Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Segundo semestre de 2022
Segundo parcial

26 de noviembre de 2022

Nº Lista	Apellido, Nombre	Cédula	Firma

IMPORTANTE

- La duración del parcial es de tres horas y media.
- No se permite usar ni calculadora ni material de consulta.
- El parcial tiene cinco ejercicios de múltiple opción y dos ejercicios de desarrollo.
- En cada ejercicio de múltiple opción solo hay una opción correcta.
- La comprensión de la letra de los ejercicios es parte de la prueba.
- **Tenga cuidado al pasar las respuestas. Para los ejercicios de múltiple opción lo completado en el cuadro de abajo será lo único tenido en cuenta a la hora de corregir.**
- **En el desarrollo, todos los razonamientos y/o resultados a los que llegue deben ser justificados. Resultados correctos sin justificación tendrán 0 puntos.**

MÚLTIPLE OPCIÓN (Total: 40 puntos)

Llenar cada casilla con las respuestas **A**, **B**, **C**, **D** o **E**, según corresponda.

1	**2**	**3**	**4**	**5**

Correctas: 8 puntos. Incorrectas: -2 puntos. Sin responder: 0 puntos.

DESARROLLO (Total: 20 puntos)

Dos ejercicios de desarrollo se encuentran en la página 3.

SOLO PARA USO DOCENTE

MO	D.1.a)	D.1.b)	D.1.c)	D.2	Total

MÚLTIPLE OPCIÓN

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como $f(x,y) = \sin(y^2)$, y D el dominio triangular con vértices $(0,0)$, $(-1,\sqrt{\pi})$ y $(1,\sqrt{\pi})$. Entonces la integral de f en D vale:

(A) 0 (B) $\dfrac{\pi}{2}$ (C) $\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}$

(D) $\dfrac{-2}{\pi}$ (E) $\sqrt{\pi}$

---

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una función tal que $f(2,1) = (0,-1,\pi/4)$ y

$$J_f(2,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

y sea $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida como $g(u,v,w) = e^{uv} - \cos(2w)$. Si $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ está definida como $h(x,y) = g(f(x,y))$, indicar cuánto vale $\dfrac{\partial h}{\partial y}(2,1)$:

(A) $\dfrac{\partial h}{\partial y}(2,1) = 3$ (B) $\dfrac{\partial h}{\partial y}(2,1) = 0$ (C) $\dfrac{\partial h}{\partial y}(2,1) = -1$

(D) $\dfrac{\partial h}{\partial y}(2,1) = 5$ (E) $\dfrac{\partial h}{\partial y}(2,1) = -4$

---

3. El polinomio de Taylor de orden 2 de $f(x,y) = \log(x^2+y)$ en el punto $(1,0)$ es:

(A) $p_2(x,y) = 1 + 2x - y + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{2} + 3xy$

(B) $p_2(x,y) = -3 + 4x + 3y - x^2 - \dfrac{y^2}{2} - 2xy$

(C) $p_2(x,y) = 2x + y - \dfrac{x^2}{2} + y^2 - 2xy$

(D) $p_2(x,y) = 1 - 2x + y + x^2 + \dfrac{y^2}{2} + 2xy$

(E) $p_2(x,y) = 2(x-1) + y + (x-1)^2 + y^2 + (x-1)y$

---

4. Hallar el valor del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$ para el cual $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4}{y(x^2+y^2)} & \text{si } y \neq 0 \\ \alpha & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

es continua en $(0,0)$.

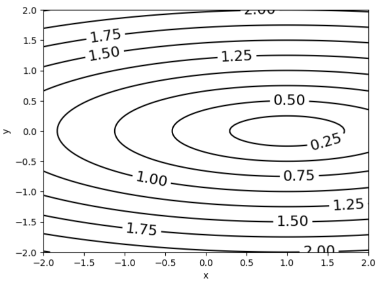
(A) $\alpha = 1$ (B) $\alpha = 0$

(C) f es discontinua en $(0,0)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ (D) $\alpha = -1$

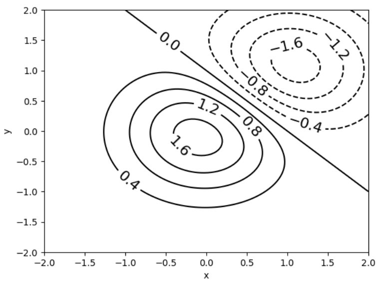
(E) $\alpha = 2$

---

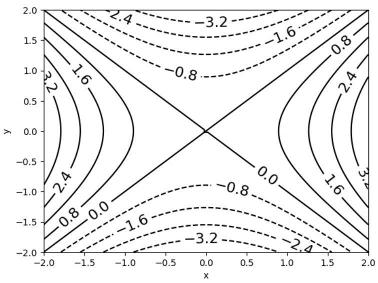
5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x,y) = \text{máx}\{x^2 + y^2, 2x\}$. Entonces, la figura que más se asemeja a las curvas de nivel de f es:



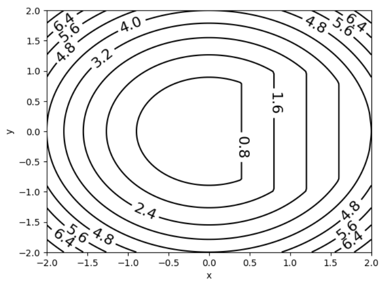
(A)



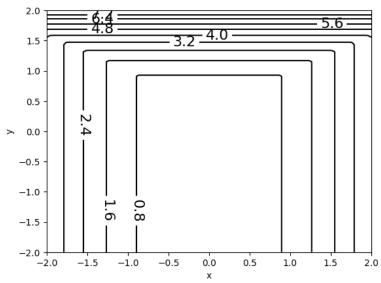
(B)



(C)



(D)



(E)

DESARROLLO

---

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función.

a) Definir diferenciabilidad de f en un punto $a = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. (Decimos que f es diferenciable en $a = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ sii ...)

b) Demostrar que si f es diferenciable en un punto a, y v es un vector en $\mathbb{R}^2$, entonces existe la derivada direccional de f respecto a v en el punto a. Calcular dicha derivada en términos de los elementos que aparecen en la definición del ítem anterior.

c) Si se sabe que f es diferenciable y que $\dfrac{\partial f}{\partial v_1}(2,3) = 6$, y $\dfrac{\partial f}{\partial v_2}(2,3) = -3$, donde $v_1 = (2,1)$ y $v_2 = (1,-1)$, calcular $\nabla f(2,3)$.

---

2. Calcular la integral de la función $f(x,y,z) = ze^{x^2+y^2}$ en el dominio:

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2\}.$$
