Introducción a la Física Moderna
Soluciones del Segundo Parcial

Ejercicio 1 .-

a) Si $\psi_0(x)=C\,e^{-\alpha x^2}$ tenemos $\dfrac{d\psi_0}{dx}=-2\alpha x C\,e^{-\alpha x^2}$ y $\dfrac{d^2\psi_0}{dx^2}=(-2\alpha+4\alpha^2x^2)C\,e^{-\alpha x^2}$.

Substituyendo en la ecuación de Schrödinger obtenemos:

$-\dfrac{\hbar^2}{2m}(4\alpha^2x^2-2\alpha)C\,e^{-\alpha x^2}+\dfrac{k}{2}x^2C\,e^{-\alpha x^2}=E_0C\,e^{-\alpha x^2}$, de donde, para compatibilizar los términos en x^2, se debe cumplir $\dfrac{2\hbar^2\alpha^2}{m}=\dfrac{k}{2}$, por lo tanto $\alpha=\dfrac{\sqrt{km}}{2\hbar}$.

b) A partir de compatibilizar, en la substitución anterior, los términos independientes del polinomio que multiplica la exponencial obtenemos $E_0=\dfrac{\hbar^2\alpha}{m}=\dfrac{\hbar}{2}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

c) y d) Si ahora $\psi_1(x)=A\,x\,e^{-\alpha x^2}$ tenemos $\dfrac{d\psi_1}{dx}=A(1-2\alpha x^2)e^{-\alpha x^2}$ y $\dfrac{d^2\psi_1}{dx^2}=A(-6\alpha x+4\alpha^2x^3)e^{-\alpha x^2}$. Sustituyendo en la ecuación de

Schrödinger se obtiene:

$-\dfrac{\hbar^2}{2m}(-6\alpha x+4\alpha^2x^3)A\,e^{-\alpha x^2}+\dfrac{k}{2}x^3A\,e^{-\alpha x^2}=E_1A\,x\,e^{-\alpha x^2}$, por lo cual,

compatibilizando los términos en x se debe verificar:

$E_1=\dfrac{3\hbar^2\alpha}{m}=\dfrac{3\hbar}{2}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$. Además compatibilizando los términos.en x^3 se verifica $\dfrac{2\hbar^2\alpha^2}{m}=\dfrac{k}{2}$, igual que antes, es decir, que efectivamente el valor de *α* es el mismo, y la solución es correcta.

Ejercicio 2 .- Sea la zona I definida por $x<0$, la zona II por $0<x<L$ y la zona III por $x>L$.

a) Substituyendo la solución en la ecuación de Schrödinger, para la zona I se verifica trivialmente, para la zona II tenemos $\dfrac{\hbar^2k^2}{2m}A\,\mathrm{sen}(kx)-V_0A\,\mathrm{sen}(kx)=-\dfrac{V_0}{2}A\,\mathrm{sen}(kx)$, y para la zona III tenemos $-\frac{\hbar^2 k^2}{2m} C e^{-kx} = -\frac{V_0}{2} C e^{-kx}$. Por lo tanto, para $k^2 = \frac{mV_0}{\hbar^2}$, la solución verifica Schrödinger en las 3 zonas.

b) y c) Las condiciones de contorno son:

$$\psi_{I}(0)=\psi_{II}(0)=0 \;\rightarrow\; 0=\sin(0),$$
$$\lim \psi_{III}(x)_{x\rightarrow+\infty}=0 \;\rightarrow\; \lim e^{-kx}{}_{x\rightarrow+\infty}=0 \;\text{ si } k>0,$$
$$\psi_{II}(L)=\psi_{III}(L) \;\rightarrow\; A\,\mathrm{sen}(kL)=C e^{-kL},$$
$$\left[\frac{d\psi_{II}}{dx}\right]_{x=L}=\left[\frac{d\psi_{III}}{dx}\right]_{x=L} \;\rightarrow\; kA\cos(kL)=-kCe^{-kL}.$$

Las dos primeras condiciones se verifican trivialmente. De las dos últimas se obtiene, haciendo su cociente $\tan(k L)=-1$, por lo tanto $kL=-\frac{\pi}{4}+n\pi$, con n entero. Pero por la segunda condición, debemos tener k>0; por lo tanto el mínimo valor de V_0 corresponderá al mínimo valor positivo posible de k. Entonces $kL=\frac{\sqrt{mV_0}L}{\hbar}=\frac{3\pi}{4}$, lo que corresponde al caso n=1. Entonces el valor mínimo de V_0 corresponde a $V_0=\frac{9\pi^2\hbar^2}{16L^2m}=\frac{9h^2}{64L^2m}$.

