Examen de Física Moderna

29 de julio 2023

Se deberán comunicar claramente los razonamientos seguidos para la resolución de los problemas propuestos. Las respuestas que no incluyan una correcta justificación serán consideradas incompletas.

Ejercicio 1 (40/100)

Una nave espacial de masa M inicialmente en reposo con respecto a la tierra es acelerada por el encendido de los motores que ejercen una fuerza constante F. Determine la ley del movimiento $x(t)$ en el sistema de referencia terrestre y demuestre que para valores pequeños de t se cumple

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 - \frac{1}{8}\frac{a^3}{c^2}t^4 + \cdots \tag{1}$$

La siguiente integral puede ser útil:

$$\int \mathrm{d}\xi \frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}} = \sqrt{1+\xi^2} + C \tag{2}$$

Ejercicio 2 (60/100)

A) Encuentre la solución general de la ecuación de Schrödinger.

B) Ahora considere una partícula de masa m que se mueve en un pozo de potencial infinito:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < L \\ \infty, & x < 0, x > L \end{cases}$$

(i) Demuestre que las soluciones de la parte espacial de la ecuación de Schrödinger vienen dadas por

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi}{L} x, \qquad n \in \mathbb{N}$$

(ii) Un estado cualquiera puede ser escrito como una combinación lineal de las soluciones anteriores:

$$\Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x),$$

donde a_n son números arbitrarios. Pruebe que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 = 1$$

(iii) Muestre que el valor esperado de la energía, $< E >$, para dicho estado es

$$< E >= \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 E_n,$$

siendo E_n los valores propios de la energía.

(iv) ¿Cuál es la expresión de los E_n?

C) Calcule la longitud de onda de de Broglie de la partícula anterior si se trata de un electrón con energía cinética igual a $10keV$. Justifique su respuesta especificando si realiza un cálculo relativista o una aproximación clásica.

Datos que pueden ser de utilidad:

Ecuación de Schödinger:

$$i\hbar \frac{d\Psi(\vec{r},t)}{dt} = -\frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(\vec{r},t) + V(r,t)\Psi(\vec{r},t)$$

Densidad de corriente de probabilidad:

$$j(x) = \frac{i\hbar}{2m}\left(\Psi(x,t)\frac{d\Psi^*(x,t)}{dx} - \Psi^*(x,t)\frac{d\Psi(x,t)}{dx}\right)$$

Masa del electrón: $m_e = 0,510MeV/c^2 = 9{,}1 \times 10^{-31}kg$.

Carga del electrón: $|q_e| = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C

Constante de Planck: $h = 4{,}13 \times 10^{-15}eV.s = 6,62 \times 10^{-34}J.s$

Velocidad de la luz: $c = 3{,}0 \times 10^8\ m/s$

Constante de Boltzman: $K_B = 8{,}62 \times 10^5 eV/K$

Número de avogadro: $N_{av} = 6{,}02 \times 10^{23}$ átomos/mol

Primitivas útiles:

$$\int \sin^2(Ax)dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2Ax)}{4A}$$

Solucion Ejercicio 1 Si $\mathbf{F}$ es constante entonces

$$m\frac{d(\gamma \mathbf{v})}{dt} = \mathbf{F} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{|\mathbf{v}|^2}{c^2}}} = \frac{t}{m}\mathbf{F} + \mathbf{V}$$

Si la partícula comienza en reposo, entonces $\mathbf{V} = 0$. Alineándonos con el eje x encontramos la velocidad

$$\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{F}{m}t \qquad \Rightarrow \qquad v^2 = \left(\frac{F}{m}t\right)^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad v = \frac{\frac{F}{m}t}{\sqrt{1+\left(\frac{F}{m}\frac{t}{c}\right)^2}}$$

Ahora podemos obtener la función $x(t)$ mediante integración

$$\begin{aligned} x(t) &= \int \mathrm{d}t \frac{\frac{F}{m}t}{\sqrt{1+\left(\frac{F}{m}\frac{t}{c}\right)^2}} \\ &= c^2\frac{m}{F}\int \mathrm{d}\left(\frac{F}{m}\frac{t}{c}\right)\frac{\left(\frac{F}{m}\frac{t}{c}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{F}{m}\frac{t}{c}\right)^2}} \\ &= c^2\frac{m}{F}\sqrt{1+\left(\frac{F}{m}\frac{t}{c}\right)^2} + C \end{aligned}$$

Exigiendo $x(0) = 0$ implica $C = -c^2\frac{m}{F}$ y finalmente

$$x(t) = \frac{mc^2}{F}\left[\sqrt{1+\left(\frac{F}{m}\frac{t}{c}\right)^2} - 1\right]$$

Definamos $a = \frac{F}{m}$ y expandamos

$$x(t) = \frac{c^2}{a}\left[\sqrt{1+\left(a\frac{t}{c}\right)^2} - 1\right] = \frac{1}{2}at^2 - \frac{1}{8}\frac{a^3}{c^2}t^4 + \cdots$$