Clase 25:

Teorema de Weierstrass.

CDIVV - 2023 - 2sem

Eugenia Ellis

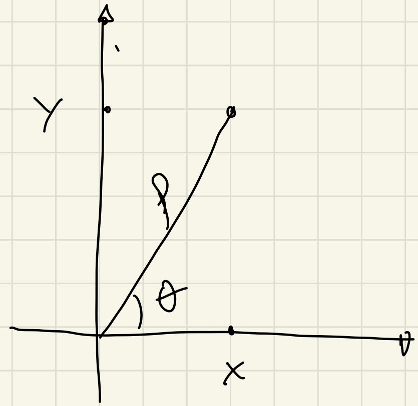
eellis@fing.edu.uy

Ejercicios: Estudiar existencia de

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$$



- $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$$

Hacemos c.v a coordenadas polares

$x = \rho \cos\theta$

$y = \rho \operatorname{sen}\theta$

$(x,y) \longrightarrow (0,0).$

$\Longleftrightarrow$

$\rho \to 0 \quad \theta \in [0, 2\pi)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{\rho\to 0\\ \theta\in[0,2\pi)}} \frac{\cancel{\rho^2}\cos^2\theta}{\underbrace{\rho^2\cos^2\theta+\rho^2 \operatorname{sen}^2\theta}_{\cancel{\rho^2}}}$$

$$= \lim_{\substack{\rho\to 0\\ \theta\in[0,2\pi)}} \cos^2\theta \qquad \boxed{\nexists}$$

depende de θ

Limites direccionales

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{x^2}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} \frac{x^2}{x^2+m^2x^2}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}\frac{1}{1+m^2} = \frac{1}{1+m^2}$$

Los limites direccionales por las rectas $y = mx$ son distintos

$\Longrightarrow \nexists \lim$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\boxed{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1}$$

Coordenadas polares

$$\lim_{\substack{\rho\to 0\\ \theta\in[0,2\pi)}} \frac{\rho\cos\theta\,\rho\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\operatorname{sen}^2\theta}} =$$

$$\lim_{\substack{\rho\to 0\\ \theta\in[0,2\pi)}} \frac{\rho^{\cancel{2}}\cos\theta\operatorname{sen}\theta}{\cancel{\sqrt{\rho^2}}} =$$

$$\lim_{\substack{\rho\to 0\\ \theta\in[0,2\pi)}} \underbrace{\rho}_{\rho\to 0}\cdot\underbrace{\cos\theta\operatorname{sen}\theta}_{\text{esta ácotado.}} = 0$$

Proposición: $f, g : \underset{\underset{\mathbb{R}^n}{\cap}}{D} \longrightarrow \mathbb{R}$

f y g son funciones continuas en a

$\Rightarrow$ 1) $f+g$ es continua en a

2) $f \cdot g$ es continua en a

3) Si $g(a) \neq 0 \Rightarrow f/g$ es continua en a.

Dem:

1) Para probar que $f+g$ es continua en a usamos el teorema probado en la clase pasada

$$\boxed{\begin{array}{l} \textbf{Teorema:} \quad D \subseteq \mathbb{R}^n \quad f : D \to \mathbb{R} \quad a \in D \\ f \text{ es continua en } a \iff \left[\begin{array}{l} \forall \text{ sucesión } \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq D \\ \lim\limits_{k \to +\infty} x_k = a \Rightarrow \lim\limits_{k \to +\infty} f(x_k) = f(a) \end{array} \right] \end{array}}$$

Sea $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq D$ una sucesión tal que

$$\lim_{k \to +\infty} x_k = a$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{k\to+\infty} f(x_k) = f(a)$$

f es continua en a

$$\Rightarrow \quad \lim_{k\to+\infty} g(x_k) = g(a)$$

g es continua en a.

$\Rightarrow$ suma de límites

$$\lim_{k\to+\infty} \overbrace{f(x_k)+g(x_k)}^{(f+g)(x_k)} = \underbrace{f(a)+g(a)}_{(f+g)(a)}$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to+\infty} (f+g)(x_k) = (f+g)(a)$$

$\Rightarrow$ $f+g$ es continua en a.

por el Teorema

Ejercicio probar 2) y 3).

Teorema de Weierstrass.

Caso funciones en una variable.