A partir de la tercera condición de contorno tenemos $C=A\,\mathrm{sen}(kL)e^{kL}$ para la relación de C y A.

d) La probabilidad de encontrar la partícula en la zona $x>L$ se calcula como: $P(x>L)=\frac{|C|^2\int_L^\infty e^{-2kx}dx}{|A|^2\int_0^L \mathrm{sen}^2(kx)dx+|C|^2\int_L^\infty e^{-2kx}dx}$.

Usando la relación entre C y A hallada en la parte (b) tenemos:

$$P(x>L)=\frac{|A|^2 e^{2kL}\mathrm{sen}^2(kL)\int_L^\infty e^{-2kx}dx}{|A|^2\left(\int_0^L \mathrm{sen}^2(kx)dx+e^{2kL}\mathrm{sen}^2(kL)\int_L^\infty e^{-2kx}dx\right)}$$
$$P(x>L)=\frac{e^{2kL}\mathrm{sen}^2(kL)\int_L^\infty e^{-2kx}dx}{\int_0^L \mathrm{sen}^2(kx)dx+e^{2kL}\mathrm{sen}^2(kL)\int_L^\infty e^{-2kx}dx}$$

Haciendo cuentas,

$$\int_0^L \operatorname{sen}^2(k\,x)\,d\,x=\left[-\frac{\operatorname{sen}(k\,x)\cos(k\,x)}{2k}+\frac{x}{2}\right]_{x=0}^{x=L}=-\frac{\operatorname{sen}(k\,L)\cos(k\,L)}{2k}+\frac{L}{2}\quad \text{y}$$

$$\int_L^\infty e^{-2k\,x}\,d\,x=\left[-\frac{e^{-2k\,x}}{2k}\right]_{x=L}^{x=\infty}=\frac{e^{-2k\,L}}{2k}.$$

Para el valor de V_0 hallado en (c) tenemos:

$$\int_0^L \operatorname{sen}^2\left(\frac{3\pi x}{4L}\right)d\,x=\frac{L}{3\pi}+\frac{L}{2}=\frac{(3\pi+2)L}{6\pi}$$

$$\int_L^\infty e^{-\frac{3\pi x}{2L}}\,d\,x=\frac{2L\,e^{-\frac{3\pi}{2}}}{3\pi}$$

Substituyendo para *P(x>L)*:

$$P(x>L)=\frac{\frac{L}{3\pi}}{\frac{(3\pi+2)L}{6\pi}+\frac{L}{3\pi}}=\frac{\frac{L}{3\pi}}{\frac{(3\pi+4)L}{6\pi}}=\frac{2}{(3\pi+4)}\approx 0{,}148$$

Es decir que la probabilidad de encontrar la partícula en $x > L$ es aproximadamente del 14,8 %.

Ejercicio 3 .-

a) Para el Germanio intrínseco a T_1= 300 K, $n_i=p_i=(N_C N_V)^{1/2}\ \exp(-E_g/(2kT)) \approx 2{,}45 \times 10^{19}$ m^{-3}. La conductividad queda como $\sigma=e\ n_i(\mu_n + \mu_p) = 2{,}28\ \Omega^{-1}\ \text{m}^{-1}$.
La resistencia de la muestra es $R = L/(\sigma A) \approx 2{,}20$ k Ω

b) Para el Germanio intrínseco a T_2= 320 K, el cálculo es análogo al anterior, solo que ahora k_B 320 K= 0,028 eV. Haciendo cuentas, ahora $n_i \approx 6{,}06 \times 10^{19}$ m^{-3}, $\sigma \approx 5{,}64\ \Omega^{-1}\ \text{m}^{-1}$ y $R \approx 887\ \Omega$.

c) Ahora tenemos $N_d >> n_i$, con $n\ p = n_i^2$ y $n=p+N_d$, como $p=n_i^2/n$, tenemos $n >> p$ y $n \approx N_d$, entonces $\sigma \approx e\ N_d\,\mu_n$.
La resistencia es $R= L/(\sigma A) = 5\ \Omega$. Entonces tenemos
$N_d \approx L/(R\ A\ e\ \mu_n) \approx 1{,}60 \times 10^{22}$ m^{-3}.

d) La resistencia sigue siendo R=5 Ω, porque sigo en las mismas hipótesis de (c).