

Práctico 7 – Funciones de varias variables: representaciones gráficas, límites y continuidad

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función, se define el conjunto de nivel a como:

$$C_a = \{p \in U : f(p) = a\}$$

1. Dibuje el dominio, los conjuntos de nivel y la gráfica de las siguientes funciones:

$$(a) x^2 + y^2 \quad (b) x^2 - y^2 \quad (c) x^2 \quad (d) y/x \quad (e) xy \quad (f) \max\{x^2, y^3\} \quad (g) \max\{x^2, x + y\}$$

2. Hallar el dominio y los conjuntos de nivel de las siguientes funciones:

$$(a) \frac{x}{x - y - z} \quad (b) \sin(x^2 + y^2 + z^2) \quad (c) \frac{x + y + z}{1 - x^2 - y^2 - z^2} \quad (d) \frac{x + y}{\min\{x, y\}}$$

3. Dibuje el dominio y los conjuntos de nivel de las siguientes funciones:

$$(a) \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (b) \log\left(\frac{1 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right) \quad (c) \cosh(x^2 - y^2) \quad (d) \operatorname{tg}\left(\frac{x^2}{y}\right)$$

$$(e) \operatorname{arc} \cos\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right) \quad (f) \operatorname{arc} \operatorname{tg}\left(\frac{x^2}{y}\right) \quad (g) x^{(y^2)}$$

4. Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida en una bola reducida $U = B_R^*((0, 0))$ de centro $(0, 0)$ y radio R . Mediante el cambio de variable $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, se obtiene $g : V \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$, donde $V = (0, R) \times [0, 2\pi)$.

a) Probar que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = L$ si $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que $|g(r, \theta) - L| < \varepsilon \forall r \in (0, \delta), \theta \in [0, 2\pi)$.

b) Probar que si $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = L$ entonces $\lim_{r \rightarrow 0^+} g(r, \theta) = L \forall \theta \in [0, 2\pi)$.

c) Se consideran las funciones f siguientes

$$(i) f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (ii) f(x, y) = \begin{cases} y/x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad (iii) f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < y < x^2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Calcular, cuando existan, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ y $\lim_{r \rightarrow 0^+} g(r, \theta)$, éste último en función de $\theta \in [0, 2\pi)$.

d) Probar que es falso el recíproco de la parte (b).

e) En el caso particular en el que g tiene la forma $g(r, \theta) = h(r)k(\theta)$, con h y k funciones $h : (0, R) \rightarrow \mathbb{R}$ y $k : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$, probar que si k es una función acotada y $\lim_{r \rightarrow 0^+} h(r) = 0$ entonces $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$.

f) Calcular:

$$(i) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \quad (ii) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

5. Probar que en los siguientes casos NO existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$:

$$(a) f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad (b) f(x, y) = \frac{2x^3 y}{(x^2 + y^2)^2} \quad (c) f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x+y}, & \text{si } x + y \neq 0 \\ 0, & \text{si } x + y = 0 \end{cases}$$

6. a) Probar que si $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = 0$ y g es una función acotada en una bola reducida de centro p , entonces $\lim_{x \rightarrow p} f(x)g(x) = 0$.

b) Calcular los límites de las siguientes funciones para $(x, y) \rightarrow (0, 0)$:

$$(a) x \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x^2 + y^2} \right) \quad (b) \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \quad (c) \frac{xy^3}{x^2 + y^4} = y \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$

7. Decidir si los límites siguientes existen y en caso afirmativo calcularlos.

$$(a) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (2,2,6)} \frac{x-y}{x^2+y-z} \quad (b) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (1,0,1)} \frac{\operatorname{sen}(x^2 + e^y - z)}{x^2 + \tan\left(\frac{1}{\cos(xyz)}\right)} \quad (c) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^2yz - z^4}{x^4 + y^4 + z^4}$$

8. Calcular:

$$(a) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{x^2 + xy + 1}{x^2 - x - y} \quad (b) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x y \log |y| \quad (c) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x^2 + xy - 2y^2}{x^2 - y^2}$$

$$(d) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \quad (e) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{x-y} - 1}{x^2 - y^2} \quad (f) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\log(1 + x^2 + y^2)}{x^2 + y^2 + x^3y}$$

9. Se considera la función

$$f(x, y) = \frac{ax + y + by^2}{\operatorname{sen} y + \log(1 + x)} \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

- a) Determinar a y b para que todos los límites direccionales de f en $(0, 0)$ sean iguales.
 b) Para los a y b determinados en la parte anterior, probar que f carece de límite.

