

## Práctico 2 – Ecuaciones diferenciales

1. Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales de variables separables:

a)  $y' = y^2 - 1$

b)  $(1 + y^2)yy' + (1 + y^2) = 0$

c)  $xe^{2y}y' - (1 + e^{2y}) = 0$

2. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales mediante el cambio de variables  $u(x) = y(x)/x$ , de forma de llevarlas a ecuaciones de variables separadas del tipo  $u' = A(u)B(x)$ :

a)  $x^2y' + y(y - x) = 0$

b)  $(x + y)y' = x - y$

3. a) Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de primer orden homogéneas:

1)  $y' + y \cos x = 0$

2)  $x(x - 1)y' + (1 - 2x)y = 0$

3)  $y' - (2/x)y = 0$

b) Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de primer orden no homogéneas:

1)  $y' + y \cos x = \cos x \sin x$

2)  $x(x - 1)y' + (1 - 2x)y + x^2 = 0$

3)  $y' - (2/x)y = x^4$

4. a) Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

1)  $y'' - 5y' + 6y = 0$

2)  $y'' + y' = 0$

3)  $y'' + 4y' + 5y = 0$

4)  $y'' + 2y' + y = 0$

b) Resolver los siguientes problemas de valores iniciales:

1)  $y'' - 5y' + 6y = 0$ ,  $y(1) = e^2$ ,  $y'(1) = 3e^2$ .

2)  $y'' - 6y' + 5y = 0$ ,  $y(0) = 3$ ,  $y'(0) = 11$ .

3)  $y'' + 4y' + 5y = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ .

4)  $y'' + 8y' - 9y = 0$ ,  $y(1) = 2$ ,  $y'(1) = 0$ .

5. Hallar todos los valores reales de la constante  $a$  para que las ecuaciones  $y'' + ay' - 2y = 0$  e  $y'' - 2y' + ay = 0$  tengan soluciones en común además de  $y(x) \equiv 0$ . Resolver las ecuaciones obtenidas.

6. Hallar  $a \in \mathbb{R}$  para que  $y(x) = e^x$  sea una solución de la ecuación diferencial  $y'' + ay' - 2y = 0$ . Hallar la solución general de dicha ecuación. Hallar la solución de la ecuación con datos iniciales  $y(0) = y'(0) = 1$ .

7. Hallar las constantes  $a$  y  $b$  reales para que  $y(x) = e^{2x} \cos x$  sea solución de la ecuación diferencial  $y'' + ay' + by = 0$ . Hallar la solución de la ecuación con datos iniciales  $y(0) = y'(0) = 1$ .

8. Hallar la solución de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales, con las condiciones iniciales dadas:

a)  $y'' + 2y' + 2y = \cos(2x)$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ .

b)  $y'' + 2y' + 2y = \sin(2x)$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ .

c)  $y'' + 2y' + 2y = \cos(2x) + \sin(2x)$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ .

- d)  $y'' + y = 3x^2 - 5x$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ .  
 e)  $y'' + 4y' + 3y = 3e^x + x$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ .  
 f)  $y'' + y = (1 + x)^2$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ .  
 g)  $y'' + 2y' + y = x$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$   
 h)  $y'' + y = \cos(x)$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$

## Ejercicios propuestos en evaluaciones anteriores

1. (**Primer parcial segundo semestre 2023**) Sea  $y(x)$  la solución a la ecuación diferencial

$$y''(x) - y'(x) - 2y(x) = -2x^2 + 3$$

que cumple  $y(0) = 0, y'(0) = 2$ . Entonces:

- (A)  $y(1) = e^2 - e^{-1}$   
 (B)  $y(1) = \frac{e^2 + e^{-1}}{2}$   
 (C)  $y(1) = e^{-1} - e^2 + 1$   
 (D)  $y(1) = \frac{e^2 - e^{-1}}{e^2 + e^{-1}}$   
 (E)  $y(1) = e^2 - 1$
2. (**Examen febrero 2023**) Consideremos la siguiente ecuación diferencial (E) dependiendo de una función  $r(x)$ :

$$y'' + 4y' + 4y = r(x)$$

y las siguientes afirmaciones:

- (I) Si  $e^{-2x} + x^2$  es solución de (E) entonces  $r(x) = 4x^2 + 8x + 2$ .  
 (II) Si  $r(x) = x^2$  entonces  $y(x) = e^{-2x} + 3xe^{-2x} + x^2$  es la única solución de (E) que verifica que  $y(0) = y'(0) = 1$ .  
 (III) Si  $r(x) = 0$  entonces todas las soluciones son de la forma  $y(x) = ae^{-2x} + be^{-2x}x$  con  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Entonces:

