Parcial de CDIVV

5/10/2021

Solución de las versiones 11 y 12.

EJERCICIOS VF

1) Verdadero, ver teórico.

2) Falso. Por ejemplo, $P(z) = z - i$ tiene raíz i pero no raíz $\bar{i} = -i$.

3) Falso. Un contraejemplo es $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

4) Verdadero. Ver teórico.

EJERCICIOS MO

Ejercicio 1:

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ es geométrica de razón $\frac{1}{3}$, y converge a $\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$.

$\sum_{n=0}^{\infty} \left[e^{-(n+1)^2} - e^{-n^2} \right]$ es telescópica y converge a -1.

La serie dada converge por lo tanto a $\frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$.

Ejercicio 2:

La primera serie es de términos positivos.

$e^{-n} \leq 1$ y $\frac{n}{n^4+2n+1} \sim \frac{1}{n^3}$.

Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ converge, por el criterio de equivalentes $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^4+2n+1}$ converge. Como $\frac{ne^{-n}}{n^4+2n+1} \leq \frac{n}{n^4+2n+1}$, por el criterio de comparación $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{ne^{-n}}{n^4+2n+1}$ converge.

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, y por lo tanto $(-1)^n \sqrt[n]{n}$ no tiende a cero.

Por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt[n]{n}$ no converge (diverge).

Ejercicio 3:

$$\int_0^1 \frac{\log(x)}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{a\to 0} \int_a^1 \frac{\log(x)}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$\int_a^1 \frac{\log(x)}{\sqrt{x}}\,dx \underset{\substack{\downarrow \\ \text{integración} \\ \text{por partes}}}{=} 2\sqrt{x}\log(x)\Big|_a^1 - \int_a^1 \frac{2}{\sqrt{x}}\,dx =$$

$$= 2\sqrt{a}\log(a) - 4\sqrt{x}\Big|_a^1 = 2\sqrt{a}\log(a) - 4 + 4\sqrt{a}$$

$$\lim_{a\to 0} \sqrt{a}\log(a) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{L'Hopital}}}{=} \lim_{a\to 0} \frac{1}{a}\cdot(-2)\,a^{3/2} = \lim_{a\to 0}(-2)\sqrt{a} = 0$$

$\lim_{a\to 0} 4\sqrt{a} = 0$.

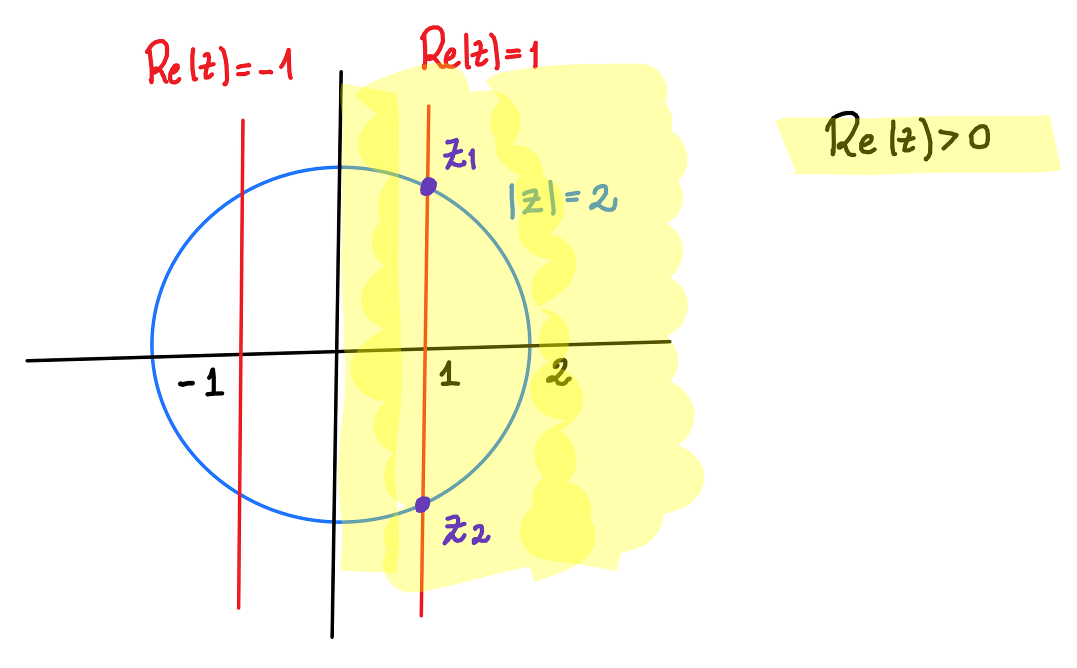
Por lo tanto $\int_0^1 \frac{\log(x)}{\sqrt{x}}\,dx = -4$.

