Práctico 5 – Integrales impropias

1. *a*) Sean $a > 0$ y $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(t) \geq 0$. Definimos $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Demostrar que $F(x)$ es creciente y que $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge $\iff F(x)$ está acotada superiormente.

   b) Sea $g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función continua que verifica $0 \leq f(t) \leq g(t)$ para todo $t \geq a$.

   i) Probar que sí $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ converge entonces $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ también converge.

   ii) Sí $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ diverge entonces $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ diverge .

2. Clasificar y hallar la integral en caso de convergencia

$$a)\ \int_2^{+\infty} \frac{1}{x\log^\alpha(x)}\,dx \qquad b)\ \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2}\,dx \qquad c)\ \int_0^1 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right)dx$$

$$d)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} \qquad e)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx$$

3. Sea $k > 0$. Hallar el valor de k para que la integral $\int_1^{+\infty} \left(\frac{x}{2x^2+2k} - \frac{k}{x+1}\right) dx$ sea convergente y calcularla.

4. *a*) Probar que para $x \to +\infty$ se cumple que

$$\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} + \frac{\sin^2(x)}{x} \sim \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$$

   b) Probar que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\,dx$ converge mientras que $\int_1^{+\infty} \left(\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} + \frac{\sin^2(x)}{x}\right) dx$ diverge.

   c) ¿Por qué no aplica el criterio del equivalente en este caso?

5. Sean f y g dos funciones derivables en $[a, +\infty)$ y tales que sus derivadas f' y g' son funciones integrables en el mismo $[a, +\infty)$. Además se cumple que $\lim_{x\to+\infty} f(x)g(x) = L \in \mathbb{R}$.

   a) Probar que $\int_a^{+\infty} f'(x)g(x)dx$ converge si y solo si $\int_a^{+\infty} f(x)g'(x)dx$ converge.

   b) Clasificar:

   1) $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{sen}t}{t}\,dt$ y $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{sen}t}{t^2}\,dt$,

   2) $\int_0^{+\infty} \mathrm{sen}(t^2)\,dt$ [1] y $\int_1^{+\infty} |\sin(x^2)|\ dx$.

[1]Sugerencia: escribir $\mathrm{sen}(t^2) = 2t\,\mathrm{sen}(t^2)\frac{1}{2t}$ y usar la fórmula de partes.

6. Clasificar:

$$a)\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \qquad b)\ \int_0^1 \frac{e^{-x}}{x}\,dx \qquad c)\ \int_0^1 \frac{\log(x)}{\sqrt{x}}\,dx \qquad d)\ \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}\,dx \qquad e)\ \int_0^{+\infty} \sin^2(t)\,dt$$

$$f)\ \int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^4+1}}\,dx \qquad g)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\cosh(x)}\,dx \qquad h)\ \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2-1}\,dx \qquad i)\ \int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\,dx \qquad j)\ \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$k)\ \int_0^{+\infty} e^{x^2-\frac{1}{x^2}}\,dx \qquad l)\ \int_{-1}^1 \frac{e^{\frac{-1}{x-1}}}{(x-1)^2}\,dx \qquad m)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^\alpha(x)\cos^\beta(x)} \qquad (\alpha,\beta\in\mathbb{R})$$

7. Determinar para qué valores de α las siguientes integrales impropias son convergentes.

$$a)\ \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{x+1}\,dx \qquad b)\ \int_0^{+\infty} \frac{1}{(e^{x^2}-1)^\alpha}\,dx$$

8. Usando el criterio integral clasificar las siguientes series

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2} \qquad b)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\log(n)}} \qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n)}{n^2}$$

9. Estudiar la convergencia de $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\ln x}$ y $\displaystyle\sum_2^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$.

10. Probar que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \log\left(1+\frac{a^2}{x^2}\right)dx$ converge y calcularla. Sugerencia: hacer partes con $1\cdot\log\left(1+\frac{a^2}{x^2}\right)$.

Ejercicios propuestos en evaluaciones anteriores

1. (***Primer parcial primer semestre 2023***)

    1. Sea $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ continua y positiva. Además existe $b>1$ tal que f restricta al intervalo $[b,+\infty)$ es decreciente. Para cada n natural tal que $n\geq 1$ se define $a_n=f(n)$.

       Prueba que la serie $\sum a_n$ converge si y sólo si la integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge.

    2. Sea $f:[2,+\infty)\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=\dfrac{1}{x\ln^\alpha(x)}$, $\alpha>0$. Prueba que f es decreciente.

