Clase 28:

Diferenciabilidad

CDIVV - 2023 - 2sem

Eugenie Ellis

eellis@fing.edu.uy

Ejemplo:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^6+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1) Investigar si existen las derivadas parciales en (0,0)

2) Investigar si existen las derivadas direccionales en (0,0)

3) Investigar continuidad de f en (0,0).

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} =$$

$$f(h,0) = \frac{h^3 \cdot 0}{h^6+0^2} = 0 \qquad = 0$$

$$f(0,0) = 0 \qquad \boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h}$$

$$f(0,h) = \frac{0^3 \cdot h}{0^6 + h^2} = 0 \qquad = 0$$

$$f(0,0) = 0 \qquad \boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0}$$

$$v = (v_1, v_2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(hv_1, hv_2) - \overbrace{f(0,0)}^{=0}}{h}$$

$$f(\underbrace{hv_1}_{x}, \underbrace{hv_2}_{y}) = \frac{(hv_1)^3 \cdot hv_2}{(hv_1)^6 + (hv_2)^2}$$

$$= \frac{h^{\cancel{4}\,2} v_1^3 \cdot v_2}{\underbrace{h^6 v_1^6 + h^2 v_2^2}_{\cancel{h^2}(h^4 v_1^6 + v_2^2)}} = \frac{h^2 v_1^3 \cdot v_2}{h^4 v_1^6 + v_2^2}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^6 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Ya calculamos $\frac{\partial f}{\partial x}$ entonces podemos suponer que $v_2 \neq 0$

$$f(hv_1, hv_2) = \frac{h^2 v_1^3 v_2}{h^4 v_1^6 + v_2^2}.$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(hv_1, hv_2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^{\cancel{2}} v_1^3 v_2}{\cancel{h}(h^4 v_1^6 + v_2^2)}$$

$$= \lim_{h\to 0} h \, \frac{v_1^3 v_2}{h^4 v_1^6 + v_2^2}$$

tiende a 0.

está acotado por tener límite

cuando $h \to 0$ tiende a

$$\frac{v_1^3 v_2}{v_2^2} = \frac{v_1^3}{v_2}$$

ejercicio

$= 0$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

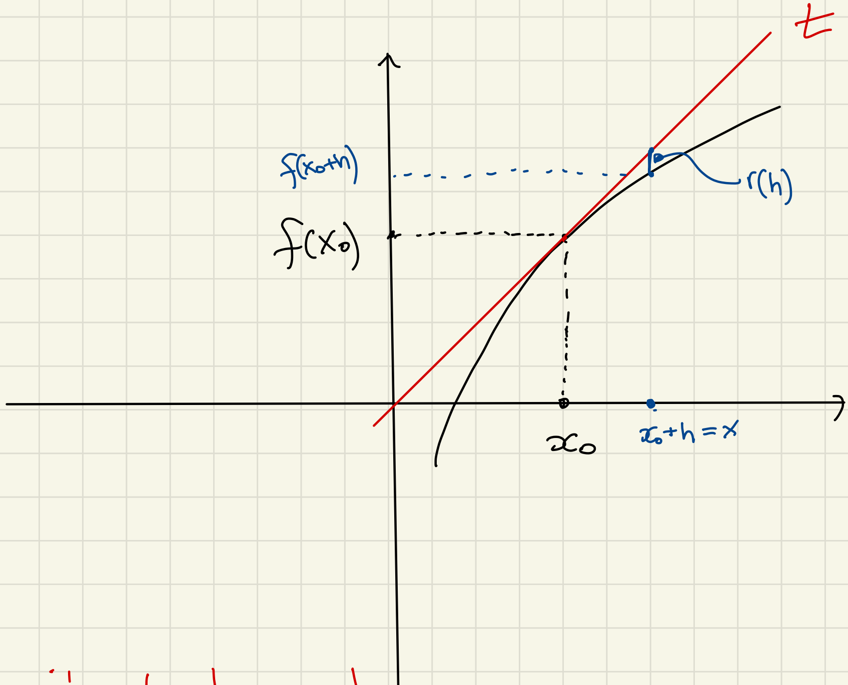
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^3}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=x^3}} \frac{x^3 \cdot x^3}{x^6+x^6} = \lim_{x\to 0} \frac{x^6}{2x^6} = \frac{1}{2}$$

Sobre esta dirección el límite direccional es $\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ concluimos que $\nexists$ límite.

$$\lim_{\substack{y=0\\ x\to 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{y=0\\ x\to 0}} \frac{x^3 \cdot 0}{x^6+0^2} = \lim \frac{0}{x^6} = 0$$

Diferenciabilidad

Recordemos la definición de derivada en una variable $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



Ecuación de la recta:

$$y = m x + p$$

$$\boxed{m = f'(x_0)}$$

$$f(x_0) = f'(x_0)\, x_0 + p$$

$$\boxed{p = f(x_0) - f'(x_0)\, x_0}$$

$$y = f'(x_0)\,x + f(x_0) - f'(x_0)\,x_0$$

$$t: \boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)} .$$

Si f es derivable en x_0 podemos escribir a la función f

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r(h)$$

$x = x_0 + h$

en donde $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + r(h)$$

con. $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$

Def: $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}^n$

$D \subseteq \mathbb{R}^n$

f es diferenciable en x_0

$\Longleftrightarrow$

Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + T(h) + r(h)$$

en donde

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$$

Si $\boxed{n=2}$

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en (x_0, y_0)

$\Longleftrightarrow$

Existe una transformación lineal

$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad T(x,y) = Ax + By$
$A, B \in \mathbb{R}$

tal que:

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + Ah + Bk + r(h,k)$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{r(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$$