

Práctico 3 – Sucesiones

1. Estudiar monotonía, acotación y convergencia de las siguientes sucesiones $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, donde:

$$a) \quad a_n = 1 + \frac{1}{n} \quad b) \quad a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n} \quad c) \quad a_n = n + \frac{1}{n} \quad d) \quad a_n = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}} \quad e) \quad a_n = \frac{n^2}{2^n}$$

2. Sean a_n y b_n dos sucesiones reales convergentes tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = A$ y $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = B$.

a) Probar que la sucesión $c_n = a_n + b_n$ es convergente y $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = A + B$

b) Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, probar que la sucesión $\tilde{a}_n = \lambda a_n$ converge y $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{a}_n = \lambda A$

c) Probar que la sucesión $d_n = a_n b_n$ converge y $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = AB$

d) Sea e_n una sucesión acotada y suponga que $A = 0$, probar que $\lim_{n \rightarrow +\infty} e_n a_n = 0$

3. Encontrar los límites de las sucesiones $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, donde

$$a) \quad a_n = \frac{\cos(n)}{n} \quad b) \quad a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \quad c) \quad a_n = \frac{2n-5}{n+3-5^{1/n}} \quad d) \quad a_n = \sqrt[n]{\alpha^n + \beta^n} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$$

$$e) \quad a_n = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) \cos(n) \quad f) \quad a_n = \frac{n^\alpha}{e^n}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad g) \quad a_n = \frac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} + (-2)^{n+1}}$$

4. Las siguientes sucesiones son convergentes ($\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$), es decir que dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (que depende de $\varepsilon > 0$) tal que $\forall n \geq n_0$, $|a_n - L| < \varepsilon$. Determinar en cada caso el primer valor de n_0 que corresponde a los siguientes valores de ε : 1; 0,1; 0,01.

$$a) \quad a_n = \frac{1}{n} \quad b) \quad a_n = \frac{n}{n+1} \quad c) \quad a_n = \frac{(-1)^n}{n} \quad d) \quad a_n = \frac{1}{n!} \quad e) \quad a_n = \frac{2n}{n^3 + 1}$$

5. Estudiar los límites de las siguientes sucesiones. ¿Existen subsucesiones convergentes? Indicar los límites de las subsucesiones convergentes.

$$a) \quad a_n = \frac{1 + (-1)^n}{2} \quad b) \quad a_n = (-1)^n n \quad c) \quad a_n = 3^{\cos(n\pi)} \quad d) \quad a_n = \frac{n-1}{n+1} \cos \frac{2n\pi}{3}$$

$$e) \quad a_n = n^2 (1 + (-1)^n) \quad f) \quad a_n = n^{(-1)^n} \quad g) \quad a_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1 + (-1)^n}{2}$$

6. Un punto se llama *de aglomeración* de una sucesión si existe una subsucesión que converge a este punto.

a) Dar un ejemplo de una sucesión cuyos puntos de aglomeración sean 1, 2, 3 y 4.

b) Dar un ejemplo de una sucesión cuyos puntos de aglomeración sean todos los naturales.

c) ¿Existe alguna sucesión cuyos puntos de aglomeración sean *exactamente* los del conjunto $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$?

7. Sea a_n una sucesión tal que sus subsucesiones a_{2n} , a_{2n+1} y a_{3n} convergen. Probar que a_n es convergente.

8. Sea A un subconjunto de números reales no vacío y acotado superiormente. Demostrar que $L = \sup(A)$ si y solo si:

a) $L \geq x, \forall x \in A$.

b) Existe $\{x_m\}$ una sucesión de A tal que $\lim_{m \rightarrow +\infty} x_m = L$

9. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Probar que f está acotada si y solamente si para toda sucesión a_n , la sucesión $b_n = f(a_n)$ está acotada.

10. Probar que si a_n converge a 0, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n^2 < |a_n|$ para todo $n \geq n_0$.

11. Probar que si a_n converge a $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en α , entonces $b_n = f(a_n)$ converge a $f(\alpha)$.

Ejercicios propuestos en evaluaciones anteriores

1. (*Primer parcial segundo semestre 2022*)

1. a) Definir límite finito de una sucesión ($\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \in \mathbb{R}$ sii ...)
- b) Definir sucesión acotada (Se dice que una sucesión a_n es acotada sii ...)
2. Sean a_n y b_n sucesiones tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ y b_n es acotada. Demostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$.
3. a) Dar un ejemplo de un par de sucesiones a_n y b_n , con $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ y b_n **no acotada**, tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$.
- b) Dar un ejemplo de un par de sucesiones a_n y b_n , con $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ y b_n **no acotada**, tales que el límite de $a_n b_n$ no sea cero (infinito u otro límite real no nulo).

