Práctico 3 – Sucesiones

1. Estudiar monotonía, acotación y convergencia de las siguientes sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde:

   a) $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ *b*) $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ *c*) $a_n = n + \frac{1}{n}$ *d*) $a_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ *e*) $a_n = \frac{n^2}{2^n}$

2. Sean a_n y b_n dos sucesiones reales convergentes tal que $\lim_{n\to+\infty} a_n = A$ y $\lim_{n\to+\infty} b_n = B$.

   a) Probar que la sucesión $c_n = a_n + b_n$ es convergente y $\lim_{n\to+\infty} c_n = A + B$
   b) Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, probar que la sucesión $\tilde{a}_n = \lambda a_n$ converge y $\lim_{n\to+\infty} \tilde{a}_n = \lambda A$
   c) Probar que la sucesión $d_n = a_n b_n$ converge y $\lim_{n\to+\infty} d_n = AB$
   d) Sea e_n una sucesión acotada y suponga que $A = 0$, probar que $\lim_{n\to+\infty} e_n a_n = 0$

3. Encontrar los límites de las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde

   a) $a_n = \frac{\cos(n)}{n}$ *b*) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ *c*) $a_n = \frac{2n-5}{n+3-5^{1/n}}$ *d*) $a_n = \sqrt[n]{\alpha^n + \beta^n}$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$

   e) $a_n = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)\cos(n)$ *f*) $a_n = \frac{n^\alpha}{e^n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ *g*) $a_n = \frac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} + (-2)^{n+1}}$

4. Las siguientes sucesiones son convergentes ($\lim_{n\to+\infty} a_n = L$), es decir que dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (que depende de $\varepsilon > 0$) tal que $\forall\ n \geq n_0,\ |a_n - L| < \varepsilon$. Determinar en cada caso el primer valor de n_0 que corresponde a los siguientes valores de ε: 1; 0,1; 0,01.

   a) $a_n = \frac{1}{n}$ *b*) $a_n = \frac{n}{n+1}$ *c*) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ *d*) $a_n = \frac{1}{n!}$ *e*) $a_n = \frac{2n}{n^3+1}$

5. Estudiar los límites de las siguientes sucesiones. ¿Existen subsucesiones convergentes? Indicar los límites de las subsucesiones convergentes.

   a) $a_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$ *b*) $a_n = (-1)^n n$ *c*) $a_n = 3^{\cos(n\pi)}$ *d*) $a_n = \frac{n-1}{n+1}\cos\frac{2n\pi}{3}$

   e) $a_n = n^2\ (1 + (-1)^n)$ *f*) $a_n = n^{(-1)^n}$ *g*) $a_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$

6. Un punto se llama *de aglomeración* de una sucesión si existe una subsucesión que converge a este punto.

   a) Dar un ejemplo de una sucesión cuyos puntos de aglomeración sean $1, 2, 3$ y 4.
   b) Dar un ejemplo de una sucesión cuyos puntos de aglomeración sean todos los naturales.
   c) ¿Existe alguna sucesión cuyos puntos de aglomeración sean *exactamente* los del conjunto $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$?

7. Sea a_n una sucesión tal que sus subsucesiones a_{2n}, a_{2n+1} y a_{3n} convergen. Probar que a_n es convergente.

8. Sea A un subconjunto de números reales no vacío y acotado superiormente. Demostrar que $L = \sup(A)$ si y solo si:

   a) $L \geq x, \forall\, x \in A$.
   b) Existe $\{x_m\}$ una sucesión de A tal que $\lim_{m\to+\infty} x_m = L$

9. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Probar que f está acotada si y solamente si para toda sucesión a_n, la sucesión $b_n = f(a_n)$ está acotada.

10. Probar que si a_n converge a 0, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n^2 < |a_n|$ para todo $n \geq n_0$.

11. Probar que si a_n converge a $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en α, entonces $b_n = f(a_n)$ converge a $f(\alpha)$.

Ejercicios propuestos en evaluaciones anteriores

1. (***Primer parcial segundo semestre 2022***)

   1. *a*) Definir límite finito de una sucesión $\left(\lim_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R} \text{ sii } \ldots\right)$

      b) Definir sucesión acotada (Se dice que una sucesión a_n es acotada sii ...)

   2. Sean a_n y b_n sucesiones tales que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y b_n es acotada. Demostrar que $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

   3. *a*) Dar un ejemplo de un par de sucesiones a_n y b_n, con $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y b_n **no acotada**, tales que $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

      b) Dar un ejemplo de un par de sucesiones a_n y b_n, con $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y b_n **no acotada**, tales que el límite de $a_n b_n$ no sea cero (infinito u otro límite real no nulo).