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

intervalo cerrado y acotado

f es una función continua

$\Rightarrow$ Existen $m \in \mathbb{R}$ y $M \in \mathbb{R}$ tal que

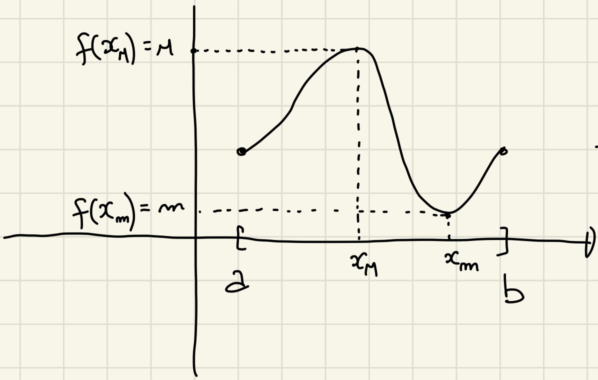
$m \leq f(x) \leq M$

y $m = f(x_m)$

$M = f(x_M)$.

para algun $x_m \in [a,b]$

y $x_M \in [a,b]$

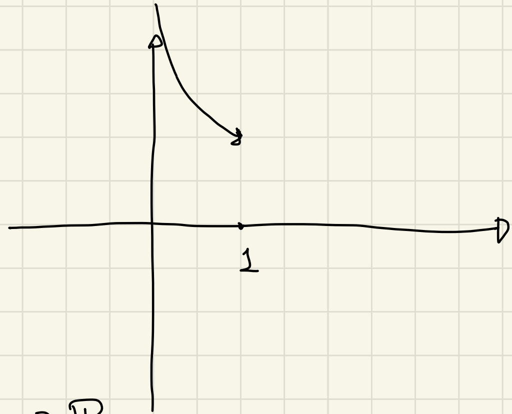


$f: \cancel{[a,b]} \longrightarrow \mathbb{R}$

↑

intervalo ~~cerrado~~ y acotado

f es una función continua



$$f:(0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x)=\frac{1}{x}$$

$f: \cancel{[a,b]} \longrightarrow \mathbb{R}$

↑

intervalo cerrado y ~~acotado~~

f es una función continua

$$f:[0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x)=x$$

es continua y

no tiene máximo

$$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x)=e^x$$

no tiene máximo

ni mínimo.

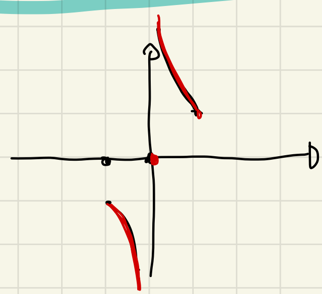
$f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

↑

intervalo cerrado y acotado

f es una ~~función continua~~

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & x\neq 0 \quad x\in[-1,1] \\ 0 & x=0 \end{cases}$$



Teorema de Weierstrass

$C \subseteq \mathbb{R}^n$ conjunto compacto (cerrado y acotado)

$f: C \longrightarrow \mathbb{R}$ continua

$\Rightarrow \exists \; x_m$ y $x_M \in C$ tales que.

$$m = f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) = M$$

$\forall x \in C$.

Dem:

Probemos que f está acotada superiormente, razonando por absurdo.

Supongamos que f no está acotada superiormente ⊛ Abs

f está acotada superiormente sii $\exists M \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq M \;\; \forall x \in C$

f no está acotada superiormente sii
$\nexists M \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq M \quad \forall x \in C$

f no está acotada superiormente sii
$\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists \; x_k \in C$ tq $f(x_k) > k$

Como f no está acotada superiormente podemos construir una sucesión $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq C$ tales que $f(x_k) > k$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{k \to +\infty} f(x_k) = +\infty} \quad \text{(por construcción)}$$

Como $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq C$
C es compacto
$\Rightarrow \exists$ una subsucesión $(x_{k_i})_{i \in \mathbb{N}} \subseteq C$ convergente a $x \in C$

$$\left.\begin{array}{l} \{x_{k_i}\} \subseteq C \qquad \lim\limits_{i \to +\infty} x_{k_i} = x \\ f \text{ es continua} \end{array}\right\} \underset{\text{teorema}}{\Longrightarrow}$$

Absurdo.

$$\circledast \quad \boxed{\lim_{i \to +\infty} f(x_{k_i}) = f(x)}$$

$\Rightarrow$ f está acotada superiormente.