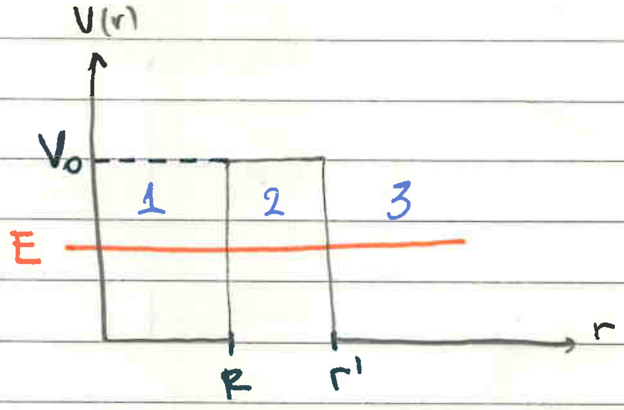
SOLUCIONES PARCIAL 2 FÍSICA MODERNA 2013 (6/12/13)

Problema 1 :

Ec. de Schrödinger indep. de t

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi'' + (V-E)\varphi = 0$$



a) Ecuación de Schrödinger indep. de t en las zonas 1, 2 y 3:

(1) $$-\frac{\hbar^2}{2m_\alpha}\varphi_1''(r) - E\varphi_1(r) = 0 \Rightarrow \varphi_1(r) = A e^{-ik_1 r} + B e^{ik_1 r}$$

con $k_1 = \sqrt{\frac{2m_\alpha E}{\hbar^2}}$

(2) $$-\frac{\hbar^2}{2m_\alpha}\varphi_2''(r) + (V_0 - E)\varphi_2(r) = 0 \Rightarrow \varphi_2(r) = C e^{\beta x} + D e^{-\beta x}$$

con $k_2 = \sqrt{\frac{2m_\alpha(E-V_0)}{\hbar^2}} = i\beta$ con β real $\beta = \sqrt{\frac{2m_\alpha(V_0-E)}{\hbar^2}} > 0$

(3) $$-\frac{\hbar^2}{2m_\alpha}\varphi_3''(r) - E\varphi_3(r) = 0 \Rightarrow \varphi_3(r) = F e^{-ik_3 r}$$ (no hay onda reflejada)

$k_3 = k_1$

Las condiciones que deben cumplirse son:

$\varphi_1(0) = 0$ ($V(0) = \infty$) , y la continuidad de φ y φ' en $r = R$ y r':

$\varphi_1(R) = \varphi_2(R)$ $\qquad \varphi_2(r') = \varphi_3(r')$

$\varphi_1'(R) = \varphi_2'(R)$ $\qquad \varphi_2'(r') = \varphi_3'(r')$

b) La probabilidad de que se emita una partícula α, es la de encontrarla fuera del núcleo: es el coeficiente de transmisión $T = \frac{v_3 |F|^2}{v_1 |A|^2}$, se calcula resolviendo el sistema de ecuaciones anterior

2º Parcial Fismod 2013

Problema 1. Cortimación

Cuando la opacidad de la barrera es $\Gamma \gg 1$, podemos aproximar:

c) $T = 16\varepsilon(1-\varepsilon)^{1/2}\, e^{-2ka}$, con $ka = \Gamma(1-\varepsilon)^{1/2}$

$\varepsilon = E/V_0$

y $\Gamma = \left(\dfrac{8\pi^2 m_\alpha V_0 a^2}{h^2} \right)^{1/2} \gg 1$

De la gráfica estimamos $V_0 \approx 25\ \text{MeV}$, $E \simeq 9\ \text{MeV}$

$a = r' - R = 18\,f = 18 \times 10^{-15}\ \text{m}$

$m_\alpha = 2(m_{neutrón} + m_{protón}) \approx 6{,}7 \times 10^{-27}\ \text{kg}$

Entonces se obtiene : $\Gamma \simeq 40$ y $T \approx 7{,}5 \times 10^{-28}$

Problema 2

I) Ec de Schrödinger general

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x,t) + V(x)\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t)$$

Si $\Psi(x,t) = \varphi(x)\phi(t)$, sustituimos y queda

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\varphi''(x)\,\phi(t) + V(x)\,\varphi(x)\,\phi(t) = i\hbar\,\varphi(x)\,\phi'(t)$$ entonces

$$\underbrace{\frac{1}{\varphi(x)}\left\{\frac{-\hbar^2}{2m}\varphi''(x) + V(x)\varphi(x)\right\}}_{\text{sólo depende de } x} = \underbrace{i\hbar\frac{\phi'(t)}{\phi(t)}}_{\text{sólo depende de } t} = E$$

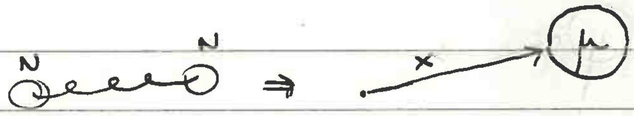
Ambos son iguales a una constante que llamamos E

