Práctico 1 – Números complejos.

1. Determinar los valores de i^k para todo k entero.

2. Expresar los siguientes números complejos en forma binómica ($a+bi$ con a, b reales) y en notación polar ($re^{i\theta}$ con $r > 0$ y θ real).

   a) $(1+i)^2$
   b) $\dfrac{1}{i}$
   c) $\dfrac{1}{1+i}$
   d) $(2+3i)(3-4i)$
   e) $(1+i)(1-2i)$
   f) $i^5 + i^{16}$
   g) -1
   h) $-3i$
   i) $1 + i + i^2 + i^3$
   j) $\dfrac{1}{2}(1+i)(1-i^{-8})$
   k) $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$
   l) $\dfrac{1}{(1+i)^2}$

3. Expresar en notación binómica:

   a) $e^{i\frac{\pi}{2}}$
   b) $3e^{\pi i}$
   c) $\dfrac{1 - e^{\frac{\pi}{2}i}}{1 + e^{\frac{\pi}{2}i}}$
   d) $(i+1)^{100}$

4. Probar que para todo par de números complejos z_1 y z_2 se cumple:

   a) $\mid z_1 \mid = \mid \bar{z_1} \mid$
   b) $\mid z_1 z_2 \mid = \mid z_1 \mid \mid z_2 \mid$
   c) $\mid z_1 + z_2 \mid \leq \mid z_1 \mid + \mid z_2 \mid$
   d) si $z_1 \neq 0$ $\quad \left|\dfrac{1}{z_1}\right| = \dfrac{1}{|z_1|}$

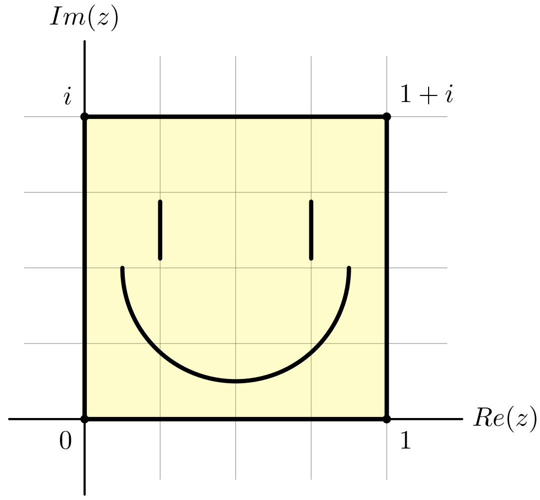
5. Representar geométricamente los complejos:

   a) $(1+i)^n - (1-i)^n$ para algunos valores naturales n.
   b) Las raíces quintas de 1 (es decir, los complejos z tales que $z^5 = 1$).
   c) Las raíces décimas de 1.
   d) Los complejos z tales que $z^6 = 8(\sqrt{3} - i)$.

6. Encontrar, en cada caso, el conjunto de los $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen las siguientes condiciones, y representar geométricamente.

   a) $|z| > 1$
   b) $z - \overline{z} = i$
   c) $|z - i| = |z + i|$
   d) $\text{Im}(z) < 2$
   e) $|z - \bar{z}| = 2\,\text{Re}(z - 1)$

7. Bosquejar el resultado de aplicarle a la figura las siguientes funciones:



a) $f(z) = z + (1+i)$.
b) $f(z) = (1+i)z$.
c) $f(z) = z^2$.
d) $f(z) = e^z$.

8. En $\mathbb{C}$, se consideran $\{z_1, \cdots, z_8\}$ las raíces octavas de 2^8, es decir aquellas que cumplen $z_k^8 = 2^8$ para cada $k = 1, \cdots, 8$. Determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas:

   a) $z_i = 2$ para todo $i = 1, \cdots, 8$.
   b) Existen al menos dos raíces z_j, z_k tales que $z_j = -z_k$.
   c) Existen al menos dos raíces z_l, z_m tales que $\bar{z}_l = z_m$.
   d) Se cumple $z_1 z_2 z_3 z_4 z_5 z_6 z_7 z_8 = 2^8$.

9. Sea $A = \left\{ \left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + i\text{sen }\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)^n \ / \ n \in \mathbb{N} \right\}$. ¿Cuántos elementos tiene este conjunto de números complejos?

10. Sea $P(z)$ un polinomio *con coeficientes reales.*

    a) Probar que $P(\overline{z}) = \overline{P(z)}$ para todo $z \in \mathbb{C}$.
    b) Probar que si $z_0 = a + ib$ es raíz de $P(z)$, entonces $\overline{z_0} = a - ib$ también es raíz de $P(z)$.

