Solución Primer Parcial 2012

1. Ejercicio 1

En el modelo atómico de Bohr, la energía de un electrón con número cuántico n (medida con respecto a la referencia tomada al fijar el potencial electrostático en cero en infinito) es

$$E_n = -\frac{Z^2 13{,}6eV}{n^2}. \tag{1}$$

Luego de que un electrón es arrancado del nivel de energía $n = 1$ del átomo de cromo, sucede una transición de un electron del nivel $n = 2$ al nivel $n = 1$. La energía liberada en esta transición es

$$E = E_2 - E_1 = Z^2 13{,}6eV(1 - \frac{1}{2^2}) = 5875eV. \tag{2}$$

Esta energía es adquirida por un electron en el nivel de energía correspondiente al número cuántico $n = 4$.

Para liberar del átomo a un electrón en un nivel de energía n, es necesario entregarle una cierta energía, llamada energía de ionización. La energía de ionización se calcula en este caso (ver sugerencia) como la energía necesaria para llevar a cero la energía del electrón, es decir, en el caso de un electrón con $n = 4$

$$E_i = 0 - E_4 = \frac{Z^2 13{,}6eV}{4^2} = 490eV. \tag{3}$$

Cuando el electrón del nivel $n = 4$ es liberado del átomo luego de recibir una energía E, la energía cinética que adquiere es por lo tanto

$$K = E - E_i = 5385eV \tag{4}$$

2. Ejercicio 2

2.1. Parte a)

La energía y el momento totales del sistema se conservan antes y después de la desintegración:

$$E_i = E_f \tag{5}$$

y

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f. \tag{6}$$

Estas relaciones valen en cualquier sistema de referencia.

En el referencial del centro de masa la partícula de masa M_0 se encuentra inicialmente en reposo por lo que $\vec{p}_{i,CM} = 0$, lo cual implica debido a las relaciones de conservación que $\vec{p}_{f,CM} = 0$. Si llamamos 1 y 2 a las partículas de masa m_0 creadas luego de la desintegración, el momento final total (en el ref. del CM.) es

$$\vec{p}_{f,CM} = \vec{p}_{1,CM} + \vec{p}_{2,CM} \tag{7}$$

de los que se concluye que

$$\vec{p}_{1,CM} = -\vec{p}_{2,CM} \tag{8}$$

Dado que la partícula de masa M_0 se encuentra en reposo en el ref. del CM antes de la desintegración, la energía inicial del sistema en dicho sistema de referencia será la energía en reposo de esta partícula, $E_{i,CM} = M_0 c^2$. La energía final es la suma de las energías de las partículas 1 y 2. Recordando la relación energía momento

$$E^2 - |\vec{p}|^2 c^2 = (m_0 c^2)^2, \tag{9}$$

se tiene que las partículas 1 y 2, al tener momentos opuestos en el referencial del CM, deberán pues tener ambas la misma energía en dicho referencial. De esto último y de la conservación de la energía se encuentra entonces que

$$E_{1,CM} = E_{2,CM} = \frac{M_0 c^2}{2} \tag{10}$$

Las partículas creadas luego de la desintegración tienen momentos opuestos en el ref. del CM, por lo tanto en dicho ref. se mueven en una misma dirección en sentidos opuestos. Llamando y a esta dirección tenemos que la única componente no nula del momento en el ref. del CM es $p_{y,1,CM} = -p_{y,2,CM}$. Utilizando la relación energía momento, el valor recién hallado de la energía de las partículas y la relación de masas de la letra se tiene

$$p_{y,1,CM} = \frac{3}{4} m_0 c \tag{11}$$

Para calcular las velocidades utilizamos que

$$\vec{p} = m_0 \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - (\frac{|\vec{v}|}{c})^2}}. \tag{12}$$

De esto último se obtiene

$$v_{y,1,CM} = \frac{3}{5}c \tag{13}$$

$$v_{x,1,CM} = v_{z,1,CM} = 0 \tag{14}$$

$$\vec{v}_{1,CM} = -\vec{v}_{2,CM} \tag{15}$$

2.2. Parte b)

Del punto de vista del laboratorio se observa que la partícula de masa M_0 se está moviendo con velocidad $v = 0{,}8c$ en la dirección x antes de la desintegración. De la parte anterior, se tiene la velocidad de la partícula en el sistema de referencia del CM. Dado que este sistema de ref se mueve con velocidad v en la dirección x con respecto al sistema de referencia del laboratorio, se pueden usar las formulas de cambio de sistema de referencia de la velocidad para hallar las velocidades de las partículas emitidas luego de la desintegración. Se tiene entonces para la partícula 1:

$$v_{x,1,LAB} = \frac{v_{x,1,CM} + v}{1 + \frac{vv_{x,1,CM}}{c^2}} = v = 0{,}8c \tag{16}$$

$$v_{y,1,LAB} = \frac{v_{y,1,CM} + v}{\gamma(v)(1 + \frac{vv_{x,1,CM}}{c^2})} = 0{,}36c \tag{17}$$

Para la partícula 2:

$$v_{x,2,LAB} = v_{x,1,LAB} = v = 0{,}8c \tag{18}$$

$$v_{y,2,LAB} = -v_{y,1,LAB} = 0{,}36c \tag{19}$$

La masa relativista vista por el laboratorio es igual para ambas partículas y vale

$$m(|\vec{v}|) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (\frac{|\vec{v}|}{c})^2}} = 2{,}1m_0. \tag{20}$$

El ángulo que forman ambas partículas en el ref. del laboratorio es

$$\theta = 48{,}5^\circ \tag{21}$$

3. Ejercicio 3

3.1. Parte a

Consideremos un sistema de referencia S solidario al receptor en tierra, y un sistema de referencia S' solidario al emisor viajando a velocidad $v > 0$ con respecto a S en la dirección x. El diagrama de Minkowski correspondiente al proceso de emisión y recepción de pulsos se muestra en la figura 1, donde los eventos A y B corresponden a la emisión del primer y segundo pulso y los eventos C y D en la recepción en tierra de los respectivos pulsos. Dado que la parte b) de el ejercicio propone estudiar la radiación electromagnética emitida por un objeto astronómico, consideraremos que estos pulsos son emitidos a la velocidad del la luz c (recordar que esta velocidad es la misma en cualquier sistema de referencia).

