Práctico 10: Integrales iteradas, integrales múltiples.

Solución ejercicio 7.c)

En este ejercicio se pide calcular el volumen del conjunto

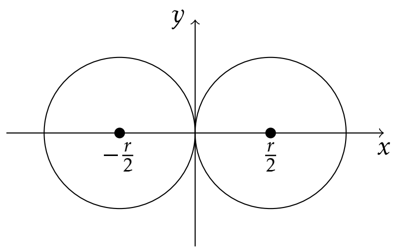
$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2,\ x^2 + y^2 \geq |rx|\}$$

Asumamos que $r > 0$ (pues si $r < 0$ obtenemos el mismo conjunto que si $r > 0$, y si $r = 0$ el conjunto es únicamente el $(0,0,0)$). Observar que la ecuación $x^2 + y^2 = r|x|$ representa, en el plano xy, dos circunferencias simétricas respecto al eje y:

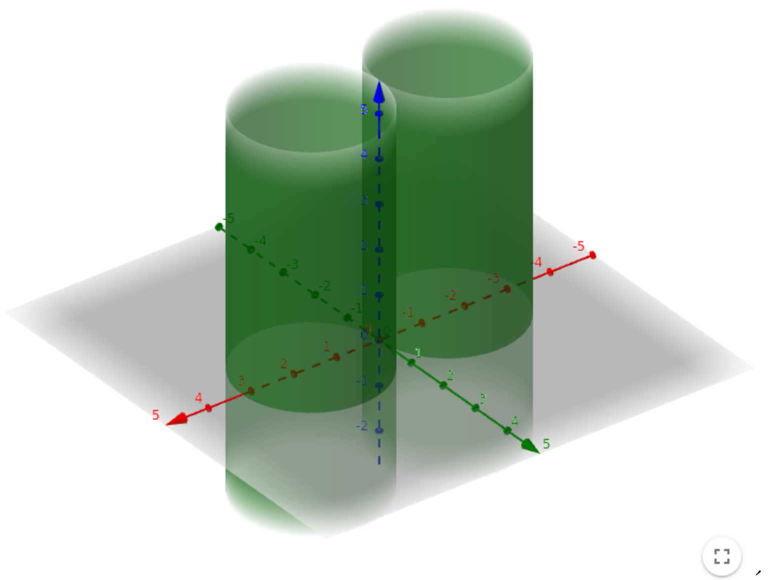
Si $x \geq 0$, tenemos $x^2 + y^2 - rx = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{r}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2$.

Si $x \leq 0$, tenemos $x^2 + y^2 + rx = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{r}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2$.

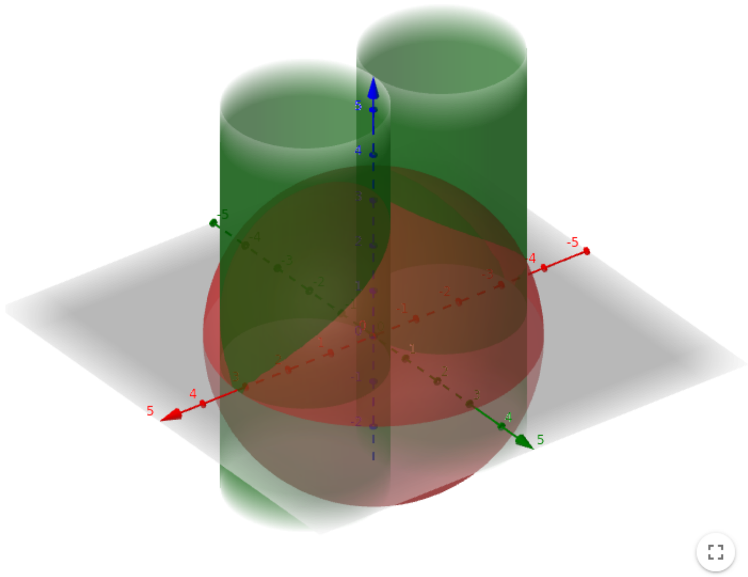
Es decir, en el plano xy, $x^2 + y^2 = r|x|$ son dos circunferencias de centro $(\pm r/2, 0)$ y radio $r/2$, como en la figura:



Por lo tanto, en $\mathbb{R}^3$, $x^2 + y^2 = r|x|$ es la ecuación de dos cilindros infinitos, simétricos respecto al eje z, como en la figura de abajo:



Los puntos de $\mathbb{R}^3$ tales que $x^2 + y^2 \geq r|x|$ serían entonces los de "afuera" de estos cilindros. Por otro lado, $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ es la ecuación de una esfera de centro en el origen y radio r. Así que el volumen a calcular es el de la esfera a la que "le sacaron" esos cilindros. Gráficamente, los conjuntos se ven así:



En el siguiente link se pueden observar ambos conjuntos en una applet interactiva de Geogebra: `https://www.geogebra.org/m/dr5sjvsv`.

