Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Examen

26 de febrero de 2022

Nº Lista	Apellido, Nombre	Cédula	Firma
0000	**Doe, John**	**0.000.000-0**	JD

La duración del examen es de tres horas, y no se permite usar ni calculadora ni material de consulta. La comprensión de las preguntas es parte de la prueba.

Tenga cuidado al pasar las respuestas
Para los ejercicios de verdadero o falso y los de múltiple opción, lo completado aquí será lo único tenido en cuenta a la hora de corregir.

VERDADERO O FALSO (Total: 12 puntos)

Llenar cada casilla con las respuestas **V** o **F**, según corresponda.

1	2	3	4	5	6
V	**F**	**V**	**F**	**V**	**V**

Correctas: 2 puntos. Incorrectas: −2 puntos. Sin responder: 0 puntos.

MÚLTIPLE OPCIÓN (Total: 40 puntos)

Llenar cada casilla con las respuestas **A**, **B**, **C**, **D**, **E** o **F**, según corresponda.

1	2	3	4
A	**B**	**D**	**E**

Correctas: 10 puntos. Incorrectas: −2 puntos. Sin responder: 0 puntos.

DESARROLLO (Total: 48 puntos)

Dos ejercicios de desarrollo se encuentran en la página 3.

SOLO PARA USO DOCENTE

V/F	MO	D1	D2	Total

PARTE I: Verdadero o Falso

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como $f(x,y) = |x + e^{y^2}|$. Indicar si cada una de las siguientes afirmaciones sobre f es verdadera o falsa.

(1) f es continua en $(0,0)$.

(2) f no es continua en $(-1,0)$.

(3) f es diferenciable en $(0,0)$ y su gradiente en ese punto es $(1,0)$.

(4) Existe la derivada parcial de f respecto a x en $(-1,0)$ y vale 1.

(5) Existe la derivada parcial de f respecto a y en $(-1,0)$ y vale 0.

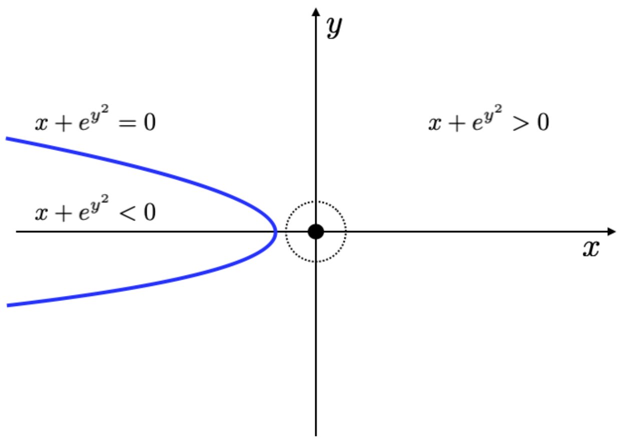
(6) f es integrable en $K = [0,1] \times [-1,1]$ y $\iint_K f = 2 \iint_{[0,1]\times[0,1]} f$.

Solución: f es una función continua en $\mathbb{R}^2$, por lo cual en particular va a ser continua en los puntos $(0,0)$ y $(-1,0)$.

En un entorno lo suficientemente pequeño de $(0,0)$, se tiene que $f(x,y) = x + e^{y^2}$, por lo cual f es una función diferenciable en dicho entorno (suma y composición de funciones diferenciables es diferenciable). En particular, se tiene que f es diferenciable en $(0,0)$. Por otro lado,

$$f_x(0,0) = 1_{(0,0)} = 1,$$
$$f_y(0,0) = 2ye^{y^2}|_{(0,0)} = 0.$$

Luego, $\nabla f(0,0) = (1,0)$.



Note que $(-1,0)$ es un punto problema de f, por lo que sus derivadas parciales allí deben calcularse por definición:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h(1,0)+(-1,0)) - f(-1,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h-1,0) - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|(h-1)+1|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} \quad \text{(no existe)}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h(0,1)+(-1,0)) - f(-1,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(-1,h) - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|e^{h^2}-1|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{h^2}-1}{h} = 0.$$

Por lo tanto, $f_x(-1,0)$ no existe y $f_y(-1,0) = 0$.