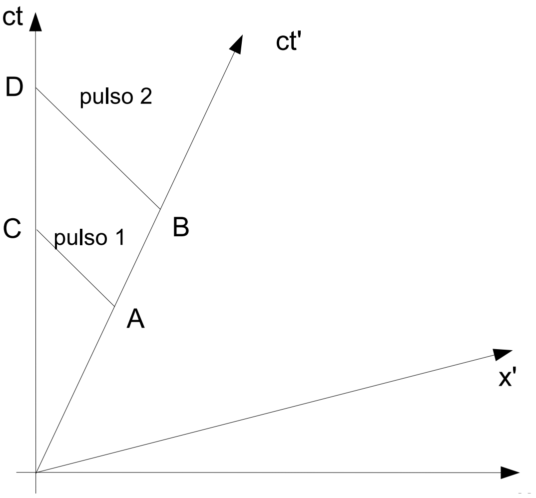

Figura 1: Diagrama de Minkowski - Ejercicio 2 a)

Se desea hallar la separación temporal entre los eventos de recepción de los pulsos en tierra, es decir la cantidad T dada por

$$T = t_C - t_D, \tag{22}$$

donde t_C y t_D son los tiempos de los eventos C y D medidos en el reloj en tierra (sistema S).

Por letra, en el sistema de referencia del emisor (S'), la separación temporal entre los eventos de emisión A y B es

$$t'_B - t'_A = \tau. \tag{23}$$

Dado que estos dos eventos suceden en el mismo punto del espacio en el sistema S' (en el emisor, o sea el origen de coordenadas de S'), para hallar el intervalo de tiempo entre estos dos eventos del punto de vista del sistema S apelamos a la formula de dilatación temporal

$$t_B - t_A = \gamma(v)\tau. \tag{24}$$

Si en el evento A el emisor se encuentra a una distancia d_0 del receptor medida en el sistema de referencia S, es decir que $x_A = d_0$, entonces, dado que el emisor se mueve a una velocidad v del punto de vista de S, este se encontrara en el evento B en una posición en ese sistema de referencia dada por

$$x_B = d_0 + v(t_B - t_A) = d_0 + v\gamma(v)\tau \tag{25}$$

Los tiempos de los eventos C y D medidos en el sistema S serán entonces los tiempos de los respectivos eventos de emisión en S mas el tiempo que le toma (del punto de vista de S) a cada pulso recorrer la distancia entre su lugar de emisión y el receptor:

$$t_C = t_A + \frac{x_A}{c} = t_A + \frac{d_0}{c} \tag{26}$$

$$t_D = t_B + \frac{x_B}{c} = t_B + \frac{d_0 + v\gamma(v)\tau}{c} \tag{27}$$

Como $t_B = t_A + \gamma(v)\tau$, tenemos para $T = t_C - t_D$:

$$T = \tau\gamma(v)(\frac{v}{c} + 1) = \tau\frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \tau\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \tag{28}$$

donde $\beta = \frac{v}{c}$.

3.2. Parte b

La frecuencia de una onda monocromática (sinusoidal) es el inverso del tiempo transcurrido entre dos crestas consecutivas de la onda (o dos puntos cualesquiera cuyas fases difieren en un factor 2π). Si consideramos cada cresta de la onda como un pulso, en términos de lo visto en la parte anterior tenemos que la frecuencia de la onda vista por el emisor es $f' = 1/\tau$, dado que este emite dos crestas consecutivas con una diferencia temporal de τ (medida desde su sistema de referencia S'). El receptor ve transcurrir un tiempo $t_D - t_C$ entre las llegada de dos crestas consecutivas, por lo que la frecuencia medida del punto de vista de su sistema de referencia es $f = 1/T$. El resultado de la parte anterior da lugar a la relación

$$\frac{f'}{f} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \tag{29}$$

Dado que se esta considerando radiación electromagnética la velocidad de propagación de las ondas es en ambos sistemas de referencia la velocidad de la luz c, por lo que para las longitudes de onda vistas en los distintos sistemas de referencia se tiene que

$$c = f\lambda = f'\lambda', \tag{30}$$

y por lo tanto las longitudes de onda medidas en los dos sistemas de referencia distintos verifican

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}. \tag{31}$$

Utilizando que el cuasar debe emitir radiación con longitud de onda $\lambda' = 656{,}3nm$ y que la radiación observada en tierra tiene longitud de onda $\lambda = 725{,}6nm$ se concluye que el cuasar se está alejando de la tierra a una velocidad $v = \beta c$ con

$$\beta = \frac{\frac{\lambda}{\lambda'}^2 - 1}{\frac{\lambda}{\lambda'}^2 + 1} = 0{,}1 \tag{32}$$