dot{\phi}(t) - R_2 i_{R_2}(t) &= 0 \\ \phi(t) - L i_L(t) &= 0 \\ i_L(t) + i_{R_1}(t) + i_{R_2}(t) &= 0 \end{aligned}$$

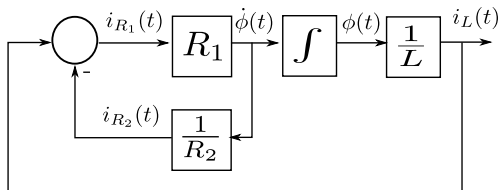


Figura 3.10: DB con lazo algebraico.

El lazo algebraico se refleja en el DB en un **camino cerrado** a través de **bloques estáticos**.

Organización de la Presentación

- 1 Ordenamiento y Causalización de Ecuaciones
 - Modelos Implícitos y Explícitos
 - Algoritmo de Ordenamiento Horizontal y Vertical
 - Eliminación de Ecuaciones Triviales
 - Obtención de las Ecuaciones de Estado
- 2 Lazos Algebraicos
 - Ejemplo Introdutorio
 - Algoritmo de Rasgado
 - Obtención de las Ecuaciones de Estado
- 3 Sistemas de Índice Alto
 - Ejemplo Introdutorio
 - Algoritmo de Pantelides
 - El índice de perturbación de una DAE
 - Elección de las Variables de Estado
- 4 DAEs y Diagramas de Bloques
 - Diagramas de Bloques y Relaciones Causales
 - Procedimiento para obtener un DB desde una DAE
 - Diagramas de Bloques y Lazos Algebraicos
 - Diagramas de Bloques y Sistemas de Índice Alto

