Introducción a la Física Moderna
Soluciones del Examen

Ejercicio 1 .- a) El mesón K^+ en reposo tiene una energía en reposo Mc^2=494 MeV. Y visto desde el laboratorio tiene velociad v = 0,9 c. Entonces, su energía total será

$$E=\frac{Mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{494\,\mathrm{MeV}}{\sqrt{1-(0,9)^2}}=\frac{494\,\mathrm{MeV}}{\sqrt{0,19}}\approx 1133\,\mathrm{MeV}.$$

b) La vida media del mesón K^+,en un sistema solidario al mismo es τ= 1,24 x 10^{-8} s. En el sistema del laboratorio (que se mueve a -0,9 c respecto al sistema solidario al mesón), el tiempo medio se transforma mediante la dilatación relativista del tiempo:

$$\tau'=\frac{\tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{1,24\times 10^{-8}}{\sqrt{0,19}}\approx 2,84\times 10^{-8}\,\mathrm{s}.$$

c) A 0,9 c, en promedio viajarán una distancia

$$L=0,9\,c\,\tau'=0,9\times(3,0\times 10^{8}\,\mathrm{m/s})\times(2,84\times 10^{-8}\,\mathrm{s})\approx 7,67\,\mathrm{m}.$$

d) En el choque considerado se conservan el momento y la energía relativista. Trabajaremos en el sistema del laboratorio. Antes del choque tenemos:

$$E_i=Mc^2+\frac{Mc^2}{\sqrt{1-\frac{v_i^2}{c^2}}},\quad \text{y}\quad \vec{P}_i=\frac{Mv_i\,\hat{i}}{\sqrt{1-\frac{v_i^2}{c^2}}},$$ donde hemos elegido el eje horizontal igual a la dirección inicia del movimiento, y v_i=0,9 c.

Luego del choque tenemos: $$E_f=\frac{Mc^2}{\sqrt{1-\frac{v_{1f}^2}{c^2}}}+\frac{Mc^2}{\sqrt{1-\frac{v_{2f}^2}{c^2}}},\quad \text{y}$$

$$\vec{P}_f=\left[\frac{Mv_{1f}\cos(\varphi/2)}{\sqrt{1-v_{1f}^2/c^2}}+\frac{Mv_{2f}\cos(\varphi/2)}{\sqrt{1-v_{2f}^2/c^2}}\right]\hat{i}+\left[\frac{Mv_{1f}\,\mathrm{sen}(\varphi/2)}{\sqrt{1-v_{1f}^2/c^2}}-\frac{Mv_{2f}\,\mathrm{sen}(\varphi/2)}{\sqrt{1-v_{2f}^2/c^2}}\right]\hat{j},$$

donde v_{1f} y v_{2f} son las velocidades finales de los dos mesones.

De la conservación del momento lineal vertical, obtenemos $v_{1f}=v_{2f}=v_f$. Sustituyendo y usando la conservación de la energía relativista tenemos: $E_i = Mc^2 + \frac{Mc^2}{\sqrt{1-\frac{v_i^2}{c^2}}} = \frac{2Mc^2}{\sqrt{1-\frac{v_f^2}{c^2}}} = E_f$, de donde

$$E_i^2\left(1-\frac{v_f^2}{c^2}\right) = 4M^2c^4 \Rightarrow v_f = \sqrt{1-\frac{4M^2c^2}{E_i^2}} \approx 0{,}79\,c.$$

Finalmente, utilizando la conservación del momento lineal horizontal, tenemos:

$$\frac{Mv_i}{\sqrt{1-v_i^2/c^2}} = \frac{2Mv_f\cos(\varphi/2)}{\sqrt{1-v_f^2/c^2}} \Rightarrow \varphi = 2\arccos\left[\frac{v_i\sqrt{1-v_f^2/c^2}}{2v_f\sqrt{1-v_i^2/c^2}}\right] \approx 73{,}5^{\text{o}}.$$

Ejercicio 2 .- a) La energía cinética máxima de un electrón emitido al iluminarlo con luz de longitud de onda λ será $K_{\text{m1}} = h\nu - \phi = \frac{hc}{\lambda} - \phi$, donde ϕ es la función trabajo del metal, y hemos utilizado que $\lambda\nu = c$.

Si ahora iluminamos con una longitud de onda un 50% mayor, $\lambda' = \frac{3\lambda}{2}$, tenemos $K_{\text{m2}} = h\nu' - \phi = \frac{2hc}{3\lambda} - \phi$. Restando ambas ecuaciones obtenemos:

$$\frac{hc}{\lambda} - \frac{2hc}{3\lambda} = \frac{hc}{3\lambda} = K_{\text{m1}} - K_{\text{m2}} \Rightarrow \lambda = \frac{hc}{3(K_{\text{m1}} - K_{\text{m\_2}})} \approx 295\,\text{nm}.$$

b) La función trabajo queda entonces $\phi = \frac{hc}{\lambda} - K_{\text{m1}} \approx 2{,}0\,\text{eV}$.

c) La frecuencia de corte se calcula como $\nu_{\text{c}} = \frac{\phi}{h} \approx 0{,}48 \times 10^{15}\,\text{Hz}$.

d) La energía total irradiada con intensidad *I* en la placa de área *A* durante un tiempo *Δt* será $\Delta E \approx I \times A \times \Delta t \approx 2{,}0 \times 10^{-5}\,\text{J}$. A su vez, dicha energía debe poder escribirse como $\Delta E = Nh\nu$, donde N es el número de fotones que impactan el metal y *ν* su frecuencia. Cada fotón que impacta arranca un electrón de la placa, quedando esta cargada positivamente. Por lo tanto, la carga total de la placa será $\Delta Q = +Ne$, donde e es la carga elemental del electrón.