11. Considere el polinomio $P(z) = z^4 - 2z^3 + 6z^2 - 8z + 8$. Sabiendo que $P(z)$ tiene una raíz imaginaria pura halle todas sus raíces.

12. Se considera el polinomio complejo $P(z) = z^3 - 2z^2 + \frac{3}{2}z - \frac{1}{2}$, y las siguientes afirmaciones:

    (I) Existen dos raíces tales que su suma es igual a la raíz restante.
    (II) La distancia entre dos raíces distintas siempre es constante.
    (III) El producto de todas las raíces es igual al inverso de la suma de todas sus raíces.

    Entonces:

    A) Solo las afirmaciones (I) y (III) son correctas.
    B) Todas las afirmaciones son correctas.
    C) Solo las afirmaciones (II) y (III) son correctas.
    D) Ninguna afirmación es correcta.
    E) Solo la afirmación (I) es correcta.

Ejercicios propuestos en evaluaciones anteriores

1. (***Primer parcial segundo semestre 2023***) Considere las soluciones de la siguiente ecuación en los números complejos:
$$z^3 = 4\bar{z}$$
Entonces:
(A) La ecuación tiene 5 soluciones, una sola de ellas con parte imaginaria nula.
(B) La ecuación tiene 4 soluciones, y el producto de ellas es i.
(C) La ecuación tiene 5 soluciones, tres de ellas con parte imaginaria nula.
(D) La ecuación tiene 3 soluciones, una real pura y dos complejas conjugadas.
(E) La ecuación tiene 3 soluciones, la suma de ellas da cero.

2. (***Examen diciembre 2022***) Sea $A \subset \mathbb{C}$ el conjunto de los números $z \in \mathbb{C}$ que verifican:
$$\begin{cases} z^4 = 1 - i\sqrt{3} \\ z + \bar{z} > 0 \end{cases}$$
Solo una de las siguientes afirmaciones sobre el conjunto A es correcta. Indique cuál:
(A) A es simétrico respecto al eje real.
(B) A es simétrico respecto al eje imaginario.
(C) A tiene exactamente dos elementos distintos.
(D) A tiene exactamente cuatro elementos distintos.
(E) Todos los elementos de A están en la circunferencia de centro 0 y radio 1.

3. (***Primer parcial segundo semestre 2021***) Consideremos los números complejos que satisfacen las tres condiciones siguientes:
$$\begin{cases} z\bar{z} & = & 4 \\ \mathrm{Re}(z)^4 & = & 1 \\ |e^z| & > & 1 \end{cases}$$
Entonces el producto de dichos números da:
a) 0
b) 16
c) $2 + 2i$
d) $4i$
e) 4

4. (***Examen julio 2021***) Sea
$$z = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{2021}$$
Hallar $\mathrm{Re}(z)$ y $\mathrm{Im}(z)$.

5. (***Primer parcial segundo semestre 2019***) Se considera la ecuación $e^z = e^{2z}$. Hallar el conjunto solución en $\mathbb{C}$.

Ejercicios Complementarios

1. Probar que la fórmula de Bhaskara es válida para polinomios complejos.

2. Probar que no existe una relación de orden total $<$ en $\mathbb{C}$ que cumpla los siguientes axiomas de orden

   - Para todo $z \in \mathbb{C} \setminus 0$ se tiene que $z > 0$ o $-z > 0$, pero no ambos.
   - Si $z_1 > 0$ y $z_2 > 0$ entonces $z_1 + z_2 > 0$ y $z_1 z_2 > 0$.

   Sugerencia: utilizar que $i^2 = -1$.

3. Sabemos que para todo $z \in \mathbb{C}\ \ \exists \omega \in \mathbb{C}$ tal que $\omega^2 = z$. Discuta sobre posibles definiciones de una función raíz cuadrada, esto es f que cumpla que $f(z)^2 = z$. ¿Cuáles problemas identifica en f?

4. Se define el *seno y coseno complejos* mediante

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \operatorname{sen}(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

   a) Probar que las funciones seno y coseno complejas extienden a las funciones seno y coseno reales, en el sentido de que coinciden para $z \in \mathbb{R}$.

   b) Probar que $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

   c) Probar que $\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z$ y $\cos(-z) = \cos z$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

   d) Hallar los ceros en el plano complejo de las funciones seno y coseno.