

Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Segundo semestre de 2023

Segundo parcial

25 de noviembre de 2023

Nº Lista	Apellido, Nombre	Cédula	Firma

IMPORTANTE

- La duración del parcial es de tres horas y media.
- No se permite usar ni calculadora ni material de consulta.
- El parcial tiene 6 ejercicios de múltiple opción y dos ejercicios de desarrollo.
- En cada ejercicio de múltiple opción solo hay una opción correcta.
- La comprensión de la letra de los ejercicios es parte de la prueba.
- **Tenga cuidado al pasar las respuestas. Para los ejercicios de múltiple opción lo completado en el cuadro de abajo será lo único tenido en cuenta a la hora de corregir.**

MÚLTIPLE OPCIÓN (Total: 42 puntos)

Llenar cada casilla con las respuestas **A, B, C, D** o **E**, según corresponda.

1	2	3	4	5	6

Correctas: 7 puntos. Incorrectas: -1 puntos. Sin responder: 0 puntos.

DESARROLLO (Total: 18 puntos)

Los dos ejercicios de desarrollo se encuentran en la página 3.

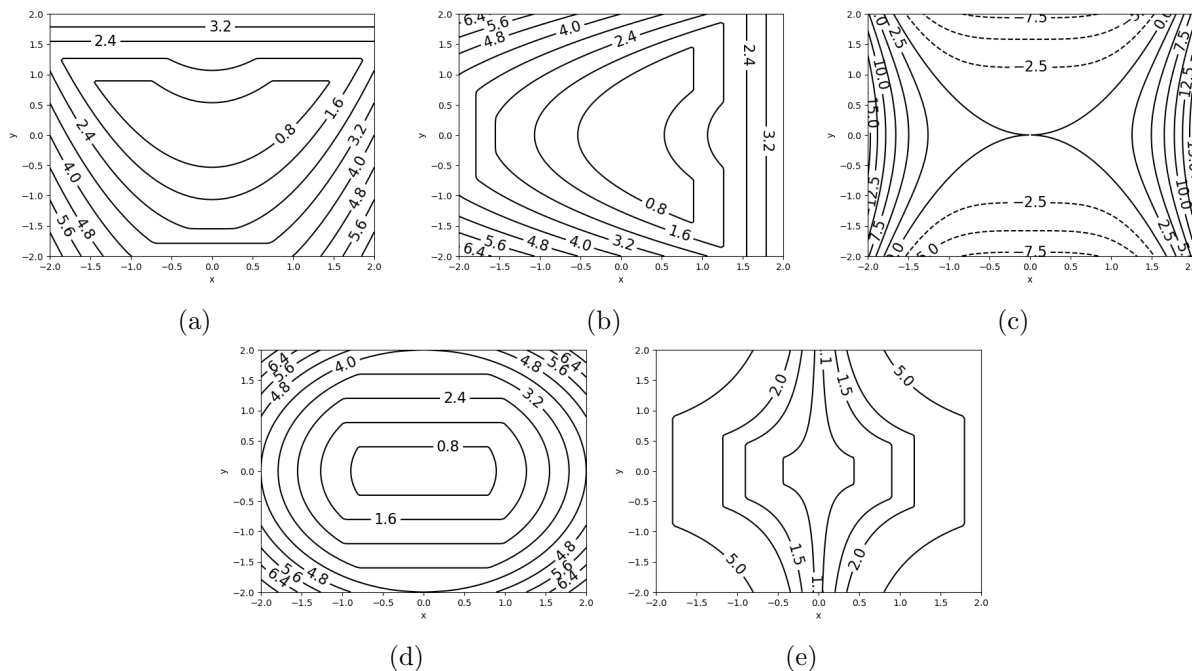
Justifique sus respuestas.

SOLO PARA USO DOCENTE

MO	D.1.1.a)	D.1.1.b)	D.1.2	D.2	Total

MÚLTIPLE OPCIÓN

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f(x, y) = e^{\max\{|xy|, x^2\}}$. Entonces, la figura que más se asemeja a las curvas de nivel de f es:



2. Sea $f(x, y)$ una función integrable, y considere la siguiente integral doble:

$$\int_0^1 \int_{y^2}^{2-\sqrt{y}} f(x, y) dx dy$$

Entonces una forma equivalente de escribir la integral es:

- (A) $\int_0^2 \int_{\sqrt{x}}^{(x-2)^2} f(x, y) dy dx$
- (B) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y) dy dx + \int_1^2 \int_0^{(x-2)^2} f(x, y) dy dx$
- (C) $\int_0^1 \int_0^{x^2} f(x, y) dy dx + \int_1^2 \int_0^{\sqrt{x-2}} f(x, y) dy dx$
- (D) $\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy dx + \int_1^2 \int_{(x-2)^2}^{\sqrt{x-2}} f(x, y) dy dx$
- (E) $\int_0^2 \int_{x^2}^{\sqrt{2-x}} f(x, y) dy dx$

3. Sean $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x, y, z) = e^{(x+y)} + \text{sen}(y+z)$, y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$ definida como $g(t) = (t^2, t^4, t^8, t^{16})$. Entonces la suma de las entradas de $J_{g \circ f}(0, 0, 0)$ es:

- (A) 1
- (B) 0
- (C) π
- (D) 120
- (E) $e + 1$

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x, y) = e^{x^2+y} - 1 - y - x^2$. Entonces el polinomio de Taylor de orden 3 de f en el punto $(0, 0)$ es:

- (A) $\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}x^3$
 - (B) $2xy + \frac{1}{3}y^3$
 - (C) $\frac{1}{2}y^2 + x^2y + \frac{1}{6}y^3$
 - (D) $\frac{1}{2}xy$
 - (E) $\frac{1}{2}x^2 + y^2 - 2xy^2$
-

5. Para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ considere la función $f_{\alpha, \beta} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida como:

$$f_{\alpha, \beta}(x, y) = \begin{cases} 3xe^{2y} & \text{si } y \geq 0 \\ \alpha x + \beta xy & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

Los valores de α y β para los cuales $f_{\alpha, \beta}$ es diferenciable en todo \mathbb{R}^2 son:

- (A) $\alpha = 1$ y $\beta = 2$
 - (B) $\alpha = 3$ y $\beta = 6$
 - (C) $\alpha = 3$ y $\beta = 3$
 - (D) $\alpha = 1$ y $\beta = 1$
 - (E) $\alpha = 0$ y $\beta = 1$
-

6. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida como: $f(x, y) = \begin{cases} \frac{y(x^2+y^2)}{x^2-y^2} & \text{si } |x| \neq |y| \\ A & \text{si } |x| = |y| \end{cases}$

Entonces el valor de A para que f sea continua en el origen es:

- (A) $A = 1$
 - (B) $A = 0$
 - (C) $A = 3/2$
 - (D) No existe A para que f sea continua
 - (E) $A = 1/2$
-

DESARROLLO

Ejercicio 1

1. Completar las siguientes definiciones.

- a) Sea $a \in \mathbb{R}^2$. Decimos que una función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en a sii ...
- b) Sea a_k una sucesión de puntos en \mathbb{R}^2 , y $a \in \mathbb{R}^2$. Decimos que $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = a$ sii ...

2. Demostrar que si a_k es una sucesión en \mathbb{R}^2 tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = a$, y f es una función continua en a , entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} f(a_k) = f(a)$

Ejercicio 2

Sea $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq 1\}$ y la función $f(x, y, z) = z$. Calcule $\iiint_D f(x, y, z)$.