2. (*Examen febrero 2022*) Consideremos las siguientes sucesiones de números reales:

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+2} \quad \text{con } (n \geq 2) \quad \text{y} \quad b_n = \frac{1}{n \ln(n) (\ln(\ln(n)))^2} \quad \text{con } (n \geq 3).$$

- a) Para la sucesión (a_n) , estudiar su monotonía y convergencia.
 - b) Para la sucesión (b_n) , estudiar su monotonía y convergencia.
3. (*Primer parcial segundo semestre 2021*) Consideremos la sucesión de números reales $(a_n)_{n \geq 0}$ que satisface la relación

$$a_{n+1} = 2a_n + 5$$

y tal que $a_0 = 0$. Entonces:

- (A) $(a_n)_{n \geq 0}$ es creciente y no es acotada.
 - (B) $(a_n)_{n \geq 0}$ es creciente y tiene límite 5.
 - (C) $(a_n)_{n \geq 0}$ es creciente y tiene límite -5 .
 - (D) $(a_n)_{n \geq 0}$ es decreciente y tiene límite -5 .
 - (E) $(a_n)_{n \geq 0}$ no es ni creciente ni decreciente, pero converge a -5 .
4. (*Primer parcial segundo semestre 2020 turno vespertino*) Sea $a_n = (e^{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} - 1) n^\alpha$ con α un real positivo. Entonces:
- (A) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ es finito sii $\alpha \leq \frac{1}{2}$.
 - (B) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ es finito sii $\alpha \leq 1$.
 - (C) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ es finito para todo α .
 - (D) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ no es finito para ningún α .
 - (E) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ es finito sii $\alpha \leq \frac{3}{2}$.

5. (*Primer parcial segundo semestre 2020 turno matutino*)

1. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Completar las siguientes definiciones:
 - a) (a_n) es convergente si...
 - b) (a_n) es monótona creciente si...
 - c) (a_n) es acotada si...

2. Dar ejemplos de:
 - a) Una sucesión convergente que no es monótona.
 - b) Una sucesión acotada que no es convergente.
3. Consideremos la sucesión de término general $a_n = \frac{1 + \log(n)}{n^3}$. Probar que es monótona (decreciente), acotada y convergente.
6. (**Examen diciembre 2019**) Se considera la sucesión $x_0 = 1, x_1 = 1 + 1/1, x_2 = 1 + \frac{1}{1+1/1}, \dots$ definida por inducción mediante la regla $x_{n+1} = 1 + 1/x_n$. Indicar la opción correcta:
 - (A) La sucesión es monótona y está acotada.
 - (B) La sucesión no es monótona pero está acotada.
 - (C) La sucesión no está acotada pero es monótona.
 - (D) La sucesión no es monótona ni acotada.

Ejercicios Complementarios

1. Sea la sucesión definida por $a_1 = 3$ y la siguiente recurrencia:

$$a_{n+1} = \frac{3(1 + a_n)}{3 + a_n}.$$

- a) Demostrar que $a_n \geq 0$ y que $a_n \leq 3, \forall n \geq 1$
 - b) Demostrar que $a_{n+1} \leq a_n, \forall n \geq 1$.
 - c) Deducir que a_n tiene límite, y calcularlo.
2. Considere la sucesión $\sqrt{2}, \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \dots$
 - a) Expresar la sucesión como una sucesión definida por recurrencia.
 - b) Estudie las propiedades de monotonía y acotación, y calcule el límite de la sucesión.
 3. Determinar si las siguientes sucesiones convergen, y en caso de convergencia calcular su límite.
 - a) $a_n = \frac{\alpha(n)}{n}$ donde $\alpha(n)$ es la cantidad de números primos que dividen a n
 - b) $b_N = \frac{\#\{n \in \mathbb{N}: n \leq N \text{ y } n \text{ es un cuadrado perfecto}\}}{N}$
 4.
 - a) Escribir la negación de acotación de una función.
 - b) Demostrar que si una función f no está acotada, se puede encontrar una sucesión a_n en el dominio de f tal que $f(a_n) \rightarrow \infty$.
 - c) Si ahora el dominio de la función es $[a, b]$, ¿qué se puede decir sobre la sucesión a_n construida en el item anterior?
 - d) Si ahora además la función es continua, estudiar qué sucede con las imágenes de alguna subsucesión conveniente, y concluir que la función no puede ser no acotada.