Finalmente, para la afirmación de la integral, note que para cada $x \in \mathbb{R}$ la función $y \mapsto f(x,y) = |x + e^{y^2}|$ es par. Entonces,

$$\begin{aligned} \iint_K f(x,y)\,dxdy &= \int_0^1 \left(\int_{-1}^1 |x + e^{y^2}|\,dy \right) dx = \int_0^1 \left(2\int_0^1 |x + e^{y^2}|\,dy \right) dx \\ &= 2\int_0^1 \left(\int_0^1 |x + e^{y^2}|\,dy \right) dx = 2 \iint_{[0,1]\times[0,1]} f(x,y)\,dxdy. \end{aligned}$$

PARTE II: Múltiple Opción

MO 1. Sean $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ tales que

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{xy + \log(x^2+y) - (a + bx + cy + dx^2 + ey^2 + fxy)}{x^2 + (y-1)^2} = 0.$$

Entonces la suma $a + b + c + d + e + f$ es igual a:

(A) 2

(B) 0

(C) 1

(D) -1

(E) 3

(F) -2

Solución: Utilizaremos el desarrollo de Taylor de orden 2 y centrado en $(0, 1)$ de la función

$$f(x, y) = \log(x^2 + y).$$

Tenemos que

$$f_x(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y}, \; f_y(x, y) = \frac{1}{x^2 + y}$$

y

$$f_{xx}(x, y) = \frac{2y - 2x^2}{(x^2 + y)^2}, \; f_{yy}(x, y) = -\frac{1}{(x^2 + y)^2}, \; f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = -\frac{2x}{(x^2 + y)^2}.$$

Luego:

$$\begin{aligned}
\nabla f(0,1) &= \begin{pmatrix} f_x(0,1) & f_y(0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
H_f(0,1) &= \begin{pmatrix} f_{xx}(0,1) & f_{xy}(0,1) \\ f_{xy}(0,1) & f_{yy}(0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= f(0, 1) + \nabla f(0, 1) \begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x & y-1 \end{pmatrix} H_f(0,1) \begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix} + R(x, y) \\
&= 0 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x & y-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix} + R(x, y) \\
&= x^2 - \frac{y^2}{2} + 2y - \frac{3}{2} + R(x, y),
\end{aligned}$$

donde $R(x, y)$ es una función que cumple

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{R(x, y)}{x^2 + (y-1)^2} = 0.$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{xy + \log(x^2+y) - (a + bx + cy + dx^2 + ey^2 + fxy)}{x^2 + (y-1)^2} &= 0 \\
\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{xy + x^2 - \frac{y^2}{2} + 2y - \frac{3}{2} + R(x,y) - (a + bx + cy + dx^2 + ey^2 + fxy)}{x^2 + (y-1)^2} &= 0 \\
\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{(1-f)xy + (1-d)x^2 - (e+1/2)y^2 + (2-c)y - (a+3/2) - bx}{x^2 + (y-1)^2} + \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{R(x,y)}{x^2 + (y-1)^2} &= 0 \\
\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{(1-f)xy + (1-d)x^2 - (e+1/2)y^2 + (2-c)y - (a+3/2) - bx}{x^2 + (y-1)^2} &= 0.
\end{aligned}$$

Debe cumplirse entonces que $a = -3/2$, $b = 0$, $c = 2$, $d = 1$, $e = -1/2$ y $f = 1$.

MO 2. Sea $T \subset \mathbb{R}^2$ el triángulo de vértices $(1,0)$, $(0,2)$ y $(2,4)$. Calcular la integral