10. Discutir según $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la existencia del límite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^\alpha y^\beta}{x^2 + xy + y^2}$$

11. Determinar en qué puntos de \mathbb{R}^2 las siguientes funciones $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ son continuas y discontinuas.

$$(a) f(x, y) = \begin{cases} (4x^2y^3)/(4x^2 + y^6) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$(b) f(x, y) = \begin{cases} x/y & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

$$(c) f(x, y) = \begin{cases} x^2 + 2y - 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 3x + y^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

12. ¿Cuáles de las siguientes funciones se pueden extender en forma continua a todo el plano?

$$(a) \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \quad (b) x^2 \log(x^2 + y^2) \quad (c) \frac{\operatorname{sen}(x^4 + y^4)}{x^2 + y^2}$$

13. Sea $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable con derivada continua.

$$f(x, y) = \begin{cases} (\varphi(y) - \varphi(x))/(y - x) & \text{si } x \neq y \\ \varphi'(x) & \text{si } x = y \end{cases}$$

Determinar en qué puntos f es continua.

14. Sea $f : (0, +\infty) \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ definida por $f(\rho, \theta) = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta))$

- a) Verificar que es continua y probar que es biyectiva.
 b) Calcular las imágenes de las rectas $\rho = cte$ y $\theta = cte$
 c) Calcular la función inversa $f^{-1} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow (0, +\infty) \times [0, 2\pi)$. ¿Es continua f^{-1} ?
15. a) Probar que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es continua si y sólo si $\forall A \subseteq \mathbb{R}^m$ abierto $f^{-1}(A)$ es abierto en \mathbb{R}^n .
 b) Probar que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es continua si y sólo si $\forall C \subseteq \mathbb{R}^m$ cerrado $f^{-1}(C)$ es cerrado en \mathbb{R}^n .
 c) Demostrar que el conjunto de puntos (x, y, z) de \mathbb{R}^3 que verifican

$$\begin{cases} x^2 + y^3 < 4 \\ y^2 + z^3 > 2 \end{cases}$$

es un conjunto abierto.

Ejercicios propuestos en evaluaciones anteriores

1. (*Segundo parcial segundo semestre 2023*) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y(x^2 + y^2)}{x^2 - y^2} & \text{si } |x| \neq |y| \\ A & \text{si } |x| = |y| \end{cases}$$

Entonces el valor de A para que f sea continua en el origen es:

- (A) $A = 1$ (B) $A = 0$
 (C) $A = 3/2$ (D) No existe A para que f sea continua
 (E) $A = 1/2$
2. (*Segundo parcial segundo semestre 2022*) Hallar el valor del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$ para el cual $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4}{y(x^2 + y^2)} & \text{si } y \neq 0 \\ \alpha & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

es continua en $(0, 0)$.

- (A) $\alpha = 1$ (B) $\alpha = 0$
 (C) f es discontinua en $(0, 0)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ (D) $\alpha = -1$
 (E) $\alpha = 2$
3. (*Examen diciembre 2022*) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función y $a = (x_0, y_0)$ un punto del plano.
- a) Definir continuidad de f en el punto a .
 b) Sea a_n una sucesión de elementos de \mathbb{R}^2 . Definir $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.
 c) Demostrar que si f es continua en a , y una sucesión a_n cumple $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(a)$.
 d) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^6}{(x^2 - y)^2 + x^6} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

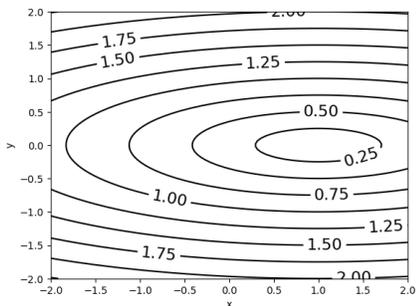
Utilice el resultado del ítem anterior para estudiar la continuidad de f en el origen.