    3. Calsifica, discutiendo según $\alpha>0$, la serie

    $$\sum \frac{1}{n\ln^\alpha(n)}.$$

2. (***Primer parcial segundo semestre 2022***) Considere la siguiente integral impropia:

$$\int_2^{+\infty} \frac{1+e^{-x}}{\log(x)\,(1+x\log^\alpha(x))}dx$$

   Entonces:

(A) La integral es divergente para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.
(B) La integral es convergente si y solo si $\alpha < 1$.
(C) La integral es convergente para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.
(D) La integral es convergente si y solo si $\alpha > 0$.
(E) La integral es convergente si y solo si $\alpha > 1$.

3. (***Examen julio 2021***)

   a. Sea
   $$f(t) = \frac{1}{t\log^2(t-3)}.$$
   Determine la convergencia o divergencia de las integrales
   $$\int_4^{2021} f(t)\,dt \quad \text{y} \quad \int_{2021}^{+\infty} f(t)\,dt$$
   Luego, clasifique la integral impropia $\int_4^{+\infty} f(t)\,dt$.

   b. Se considera la serie
   $$\sum_{n=2021}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(n)}{n\log^2(n-3)}.$$
   Demuestre que esa serie converge absolutamente.

4. (***Primer parcial segundo semestre 2020 – turno vespertino***) Sean α y β dos reales positivos. Considere la integral impropia
   $$\int_1^{\infty} \frac{dx}{n(\ln(x))^{\alpha}(e^x+1)^{\beta}}$$
   Entonces la integral es convergente sí y solo sí:

   (A) $\alpha < 1$, y para todo $\beta > 0$.
   (B) $\alpha + \beta < 1$.
   (C) $\alpha < \frac{1}{2}$, y $\beta > 1$.
   (D) $\alpha < 1$, y $\beta > 1$.
   (E) $\alpha + \beta < \frac{1}{2}$.

5. (***Examen diciembre 2018***) Se consideran las siguientes integrales impropias
   $$\text{(I)} \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^2(1+e^x)}dx \quad \text{(II)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+|x|)(1+\sqrt{|x|})}$$
   Indicar la opción correcta:

   (A) La integral (I) converge, pero la integral (II) diverge.

   (B) La integral (II) converge, pero la integral (I) diverge.

   (C) Ambas integrales convergen.

   (D) Ambas integrales divergen.

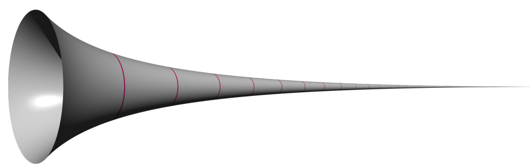
Ejercicios Complementarios

1. **La trompeta de Torricelli.** Sea $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función derivable que toma solamente valores positivos. Se pueden extender a este caso las fórmulas vistas para el área y el volumen del cuerpo de revolución generado por la gráfica de la función alrededor del eje de las abscisas (observemos que en este caso es un cuerpo no acotado). Las fórmulas son:

$$A(f) = 2\pi \int_a^{+\infty} f(t)\sqrt{1 + (f'(t))^2}dt\,, \qquad V(f) = \pi \int_a^{+\infty} (f(t))^2 dt.$$

Cuando $A(f)$ converge decimos que el cuerpo tiene área finita, y cuando diverge decimos que tiene área infinita. De la misma forma, cuando $V(f)$ converge decimos que el cuerpo tiene volumen finito, y cuando diverge decimos que tiene volumen infinito.

Considere la función $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = \frac{1}{t}$. La trompeta de Torricelli es el cuerpo de revolución obtenido al girar f alrededor del eje $0t$, como se muestra en la figura. Demuestre que la trompeta de Torricelli



tiene área infinita pero volumen finito.

2. La función Gamma, $\Gamma : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, extiende el concepto de factorial a los números reales positivos. La podemos definir como $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$.

   a) Probar que $\Gamma(n)$ es una integral impropia convergente $\forall n \in \mathbb{N}^*$.(En realidad se puede ver que es convergente y derivable $\forall x \in \mathbb{R}^+$.)

   b) Encontrar una relación entre $\Gamma(n)$ y $\Gamma(n-1)$.

   c) Probar que $\Gamma(n) = (n-1)!\ \forall n \in \mathbb{N}^*$, lo cual muestra que Γ es una extensión del factorial a todos los reales positivos.

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con derivada continua y tal que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ converge. Se define $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como

$$F(x) = \begin{cases} -x \int_{-\infty}^{x} f(\frac{1}{t}) \frac{1}{t^2} dt & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x \int_{x}^{+\infty} f(\frac{1}{t}) \frac{1}{t^2} dt & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

   a) Investigar si F es continua

   b) Probar que F es derivable en todo $x \neq 0$ y que es derivable en $x = 0$ si solo si $\int_{-\infty}^{\infty} f(t+a) - f(t)\, dt = 0$. Calcular F' en este caso y determinar si F' es continua