Ejercicio 4:

$z\bar{z} = |z|^2 = 4 \iff |z| = 2$.

$\mathrm{Re}(z)^4 = 1 \iff \mathrm{Re}(z) = 1$ o $\mathrm{Re}(z) = -1$.

$|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)} > 1 \iff \mathrm{Re}(z) > 0$.



Los puntos que satisfacen las tres condiciones simultáneamente son z_1 y z_2.

$z_1 = 1 + \sqrt{3}i$, $z^2 = 1 - \sqrt{3}i$. Su producto da 4.

Ejercicio 5:

La ecuación homogénea asociada es

$$(H) \quad y'' + 5y' + 6y = 0,$$

cuyo polinomio característico es $p(x) = x^2 + 5x + 6$ y cuyas raíces características son -3 y -2. Por lo tanto la solución general de (H) es

$$y_H(x) = \alpha e^{-3x} + \beta e^{-2x}, \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Buscaremos una solución particular de la forma

$$y_p(x) = ax + b.$$

$y_p' = a$, $y_p'' = 0$.

$y_p'' + 5y_p' + 6y = 5a + 6ax + 6b = 6ax + (5a + 6b)$. Esto es igual a $6x - 1$ cuando $a = 1$ y $b = -1$.

Por lo tanto la solución general de la ecuación no homogénea es

$$\underline{y(x) = \alpha e^{-3x} + \beta e^{-2x} + x - 1.}$$

$y'(x) = -3\alpha e^{-3x} - 2\beta e^{-2x} + 1$

$y(0) = 0 \iff \alpha + \beta - 1 = 0$

$y'(0) = 0 \iff -3\alpha - 2\beta + 1 = 0$

Esto se cumple cuando $\alpha = -1$, $\beta = 2$. Por lo tanto la solución de la ecuación que satisface las condiciones iniciales dadas es

$$y(x) = -e^{-3x} + 2e^{-2x} + x - 1,$$

e $y(1) = -e^{-3} + 2e^{-2}$.

Ejercicio 6:

$a_{n+1} \geq a_n \iff 2a_n + 5 \geq a_n \iff a_n + 5 \geq 0 \iff a_n \geq -5$.

Como $a_0 = 0 \geq -5$,

$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots$, es decir, la sucesión es creciente. Por lo tanto, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puede ser acotada y converger a su supremo o ser no acotada. Si tuviera límite L, éste cumpliría

$$L = 2L + 5,$$

que sólo se satisface si $L = -5$, que es un número menor que a_0, por lo que no es el supremo de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Podemos concluir que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es no acotada.