4. (*Segundo parcial primer semestre 2022*) Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

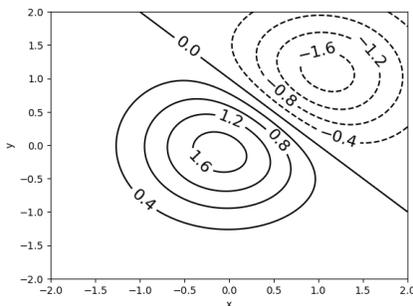
$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, y > 0 \\ 2 & \text{si } x < 0, y > 0 \\ 3 & \text{si } x < 0, y < 0 \\ 4 & \text{si } x > 0, y < 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces:

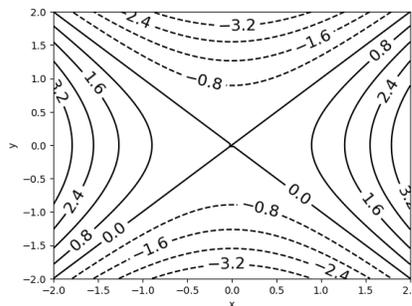
- (A) La función es continua en todo punto de \mathbb{R}^2 .
 - (B) La función es discontinua solamente en $(0, 0)$.
 - (C) La función es continua para todo (x, y) tal que $xy \neq 0$.
 - (D) La función es discontinua únicamente sobre todos los puntos del eje $(0x)$.
5. (*Segundo parcial segundo semestre 2022*) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f(x, y) = \max\{x^2 + y^2, 2x\}$. Entonces, la figura que más se asemeja a las curvas de nivel de f es:



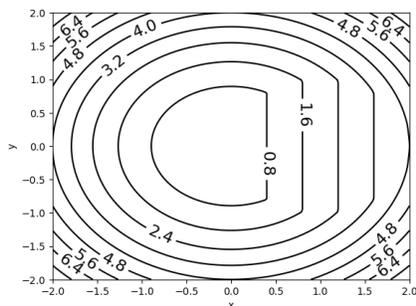
(A)



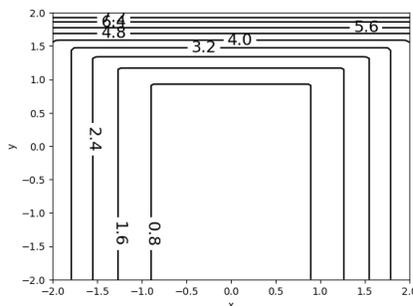
(B)



(C)



(D)



(E)

6. (*Segundo parcial segundo semestre 2021*) Hallar el valor del parámetro a para el cual $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{ax^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

es continua.

- (A) $a = \frac{1}{2}$
- (B) $a = 1$
- (C) $a = 1$
- (D) $a = -1$
- (E) No hay ningún valor de a para el cual f sea continua.

7. (*Segundo parcial segundo semestre 2020*) Sean f y g las dos funciones de \mathbb{R}^2 a \mathbb{R} definidas como sigue:

$$f(x, y) = \frac{x^4 - y^4 + x^6}{(x^2 + y^2)^2} \quad g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^3 - y^3} & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

Considere los límites $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ y $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y)$. Entonces

- (A) Ambos límites existen y son 0.
- (B) El límite de $f(x, y)$ existe y es 0, pero el límite de $g(x, y)$ no existe.
- (C) El límite de $g(x, y)$ existe y es 0, pero el límite de $f(x, y)$ no existe.
- (D) No existen ninguno de los dos límites.
- (E) Ambos límites existen, pero no son 0.

Ejercicios complementarios

1. Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ cerrado y $f: C \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función continua. Demostrar que el gráfico de f ,

$$\text{graf}(f) = \{(x, f(x)) : x \in C\},$$

es un subconjunto cerrado de \mathbb{R}^{n+m} .

2. Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es acotado, se define el *diámetro* de A como $\text{diam}(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$.

- a) Probar que si $C \subseteq \mathbb{R}^n$ es compacto entonces existen $x, y \in C$ tal que $\text{diam}(C) = d(x, y)$.
- b) Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f: C \rightarrow C$ una función tal que

$$\|f(x) - f(y)\| > \|x - y\| \quad \forall x \neq y \in C.$$

Probar que C no puede ser compacto. Dar un ejemplo de una función en estas hipótesis

3. Se considera la función determinante $\det: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\det(a, b, c, d) = ad - bc$

- a) Probar que \det es una función continua en \mathbb{R}^4 .
- b) Sean $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : A \text{ es invertible}\}$ y $\mathcal{B} = \{A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : \det(A) = 0\}$. Investigar si \mathcal{A} y \mathcal{B} son abiertos, cerrados o ninguna de las dos cosas. Aquí el espacio de matrices se considera como \mathbb{R}^4 .