$$\iint_T x\,dxdy.$$

(A) 2

(B) 3

(C) $\frac{2}{3}$

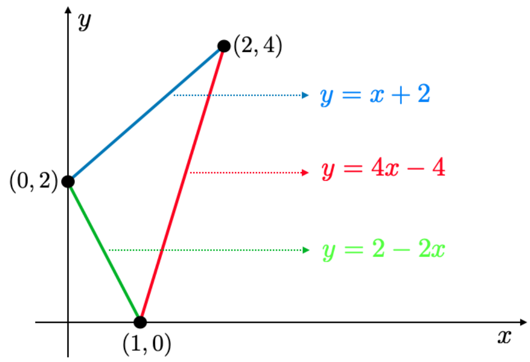
(D) $\frac{5}{3}$

(E) 4

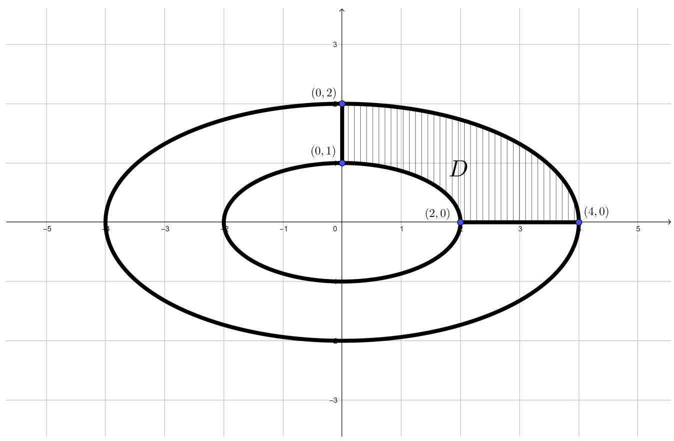
(F) $\frac{11}{2}$

Solución: Observando el dominio de integración en la figura, y usando propiedades de la integral doble, tenemos que:

$$\begin{aligned}\iint_T x\ dxdy &= \int_0^1 \left(\int_{2-2x}^{x+2} x\ dy\right) dx + \int_1^2 \left(\int_{4x-4}^{x+2} x\ dy\right) dx = \int_0^1 3x^2\ dx + \int_1^2 x(6-3x)\ dx\\ &= \int_0^1 3x^2\ dx + \int_1^2 (6x-3x^2)\ dx = x^3\big|_0^1 + (3x^2-x^3)\big|_1^2 = 1 + (12-8-3+1) = 3.\end{aligned}$$



MO 3. Consideremos la región D rayada en la figura, que está comprendida entre dos elipses y contenida en el primer cuadrante.



Calcular

$$\iint_D y\,dxdy.$$

(A) $\frac{5}{3}$

(B) $\frac{7}{3}$

(C) $\frac{11}{3}$

(D) $\frac{14}{3}$

(E) $\frac{19}{3}$

(F) $\frac{22}{3}$

Solución: Observando la figura, podemos proponer el siguiente cambio de variables para la región D:

$$x = 2r\cos(\theta),$$
$$y = r\sin(\theta),$$

con $r \in [1,2]$ y $\theta \in [0,\pi/2]$. El determinante del Jacobiano de este cambio es $2r$. Luego, por el teorema de cambio de variables, se tiene que

$$\iint_D y\,dxdy = \int_1^2 \left(\int_0^{\pi/2} r\sin(\theta)\cdot(2r)\,d\theta\right) dr = \int_1^2 2r^2 \left(\int_0^{\pi/2} \sin(\theta)\,d\theta\right) dr = \int_1^2 2r^2 \left(-\cos(\theta)|_0^{\pi/2}\right) dr$$
$$= \int_1^2 2r^2\,dr = \frac{2}{3}r^3\bigg|_1^2 = \frac{2}{3}\cdot 7 = \frac{14}{3}.$$

MO 4. Recordemos que el plano complejo $\mathbb{C}$ se puede identificar con $\mathbb{R}^2$, considerando que el número complejo $z = x + iy \in \mathbb{C}$ es el punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Consideremos el siguiente subconjunto del plano complejo:

$$A = \{z \in \mathbb{C} \ : \ z\bar{z} > 2,\ \mathrm{Re}(z) > 1,\ \mathrm{Im}(e^z) = 0\}.$$

Si ahora pensamos en A como subconjunto de $\mathbb{R}^2$, indicar cuál de las siguientes afirmaciones es correcta:

(A) A es abierto, es acotado, y acumula en $(1,1)$.

(B) A no es abierto, es acotado, y acumula en $(1,1)$.

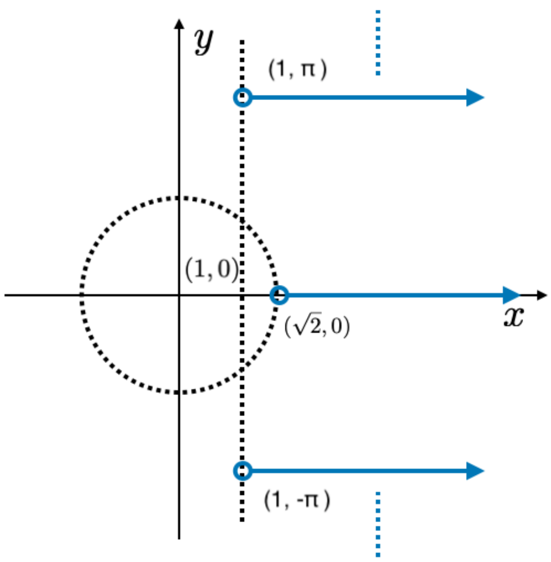
(C) A no es abierto, es acotado, y no acumula en $(1,1)$.

