# Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

## Examen

20 de febrero de 2024

| Nº Lista | Apellido, Nombre | Cédula | Firma |
| --- | --- | --- | --- |
| | | | |

**IMPORTANTE**

- La duración del examen es de tres horas y media.
- No se permite usar ni calculadora ni material de consulta.
- El examen tiene 6 ejercicios de múltiple opción y dos ejercicios de desarrollo.
- En cada ejercicio de múltiple opción solo hay una opción correcta.
- La comprensión de la letra de los ejercicios es parte de la prueba.
- **Tenga cuidado al pasar las respuestas. Para los ejercicios de múltiple opción lo completado en el cuadro de abajo será lo único tenido en cuenta a la hora de corregir.**

**MÚLTIPLE OPCIÓN (Total: 60 puntos)**

Llenar cada casilla con las respuestas **A**, **B**, **C**, **D** o **E**, según corresponda.

| **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| | | | | | |

**Correctas: 10 puntos. Incorrectas: $-2$ puntos. Sin responder: 0 puntos.**

**DESARROLLO (Total: 40 puntos)**

Los dos ejercicios de desarrollo se encuentran en la página 3.
Justifique sus respuestas.

**SOLO PARA USO DOCENTE**

| MO | D.1.1.a) | D.1.1.b) | D.1.2 | D.1.3 | D.2 | Total |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| | | | | | | |

## MÚLTIPLE OPCIÓN

**1.** Sea $y(x)$ la solución de la ecuación diferencial $y'' + 2y' + 2y = 0$ que cumple $y(0) = -1$, $y'(0) = 2$. Entonces la derivada de la solución en $x = \frac{\pi}{2}$ vale:

(A) $y'(\frac{\pi}{2}) = e^{\frac{\pi}{2}}$
(B) $y'(\frac{\pi}{2}) = 0$
(C) $y'(\frac{\pi}{2}) = e^{\frac{\pi}{2}} - e^{-\frac{\pi}{2}}$
(D) $y'(\frac{\pi}{2}) = 4e^{\frac{-\pi}{2}}$
(E) $y'(\frac{\pi}{2}) = e^{-\frac{\pi}{2}}$

---

**2.** Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ las funciones definidas como $f(x, y) = (\sin(x)y, e^{x^2+y^2})$, y $g(u, v) = \big((u + v)^3, v - u\big)$. Entonces, la entrada $(1, 1)$ (primera fila, primera columna) de $J_{g\circ f}(0, 1)$ es:

(A) $0$
(B) $\frac{3}{2}$
(C) $\frac{\pi}{2}$
(D) $3e^2$
(E) $e^{-1}$

---

**3.** Sea $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}$, y $f(x, y, z) = z$. Entonces el valor de $\iiint_D f(x, y, z)$ es:

(A) $\frac{3\pi}{2}$
(B) $1$
(C) $\frac{\pi}{8}$
(D) $\pi$
(E) $2\pi$

---

**4.** Considere las series

- $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{\frac{n^2+1}{n}} 3^{-n}$,
- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{log(n)}{n^2}$,

y la integral impropia $\int_0^1 \frac{sen(\frac{1}{x})}{x^2} dx$. Entonces:

(A) Ambas series convergen pero la integral impropia no converge.
(B) Una serie converge, la otra diverge y la integral impropia converge.
(C) Ambas series divergen y la integral impropia converge.
(D) Tanto las series como la integral impropia divergen.
(E) Ambas series y la integral impropia convergen.

**5.** Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} y - x, & \text{si } y \geq x \\ \dfrac{2x^2 y}{x^2 + y^2} + y - x, & \text{si } y < x \end{cases}$$

Entonces:

(A) Las derivadas parciales en el origen no existen.
(B) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = -1$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$, $f$ es diferenciable, y el plano tangente por $(0,0)$ es $x - y - z = 0$
(C) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = -1$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$, $f$ es diferenciable, y el plano tangente por $(0,0)$ es $x + y + z = 0$
(D) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$, $f$ es diferenciable, y el plano tangente por $(0,0)$ es $x + y - z = 0$
(E) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = -1$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$, pero $f$ no es diferenciable en el origen.

---

**6.** La parte real del complejo $(1+i)^{20}$ es:

(A) $2^{10}$
(B) $2^{20}$
(C) $0$
(D) $-2^{20}$
(E) $-2^{10}$

---

## DESARROLLO

---

**Ejercicio 1 (20 puntos)**

1. Definir límite finito de una sucesión de números reales. Es decir, completar la siguiente definición.
   Decimos que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ sii ...
2. Sean $a_n$ y $b_n$ sucesiones de números reales tales que $a_n < b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y que ambas tienen límite finito. Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.
3. En las condiciones del item anterior, ¿es cierto que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n < \lim\limits_{n\to\infty} b_n$? En caso de ser cierto, demuestre. En caso de ser falso, dé un contraejemplo.

---

**Ejercicio 2 (20 puntos)**

Sea $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\}$.
Realizar un bosquejo de $D$ y calcular $\iint_D f(x,y)$, con $f(x,y) = xe^{y^2}$.