- (A) Todas las afirmaciones son verdaderas.  
 (B) Solamente (III) es verdadera.  
 (C) Solamente (I) es verdadera.  
 (D) Solamente (I) y (III) son verdaderas.
3. (**Primer parcial segundo semestre 2022**) Sea  $y(x)$  la solución a la ecuación diferencial

$$\frac{y'(x)e^{x^2}}{x} = -2(1 + y^2(x))$$

que cumple  $y(0) = 0$ . Entonces:

- (A)  $y(\sqrt{2}) = -e$   
 (B)  $y(\sqrt{2}) = \tan(1 + e^2)$   
 (C)  $y(\sqrt{2}) = \tan(1)$   
 (D)  $y(\sqrt{2}) = 1$

(E)  $y(\sqrt{2}) = \tan(e^{-2} - 1)$

4. (**Examen julio 2021**) Se considera la ecuación diferencial:

$$y'' + \alpha y' + \beta y = 2e^{3x}$$

donde  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Sabemos que

$$y(x) = x^2 e^{3x}$$

es solución de la ecuación. Entonces  $\alpha + \beta$  vale:

- (A) 3  
 (B) 0  
 (C) 1  
 (D) 2  
 (E) 4
5. (**Primer parcial segundo semestre 2018**) Consideramos la siguiente ecuación diferencial con condición inicial:

$$\begin{cases} y' &= \frac{(y-2)^2}{(x+1)^2} \\ y(0) &= \frac{5}{2} \end{cases}$$

Entonces  $y(1)$  vale:

- (A) 4  
 (B)  $\frac{9}{2}$   
 (C) 2  
 (D)  $\frac{8}{3}$

## Aplicaciones y Problemas Complementarios

- Se considera la ecuación  $mv' = mg - kv$  que representa la velocidad  $v(t)$  de caída de un cuerpo de masa  $m$ , donde  $g$  es la gravedad y  $k < mg$  una constante de resistencia al aire.
  - Hallar  $v(t)$  suponiendo conocida la velocidad inicial  $v_0$ .
  - Hallar el límite de  $v(t)$  cuando  $t$  tiende a  $+\infty$ , que se llamará  $v_\infty$ .
  - Calcule cuanto tiempo demora el cuerpo en alcanzar la velocidad  $(v_\infty + v_0)/2$ .
  - Suponga  $v_0 = 0$  y calcule cual es la distancia recorrida por el cuerpo cuando su velocidad es  $v_\infty/2$ .
- Se considera la ecuación diferencial  $x' = \alpha x(A - x)$  que representa la evolución de una población.
  - Demostrar que ninguna solución tiene extremos relativos.
  - Averiguar el límite cuando  $t$  tiende a  $+\infty$  de la solución de la ecuación con condición inicial  $x(0) = A/2$ .
  - Determinar cuanto tiempo hay que esperar para que una población de  $A/2$  pobladores se incremente en un cincuenta por ciento.
- La ecuación  $u' = -2\lambda tu^2$  representa la cantidad  $u(t)$  de agua en una represa, donde  $\lambda$  es una constante positiva a determinar con la apertura de los diques.
  - Hallar la solución de condición inicial  $u(0) = u_0$ , suponiendo  $u_0 > 0$ .
  - Hallar el límite de esa solución cuando  $t$  tiende a  $+\infty$ .

- c) Sea  $u_1 < u_0$ . Determinar (en función de  $u_0$  y  $u_1$ ) cuanto tiene que valer  $\lambda$  para que la cantidad de agua en la represa en el instante  $T$  sea igual a  $u_1$ , es decir  $u(T) = u_1$ .
- d) Concretamos las magnitudes: el tiempo se mide en días,  $u$  se mide en millones de hectolitros. Hallar  $\lambda$  de la parte anterior suponiendo que  $u_0 = 2$  millones de hectolitros,  $u_1 = 1,5$  y que  $T = 5$  días. Respuesta:  $1/150$

4. Para cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$(I) \ y'' - 3y' + 2y = 0 \quad (II) \ y'' + 4y' + 4y = 0 \quad ; \quad (III) \ 2y'' + 2y' + y = 0$$

a) Encontrar las soluciones  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  para las que se cumple los siguientes datos iniciales:

$$\begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_1'(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y_2(0) = 0 \\ y_2'(0) = 1 \end{cases}$$

y demostrar que  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  son linealmente independientes en el espacio vectorial de todas las funciones  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ .

- b) Dadas las constantes  $a$  y  $b$  reales, hallar la solución  $y(x)$  tal que  $\begin{cases} y(0) = a \\ y'(0) = b \end{cases}$  y probar que se cumple  $y(x) = ay_1(x) + by_2(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .
- c) Deducir que las funciones  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  forman una base del espacio vectorial de todas las soluciones de la ecuación diferencial, y concluir que ese espacio tiene dimensión dos.