Para el caso (i) tenemos $\Delta Q = Ne = \frac{\Delta E e}{h\nu} = \frac{\Delta E e\lambda}{hc} \approx 4{,}8 \times 10^{-6}\,\text{C}$.

Análogamente, para el caso (ii), $\Delta Q = Ne = \frac{\Delta E e}{h\nu} \approx 1{,}0 \times 10^{-5}\,\text{C}$.

Ejercicio 3 .-a) Consideraremos la zona 0 definida $x <- a$, la zona 1 definida por $-a < x < 0$, la zona 2 definida por $0 < x < a$, y la zona 3 definida por $a < x$. La solución de la ecuación se verifica trivialmente para las zonas 0 y 3. Para las zonas 1 y 2, tenemos:

$$\psi_1(x)=C_1\,\text{sen}\left(\frac{2\pi x}{a}\right),\quad \frac{d\psi_1}{dx}=\frac{2\pi}{a}C_1\cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right),\quad \frac{d^2\psi_1}{dx^2}=-\frac{4\pi^2}{a^2}C_1\,\text{sen}\left(\frac{2\pi x}{a}\right);$$

$$\psi_2(x)=C_2\,\text{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right),\quad \frac{d\psi_2}{dx}=\frac{\pi}{a}C_2\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right),\quad \frac{d^2\psi_1}{dx^2}=-\frac{\pi^2}{a^2}C_2\,\text{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right);$$

respectivamente.
Sustituyendo en la ecuación de Schrödinger para las zonas correspondientes tenemos:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(-\frac{4\pi^2}{a^2}\right)C_1\,\text{sen}\left(\frac{2\pi x}{a}\right)-V_0C_1\,\text{sen}\left(\frac{2\pi x}{a}\right)=EC_1\,\text{sen}\left(\frac{2\pi x}{a}\right),$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(-\frac{\pi^2}{a^2}\right)C_2\,\text{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)+V_0C_2\,\text{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)=EC_2\,\text{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right).$$

Como esto se verifica para todo x comprendido en las respectivas zonas, y la energía E debe ser la misma en ambas zonas, tenemos:

$$E=\frac{4\hbar^2\pi^2}{2ma^2}-V_0=\frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}+V_0 \;\Rightarrow\; V_0=\frac{3\hbar^2\pi^2}{4ma^2}.$$

b) La energía queda como $E=\frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}+V_0=\frac{5\hbar^2\pi^2}{4ma^2}.$

c) Para normalizar debo tener

$$|C_1|^2\int_{-a}^{0}\text{sen}^2\left(\frac{2\pi x}{a}\right)dx+|C_2|^2\int_{0}^{a}\text{sen}^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)dx=1.$$

Adicionalmente, las condiciones de contorno son:

$$\psi_1(-a)=C_1\,\text{sen}(-2\pi)=0=\psi_0(-a),$$
$$\psi_1(0)=C_1\,\text{sen}(0)=0=C_2\,\text{sen}(0)=\psi_2(0),$$
$$\left[\frac{d\psi_1}{dx}\right]_{x=0}=\frac{2\pi}{a}C_1\cos(0)=\frac{2\pi C_1}{a}=\left[\frac{d\psi_2}{dx}\right]_{x=0}=\frac{\pi}{a}C_2\cos(0)=\frac{\pi C_2}{a},$$
$$\psi_2(a)=C_2\,\text{sen}(\pi)=0=\psi_3(a).$$

La única condición de contorno que no se cumple trivialmente (la tercera), nos dice la relación de que $C_2=2C_1$.
Sustituyendo en la condición de normalización tenemos:

$$|C_1|^2=\frac{1}{\left[\int_{-a}^{0}\operatorname{sen}^2\left(\frac{2\pi x}{a}\right)dx+4\int_{0}^{a}\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)dx\right]}=\frac{1}{\frac{a}{2}+\frac{4a}{2}}=\frac{2}{5a}.$$

Por lo tanto, a menos de una fase global arbitraria, tenemos

$C_1=\sqrt{\frac{2}{5a}}.$ y $C_2=2\sqrt{\frac{2}{5a}}.$

d) La probabilidad de encontrar la partícula en $x>0$ (en realidad, de encontrarla en la zona 2, ya que en la zona 3 la probabilidad de encontrar la partícula es nula) se calcula como:

$P(x>0)=|C_2|^2\int_0^a \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)dx=\frac{8}{5a}\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{4}{5}=0{,}8.$ Es decir que la

probabilidad de encontrar la partícula en $x>0$ (más concretamente en la zona 2) es del 80%. Observar que aquí hemos utilizado el hecho de que la constante C_2 ya estaba normalizada.