4. Sea $\varepsilon: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow 0$, pero $\varepsilon(0) = 1$. Se considera la función

$$f(x, y) = \frac{3x^2\varepsilon(y) - y^2\varepsilon(x)}{\log(x^2 + y^2 + 1)}$$

- a) Analizar si f tiene límite en $(0, 0)$ según el conjunto $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \neq 0\}$.
- b) Analizar si f tiene límite en $(0, 0)$.

5. Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Probar que si toda función continua $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ es acotada entonces C es compacto.

6. Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Se llama *camino* (o *arco*) continuo en C a toda función continua $\alpha: [0, 1] \rightarrow C$. Si $a, b \in C$ y α es un camino en C tal que $\alpha(0) = a$ y $\alpha(1) = b$, se dice que α conecta a con b . Se dice que C es *conexo por caminos* (o *arcoconexo*) sii $\forall a, b \in C \exists \alpha$ camino en C que conecta a con b .

- a) Sean $C \subseteq \mathbb{R}^n$ conexo por caminos y $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Probar que si $a, b \in C$ y $\mu \in \mathbb{R}$ son tales que $f(a) \leq \mu \leq f(b)$ entonces existe $c \in C$ tal que $f(c) = \mu$. Sugerencia: considerar $f \circ \alpha$ con α un camino de a a b .
- b) Probar que si C es arcoconexo y $f: C \rightarrow \mathbb{R}^m$ es continua entonces $f(C) \subseteq \mathbb{R}^m$ es arcoconexo.

- c) Sean $S^1 = \{a \in \mathbb{R}^2 : \|a\| = 1\}$ y $a_0 \in S^1$. Probar que S^1 y $S^1 \setminus \{a_0\}$ son arcoconexos.
- d) Probar que no existe $f: S^1 \rightarrow [0, 1]$ continua y biyectiva. Sugerencia: suponer por absurdo que existe una tal f , sacar un punto de $a_0 \in S^1$ conveniente y considerar la restricción de f a este nuevo conjunto.
- e) Sean P y Q dos puntos de \mathbb{R}^2 y m la mediatriz del segmento PQ . Demostrar que cualquier camino α que una P con Q debe intersectar a m . Sugerencia: demostrar que la función $f(t) = d(Q, \alpha(t)) - d(P, \alpha(t))$ tiene una raíz $t_0 \in [0, 1]$.

7. Un teorema de punto fijo.

Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto cerrado y $f: C \rightarrow C$ una *contracción*, esto es, existe $k \in (0, 1)$ tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\| \quad \forall x, y \in C.$$

- a) Sea a un punto cualquiera de C . Se define la sucesión $(x_n)_{n \geq 0}$ de la siguiente forma: $x_0 = a$ y $x_n = f(x_{n-1})$, si $n \geq 1$. Probar que

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq k^n \|x_1 - x_0\| \quad \forall n \geq 0.$$

- b) Deducir que (x_n) es una sucesión de Cauchy y que existe $p \in C$ tal que $\lim_n x_n = p$.
- c) Demostrar que existe un único punto $p \in C$ tal que $f(p) = p$. Sugerencia: observar que f es continua y tomar p como en la parte anterior.
- d) Analizar si el resultado anterior es válido si C no fuese cerrado.
8. a) Sean V y W espacios vectoriales normados y $T: V \rightarrow W$ una transformación lineal. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes.
- 1) T es continua en V .
 - 2) T es continua en el vector nulo de V .
 - 3) Existe $k \geq 0$ tal que $\|T(x)\| \leq k\|x\|$, $\forall x \in V$.
 - 4) Existe $k \geq 0$ tal que $\|T(x) - T(y)\| \leq k\|x - y\|$, $\forall x, y \in V$.
 - 5) $T(A)$ es acotado $\forall A \subseteq V$ acotado.
- b) Probar que toda transformación lineal de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m es uniformemente continua. Deducir que los subespacios propios de \mathbb{R}^n son conjuntos cerrados con interior vacío.