Entonces la ec. indep. de t queda:

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\varphi''(x) + V(x)\varphi(x) = E\varphi(x)$$

II) Oscilador armónico

a) Paso a un sistema de una partícula de masa reducida



$$\mu = \frac{m_N \cdot m_N}{m_N + m_N} = \frac{m_N}{2} = 7\ \text{u.m.a.s} = \Rightarrow \boxed{7 \cdot 1{,}66\times10^{-27}\ \text{kg} = \mu}$$

$$\Delta E_{\substack{\text{potencial}\\\text{elástica}}} = \frac{k(x-x_{eq})^2}{2} \Rightarrow 1\ \text{eV} = \frac{k}{2}(0{,}1\times10^{-9}\ \text{m})^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{k = 2{,}0\times10^{20}\ \frac{\text{eV}}{\text{m}^2} = 32\ \text{J/m}^2 = 32\ \text{N/m}}$$ es la constante del "resorte"

Problema 2 / 2º Parcial Fismod 6/12/13

b) $$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\varphi_0''(z) + (V(z)-E_0)\varphi_0(z) = 0 \quad (*)$$

Donde $V(z)$ es el potencial elástico, función de la variable $z = x - x_{eq}$ (estiramiento) del resorte. $\varphi_0(z) = A e^{-\alpha z^2}$ y la energía del primer estado del oscilador armónico simple es $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$, con $\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$, la frecuencia natural de oscilación del resorte.

El desarrollo de Taylor en torno a x_{eq} del potencial es
$V(x) = V(x_{eq}) + \frac{d^2V}{dx^2}(x-x_{eq}) \Rightarrow V(z) = \frac{kz^2}{2}$ y tomamos $V(x_{eq})$ como referencia.

La distancia de equilibrio es tal que:

$$\left.\frac{dV(x)}{dx}\right|_{x_{eq}} = 0 \Rightarrow kx_{eq} - b = 0 \Rightarrow x_{eq} = \frac{b}{k}$$

Sustituyendo $\varphi_0(z) = A e^{-\alpha z^2}$ en $(*)$, y tomando en cuenta que debe ser válido $\forall z$, en particular para $z=0$ tenemos:

$\varphi_0''(z) = A(4z^2\alpha^2 - 2\alpha)e^{-\alpha z^2}$ y queda:

$$A\left\{-\frac{\hbar^2}{2\mu}(4z^2\alpha^2-2\alpha)e^{-\alpha z^2} + \left(\frac{kz^2}{2} - \frac{1}{2}\hbar\sqrt{\frac{k}{\mu}}\right)e^{-\alpha z^2}\right\} = 0$$

Para $z=0$ $$\frac{\alpha\hbar^2}{\mu} - \frac{1}{2}\hbar\sqrt{\frac{k}{\mu}} = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\sqrt{\mu k}}{2\hbar^2}$$

c) $b = kx_{eq} = 32\ \text{N/m} \cdot 0{,}11\times10^{-9}\ \text{m} = 3{,}52\times10^{-9}\ \text{N}$

Niveles de energía de la molécula: son los niveles de energía de este oscilador armónico $E_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\sqrt{\frac{k}{\mu}} = \left(n+\frac{1}{2}\right)3{,}86\times10^{-20}\ \text{J}$

Problema 2 2° Parcial FisMod 6/12/13

d) Valor medio de la cantidad de movimiento de la molécula en el primer estado:

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \qquad \langle \hat{p} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x,t)\left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi(x,t)\right) dx$$

El estado es: $\Psi_0(x,t) = \varphi_0(x)\, e^{-iE_0 t}$

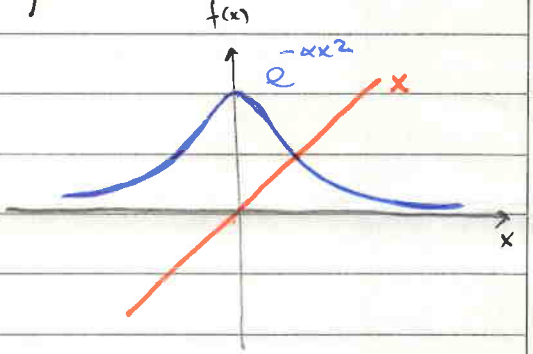
$$\frac{\partial}{\partial x} \Psi_0(x,t) = \varphi_0'(x) e^{-iE_0 t} = A(2\alpha x)\, e^{-\alpha x^2 - iE_0 t}$$

Entonces

$$\langle \hat{p} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(A^* e^{-\alpha x^2 + iE_0 t}\right)\left(A\, 2\alpha x\, e^{-\alpha x^2 - iE_0 t}\right) dx$$

$$\langle \hat{p} \rangle = 2\alpha |A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} x\, e^{-2\alpha x^2}\, dx = 0$$

Función par en $\{-\infty, +\infty\}$ — Función impar en $\{-\infty, +\infty\}$



El valor medio de la cantidad de movimiento del estado base del oscilador armónico, es cero.