Ejercicio 7

Estudiaremos las dos coordenadas de a_n por separado. La primera es

$$\frac{1}{3}\cdot\left(1 - e^{1/n^2}\right)\cdot n^2 = -\frac{1}{3}\,\frac{\left(e^{1/n^2} - 1\right)}{1/n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} -\frac{1}{3}.$$

Para la segunda, observemos que

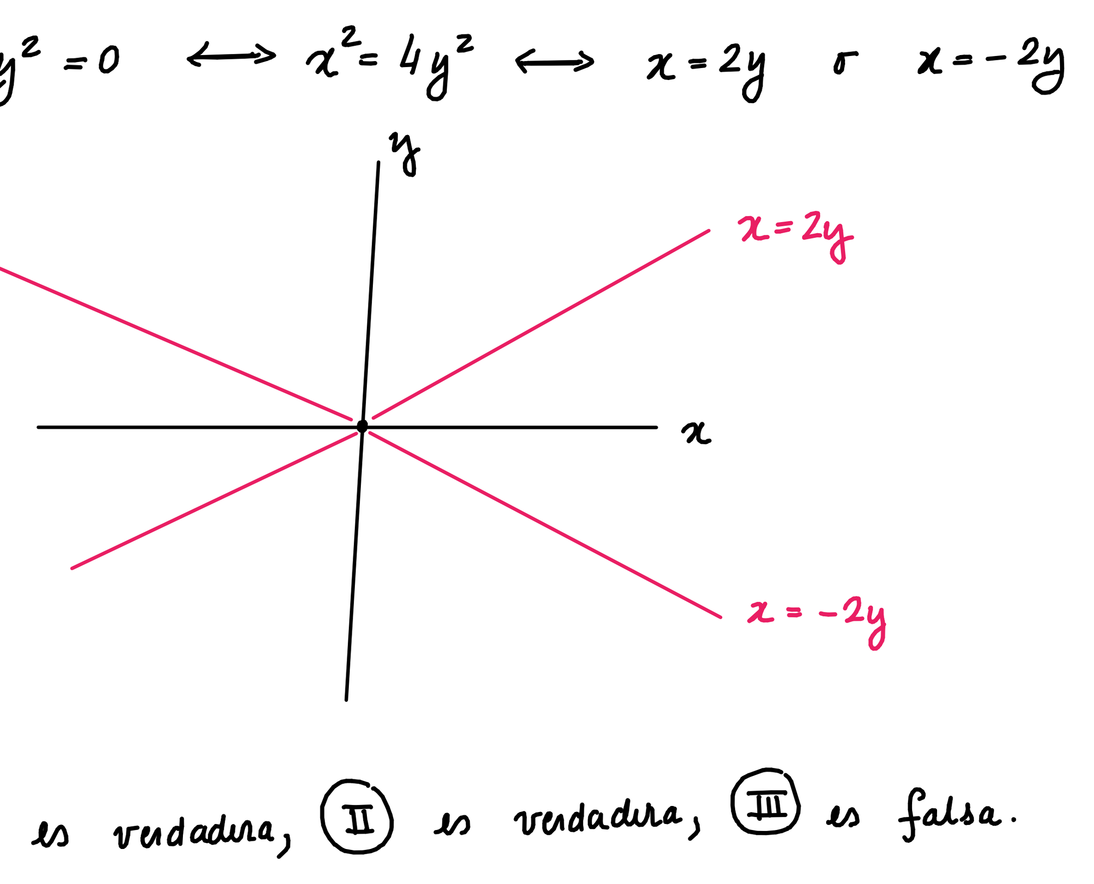
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{\log(2x+1)} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{L'Hopital}}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{2/(2x+1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{2x} = 1.$$

Por lo tanto $\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n)}{\log(2n+1)} = 1$, y $\left((-1)^n \frac{\log(n)}{\log(2n+1)}\right)_{n\geq 1}$ no converge pero está acotada y tiene subsucesiones que convergen a 1 y -1.

Por lo tanto, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada y tiene subsucesiones que convergen a $\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$ y $\left(-\frac{1}{3}, -1\right)$.

Ejercicio 8

$x^2 - 4y^2 = 0 \iff x^2 = 4y^2 \iff x = 2y$ o $x = -2y$



I es verdadera, II es verdadera, III es falsa.