(D) A es abierto, no es acotado, y no acumula en $(1,1)$.

(E) A no es abierto, no es acotado, y no acumula en $(1,1)$.

(F) A no es abierto, no es acotado, y acumula en $(1,1)$.

Solución: Como $z\bar{z} = |z|^2$, tenemos que $|z| > \sqrt{2}$, por lo que todos los puntos de A están fuera del disco de centro $(0,0)$ y radio $\sqrt{2}$. La condición $\mathrm{Re}(z) > 1$ implica que todos los puntos de A están estrictamente a la derecha de la recta $x = 1$. Finalmente, si $z = x + iy$, sabemos que $e^z = e^x(\cos(y) + i\sin(y)) = e^x\cos(y) + ie^x\sin(y)$. Como $e^x\sin(y) = \mathrm{Im}(e^z) = 0$, se tiene que $\sin(y) = 0$, es decir, $y = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.



Teniendo en cuenta todas estas condiciones, A está formado por las semirrectas paralelas al eje X que parten de los puntos $(1, k\pi)$ con $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$ (sin incluirlos) con orientación a la derecha, y por la semirrecta paralela al eje X con orientación a la derecha y que parte del punto $(\sqrt{2}, 0)$ (sin incluirlo). Vemos que A no es abierto, ni acotado, y $(1,1)$ no es punto de acumulación de A.

PARTE III: Desarrollo

(Justifique detalladamente todas sus respuestas)

Desarrollo 1. [`24 pts.`] Consideremos las siguientes sucesiones de números reales:

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+2} \quad \text{con } (n \geq 2) \qquad \text{y} \qquad b_n = \frac{1}{n\ \ln(n)\ (\ln(\ln(n)))^2} \quad \text{con } (n \geq 3).$$

(A) Para la sucesión (a_n), estudiar su monotonía y convergencia. [`6 pts.`]

(B) Para la sucesión (b_n), estudiar su monotonía y convergencia. [`6 pts.`]

(C) Determinar si la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n a_n$ es absoluta y condicionalmente convergente. [`6 pts.`]

(D) Determinar si la serie $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} b_n$ converge o diverge. [`6 pts.`]

Solución:

(A) La sucesión (a_n) es estrictamente monótona decreciente, ya que

$$\begin{aligned} a_{n+1} < a_n &\iff \frac{\sqrt{n+1}}{n+3} < \frac{\sqrt{n}}{n+2} \iff (n+2)\sqrt{n+1} < (n+3)\sqrt{n} \iff (n+2)^2(n+1) < (n+3)^2 n \\ &\iff (n^2+2n+4)(n+1) < (n^2+6n+9)n \iff n^3+3n^2+6n+4 < n^3+6n^2+9n \\ &\iff 4 < 3n^2+3n, \end{aligned}$$

y la última desigualdad claramente se cumple para $n \geq 2$. Por otro lado, (a_n) está acotada inferiormente por 0, por lo cual (a_n) converge por ser monótona decreciente y acotada inferiormente.

(B) La sucesión $(\ln(n))$ es estrictamente creciente y positiva, por lo cual $(\ln(\ln(n)))$ es estrictamente creciente y positiva. Luego, $((\ln(\ln(n)))^2)$ es entonces estrictamente creciente y positiva. Tomando el producto de esta última con la sucesión $(n \ln(n))$, la cual es estrictamente creciente y positiva, obtenemos la sucesión estrictamente creciente y positiva $(n \ln(n)(\ln(\ln(n)))^2)$. Por lo tanto, (b_n) es estrictamente monótona decreciente, al ser sus términos los inversos multiplicativos de la sucesión anterior. Por otro lado, al ser (b_n) acotada inferiormente (por 0), se tiene por el mismo argumento de la parte (A) que (b_n) converge.

(C) Como la sucesión (a_n) es monótona decreciente y de términos positivos, y además

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+2} = 0 \text{ (por órdenes)},$$

se tiene por el criterio de Leibniz que la serie alternada $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n a_n$ converge. Por otro lado, consideremos la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} |(-1)^n a_n| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+2}.$$

Como $\frac{\sqrt{n}}{n+2} > \frac{1}{n+2}$ para $n \geq 2$, y la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n+2}$ diverge (por ser de la misma clase que la serie armónica), se tiene por el criterio de comparación que $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+2}$ diverge. Entonces, $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n a_n$ converge pero no absolutamente, es decir, $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n a_n$ es condicionalmente convergente.