2. (***Examen febrero 2022***) Consideremos las siguientes sucesiones de números reales:

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+2} \text{ con } (n \geq 2) \qquad \text{y} \qquad b_n = \frac{1}{n\ \ln(n)\ (\ln(\ln(n)))^2} \text{ con } (n \geq 3).$$

   a) Para la sucesión (a_n), estudiar su monotonía y convergencia.

   b) Para la sucesión (b_n), estudiar su monotonía y convergencia.

3. (***Primer parcial segundo semestre 2021***) Consideremos la sucesión de números reales $(a_n)_{n\geq 0}$ que satisface la relación

$$a_{n+1} = 2a_n + 5$$

   y tal que $a_0 = 0$. Entonces:

   (A) $(a_n)_{n\geq 0}$ es creciente y no es acotada.
   (B) $(a_n)_{n\geq 0}$ es creciente y tiene límite 5.
   (C) $(a_n)_{n\geq 0}$ es creciente y tiene límite -5.
   (D) $(a_n)_{n\geq 0}$ es decreciente y tiene límite -5.
   (E) $(a_n)_{n\geq 0}$ no es ni creciente ni decreciente, pero converge a -5.

4. (***Primer parcial segundo semestre 2020 turno vespertino***) Sea $a_n = \left(e^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}-1}\right) n^{\alpha}$ con α un real positivo. Entonces:

   (A) $\lim_{n\to\infty} a_n$ es finito sii $\alpha \leq \frac{1}{2}$.
   (B) $\lim_{n\to\infty} a_n$ es finito sii $\alpha \leq 1$.
   (C) $\lim_{n\to\infty} a_n$ es finito para todo α.
   (D) $\lim_{n\to\infty} a_n$ no es finito para ningún α.
   (E) $\lim_{n\to\infty} a_n$ es finito sii $\alpha \leq \frac{3}{2}$.

5. (***Primer parcial segundo semestre 2020 turno matituno***)

   1. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Completar las siguientes definiciones:

      a) (a_n) es convergente si...
      b) (a_n) es monónona creciente si...
      c) (a_n) es acotada si...

2. Dar ejemplos de:
   a) Una sucesión convergente que no es monótona.
   b) Una sucesión acotada que no es convergente.
3. Consideremos la sucesión de término general $a_n = \dfrac{1+\log(n)}{n^3}$. Probar que es monótona (decreciente), acotada y convergente.

6. (***Examen diciembre 2019***) Se considera la sucesión $x_0 = 1$, $x_1 = 1 + 1/1$, $x_2 = 1 + \frac{1}{1+1/1}, \ldots$ definida por inducción mediante la regla $x_{n+1} = 1 + 1/x_n$. Indicar la opción correcta:
   (A) La sucesión es monótona y está acotada.
   (B) La sucesión no es monótona pero está acotada.
   (C) La sucesión no está acotada pero es monótona.
   (D) La sucesión no es monótona ni acotada.

Ejercicios Complementarios

1. Sea la sucesión definida por $a_1 = 3$ y la siguiente recurrencia:

$$a_{n+1} = \frac{3(1+a_n)}{3+a_n}.$$

   a) Demostrar que $a_n \geq 0$ y que $a_n \leq 3, \forall n \geq 1$
   b) Demostrar que $a_{n+1} \leq a_n, \forall n \geq 1$.
   c) Deducir que a_n tiene límite, y calcularlo.

2. Considere la sucesión $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots$.
   a) Exprese la sucesión como una sucesión definida por recurrencia.
   b) Estudie las propiedades de monotonía y acotación, y calcule el límite de la sucesión.

3. Determinar si las siguientes sucesiones convergen, y en caso de convergencia calcular su límite.
   a) $a_n = \frac{\alpha(n)}{n}$ donde $\alpha(n)$ es la cantidad de números primos que dividen a n
   b) $b_N = \frac{\#\{n \in \mathbb{N} : n \leq N \text{ y } n \text{ es un cuadrado perfecto }\}}{N}$

4. *a*) Escribir la negación de acotación de una función.
   b) Demostrar que si una función f no está acotada, se puede encontrar una sucesión a_n en el dominio de f tal que $f(a_n) \to \infty$.
   c) Si ahora el dominio de la función es $[a, b]$, ¿qué se puede decir sobre la sucesión a_n construida en el item anterior?
   d) Si ahora además la función es continua, estudiar qué sucede con las imágenes de alguna subsucesión conveniente, y concluir que la función no puede ser no acotada.