El volumen a calcular sería el del conjunto de los puntos que quedan "dentro" de la esfera pero "fuera" de los cilindros. Para calcularlo, podemos calcular el volumen del conjunto de los puntos que están tanto adentro de los cilindros como de la esfera, y restarle el volumen de la esfera (que es $\frac{4}{3}\pi r^3$). Es decir, si llamamos C al conjunto

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le r^2,\, x^2+y^2 \le r|x|\}$$

entonces $\mathrm{Vol}(D) = \frac{4}{3}\pi r^3 - \mathrm{Vol}(C)$. Como el conjunto C es simétrico respecto a los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, podemos dividirlo en 8 regiones distintas de igual volumen y calcular el volumen de solo una de ellas. Llamémosle C_1 a uno de esos conjuntos (elegimos el de coordenadas positivas pero podría ser cualquier otro):

$$C_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le r^2,\, x^2+y^2 \le rx,\, x \ge 0,\, y \ge 0,\, z \ge 0\}$$

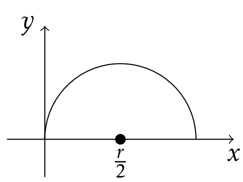
Para calcular el volumen de C_1 hagamos un cambio a coordenadas cilíndricas

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\theta \\ y &= \rho\sin\theta \\ z &= z \end{aligned}$$

con $\rho \ge 0$ y $\theta \in [0, 2\pi]$. Observemos cómo quedan cada una de las condiciones que definen a C_1 en esas nuevas coordenadas:

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 \le r^2 &\Leftrightarrow z^2 \le r^2 - x^2 - y^2 \Leftrightarrow z^2 \le r^2 - \rho^2 \\ x^2+y^2 \le rx &\Leftrightarrow \rho^2 \le r\rho\cos\theta \Leftrightarrow \rho \le r\cos\theta \\ x \ge 0 &\Leftrightarrow \rho\cos\theta \ge 0 \Leftrightarrow \cos\theta \ge 0 \Leftrightarrow \theta \in [0,\pi/2] \text{ o } \theta \in [3\pi/2, 2\pi\ ] \\ y \ge 0 &\Leftrightarrow \rho\sin\theta \ge 0 \Leftrightarrow \sin\theta \ge 0 \Leftrightarrow \theta \in [0,\pi] \\ z &\ge 0 \end{aligned}$$

Observemos que la primera y la última condición implican que $0 \le z \le \sqrt{r^2-\rho^2}$, y que la tercera y la cuarta implican que $\theta \in [0, \pi/2]$. Finalmente, la segunda y el hecho que $\rho \ge 0$ hacen que la condición en ρ sea $0 \le \rho \le r\cos\theta$. En interesante notar que, gráficamente, las condiciones $x^2 + y^2 \le rx$, $x \ge 0$ e $y \ge 0$ nos están diciendo que x e y se mueven en el semicírculo de centro $(r/2, 0)$ y radio $r/2$ de la figura:



mientras que la condición $0 \leq z \leq \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ nos dice que z se mueve entre el "piso" dado por $z = 0$ y el "techo" dado por la esfera de radio r.

Calculemos entonces el volumen de C_1 usando el cambio de variable a cilíndricas. Recordemos que el determinante del jacobiano de ese cambio de variable es ρ y que las condiciones en las nuevas variables quedaron $\rho \in [0, r\cos\theta]$, $\theta \in [0, \pi/2]$ y $z \in [0, \sqrt{r^2 - \rho^2}]$. Así que el volumen queda:

$$\mathrm{Vol}(C_1) = \iiint_{C_1} 1 \; dx\, dy\, dz = \int_0^{\pi/2} \int_0^{r\cos\theta} \int_0^{\sqrt{r^2-\rho^2}} \rho \;\, dz\, d\rho\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \int_0^{r\cos\theta} \rho\sqrt{r^2 - \rho^2} \;\, d\rho\, d\theta$$

Calculemos la integral en ρ:

$$\begin{aligned}\int_0^{r\cos\theta} \rho\sqrt{r^2 - \rho^2} \; d\rho &= \left(-\frac{1}{3}(r^2 - \rho^2)^{3/2} \right)\Big|_{\rho=0}^{\rho=r\cos\theta} = \frac{1}{3}\left[\left(r^2\right)^{3/2} - \left(r^2 - r^2\cos^2\theta\right)^{3/2} \right] = \frac{1}{3}\left[r^3 - \left(r^2(1-\cos^2\theta)\right)^{3/2} \right] \\ &= \frac{1}{3}\left[r^3 - \left(r^2\sin^2\theta\right)^{3/2} \right] = \frac{1}{3}\left[r^3 - r^3\sin^3\theta \right] = \frac{r^3}{3}\left(1 - \sin^3\theta\right)\end{aligned}$$

donde la primitiva de la primera igualdad puede hallarse haciendo el cambio de variable $u = r^2 - \rho^2$. Entonces:

$$\mathrm{Vol}(C_1) = \int_0^{\pi/2} \frac{r^3}{3}\left(1 - \sin^3\theta\right) d\theta = \frac{r^3}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2} \sin^3\theta \, d\theta \right) = \frac{r^3}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right)$$

La igualdad $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^3\theta \, d\theta = \frac{2}{3}$ puede probarse escribiendo $\sin^3\theta = \sin^2\theta\sin\theta = (1 - \cos^2\theta)\sin\theta$. Entonces:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sin^3\theta \, d\theta &= \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2\theta)\sin\theta \, d\theta = \int_0^{\pi/2} \left(\sin\theta - \cos^2\theta\sin\theta\right) d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin\theta \, d\theta - \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\sin\theta \, d\theta \\ &= \left(-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3} \right)\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}&\mathrm{Vol}(C) = 8\mathrm{Vol}(C_1) = 8\frac{r^3}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right) = \frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{16}{9} r^3 \\ \Rightarrow &\boxed{\mathrm{Vol}(D) = \frac{4}{3}\pi r^3 - \mathrm{Vol}(C) = \frac{16}{9} r^3}\end{aligned}$$