(D) Consideramos la función $f\colon [3, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{1}{x\ \ln(x)\ (\ln(\ln(x)))^2}.$$

Note que $b_n = f(n)$. Por el mismo argumento usado en la parte (B), se tiene que f es una función estrictamente decreciente y positiva. Por otro lado, calculemos la integral impropia $\int_3^{\infty} f(x)\, dx$. Haciendo el cambio de variables $u = \ln(\ln(x))$, tenemos que $du = \frac{1}{x\ln(x)}$, de donde

$$\begin{aligned}
\int f(x)\, dx &= \int \frac{1}{x\ \ln(x)\ (\ln(\ln(x)))^2}\, dx = \int \frac{1}{u^2} du = -\frac{1}{u} + \text{constante}, \\
\int_3^c f(x)\, dx &= \frac{1}{3} - \frac{1}{c}, \\
\int_3^{\infty} f(x)\, dx &= \lim_{c\to+\infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{c}\right) = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, como $\int_3^{\infty} f(x)\, dx$ converge, se tiene por el criterio serie-integral que la serie $\sum_{n=3}^{\infty} b_n = \sum_{n=3}^{\infty} f(n)$ converge.

Desarrollo 2. [`24 puntos`] Consideremos la siguiente función escalar sobre $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = \begin{cases} y\dfrac{(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(A) Determinar si f es continua en el punto $(0,0)$. `[8 pts.]`

(B) Calcular, en caso de existir, todas las derivadas direccionales de f en el punto $(0,0)$. `[8 pts.]`

(C) Determinar si f es diferenciable en $(0,0)$. `[8 pts.]`

Solución:

(A) En un entorno reducido de $(0,0)$, tenemos que

$$f(x,y) = y\frac{(x^2-y^2)}{x^2+y^2},$$

donde $\lim_{(x,y)\to(0,0)} y = 0$ y $(x,y) \mapsto \frac{(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ es acotada. En efecto,

$$\left|\frac{(x^2-y^2)}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} \leq 1+1 = 2.$$

Entonces, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ por uno de los resultados de límites del teórico. Entonces, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$, es decir, f es continua en $(0,0)$.

(B) Consideremos un vector de dirección $\vec{v} = (v_1, v_2) \neq (0,0)$. Luego,

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(h(v_1,v_2)+(0,0)) - f(0,0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(hv_1, hv_2) - 0}{h} = \lim_{h\to 0} (hv_2) \frac{((hv_1)^2 - (hv_2)^2)}{(hv_1)^2 + (hv_2)^2} \frac{1}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} h^3 v_2 \frac{((v_1)^2 - (v_2)^2)}{h^2((v_1)^2 + (v_2)^2)} \frac{1}{h} == \lim_{h\to 0} v_2 \frac{(v_1)^2 - (v_2)^2}{(v_1)^2 + (v_2)^2} \\
&= v_2 \frac{(v_1)^2 - (v_2)^2}{(v_1)^2 + (v_2)^2}.
\end{aligned}$$

El límite anterior existe y es constante. Luego, por la definición de derivada direccional, tenemos que todas éstas existen en $(0,0)$ respecto a cualquier dirección, y valen

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \frac{v_2[(v_1)^2 - (v_2)^2]}{(v_1)^2 + (v_2)^2}.$$

(C) Probaremos que f no es diferenciable en $(0,0)$ por reducción al absurdo. Entonces, si f es diferenciable en $(0,0)$, tenemos por un resultado del teórico que

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \langle \nabla f(0,0), (v_1, v_2) \rangle = f_x(0,0)v_1 + f_y(0,0)v_2.$$

Haciendo $\vec{v} = (1,0)$ y $\vec{v} = (0,1)$ respectivamente en la expresión calculada en (B), tenemos que $f_x(0,0) = 0$ y $f_y(0,0) = -1$. Entonces,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = -v_2. \tag{1}$$

Por otro lado, usando nuevamente la expresión en (B), tenemos en particular para $\vec{v} = (1,1)$ que

$$\frac{\partial f}{\partial (1,1)}(0,0) = 0.$$

Mientras que, por otro lado si usamos (1), tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial (1,1)}(0,0) = -1,$$

obteniendo así una contradicción (a saber, $0 = -1$).