Clase 23:

Continuidad

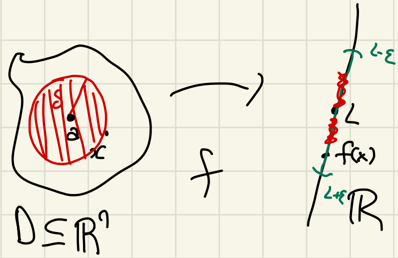
CDIVV - 2023 - 2sem

Eugenia Ellis

eellis@fing.edu.uy

Límite de una función

- $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$



- $a \in \mathbb{R}^n$ punto de acumulación de D

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

$$\Longleftrightarrow$$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ tal que

$\forall \, x \in B^*(a, \delta) \cap D$ se cumple

que $|f(x) - L| < \varepsilon \qquad \big(f(x) \in B(L, \varepsilon)\big)$

Def: continuidad en a

$$f : \underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\cap}{D}} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad a \in D$$

f es continua en a $\iff$ $\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0$ tq $\forall x \in B(a,\delta) \cap D$
$\Rightarrow f(x) \in B(f(a), \varepsilon)$
$\left(|f(x) - f(a)| < \varepsilon \right)$

$a \in D$

Obs: Si a es un punto aislado,
existe $\delta > 0$ tq $B^*(a,\delta) \cap D = \emptyset$
$\forall \varepsilon > 0$, tomamos este $\delta > 0$ y
tenemos $B(a,\delta) \cap D = \{a\}$

$$\forall x \in B(a,\delta) \cap D \Rightarrow \underset{f(a)}{\underset{\shortparallel}{f(x)}} \in B(f(a), \varepsilon)$$

(con $\{a\} \ni x$)

$\Rightarrow$ f es continua en a

Si a es un punto de acumulación

f es continua en a $\Longleftrightarrow$ • $\exists \lim_{x \to a} f(x)$

• $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

$$f : \underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\cap}{D}} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad a \in D$$

f no es continua en a $\Longleftrightarrow$ $\exists \varepsilon > 0,\ \forall \delta > 0$ tq $\forall x \in B(a,\delta) \cap D$

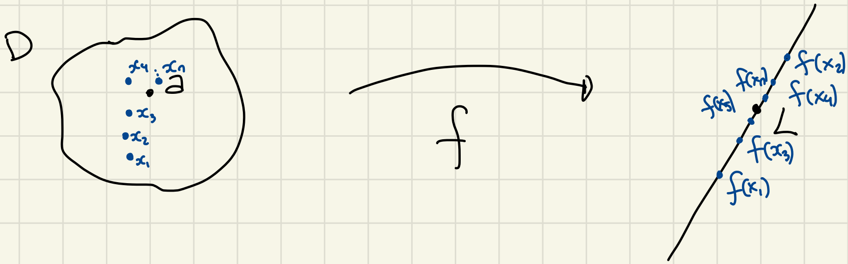
$\Rightarrow f(x) \notin B(f(a), \varepsilon)$

$\left(|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon \right)$

Teorema: $D \subseteq \mathbb{R}^n$ $\quad f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad a \in \mathbb{R}^n$ punto de acumulación de D

$\lim_{x \to a} f(x) = L \Longleftrightarrow \forall$ sucesión $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq D \setminus \{a\}$

tal que $\lim_{k \to +\infty} x_k = a \Rightarrow \lim_{k \to +\infty} f(x_k) = L$



Teorema: $D \subseteq \mathbb{R}^n$ $\quad f: D \to \mathbb{R}$ $\quad a \in D$

f es continua en a $\Leftrightarrow$ $\left[\forall \text{ sucesión } \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq D \quad \lim_{k \to +\infty} x_k = a \Rightarrow \lim_{k \to +\infty} f(x_k) = f(a) \right]$ ⊛

Dem: ($\Rightarrow$)

f es continua en a $\overset{\times \text{def}}{\Rightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tq si $x \in B(a, \delta) \cap D \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

Sea $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq D$ tal que $\lim_{k \to +\infty} x_k = a$ $\quad \overset{\times \text{def}}{\Rightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \ k_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq k_0 \Rightarrow \|x_k - a\| < \varepsilon$

$x_k \in B(a, \varepsilon)$

Queremos probar.

$\lim_{k \to +\infty} f(x_k) = f(a) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \ k_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq k_0 \Rightarrow |f(x_k) - f(a)| < \varepsilon$

$\forall k \geq k_0$

Como f es continua en a $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tq si $x \in B(a, \delta) \cap D \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

Tomando $\varepsilon = \delta$ en la definición de $\lim_{k \to +\infty} x_k = a$ tenemos que $\exists\ k_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq k_0 \Rightarrow \| x_k - a \| < \delta$

$\Rightarrow x_k \in B(a, \delta) \cap D. \Rightarrow |f(x_k) - f(a)| < \varepsilon$ $\forall k \geq k_0$.

($\Leftarrow$) f no es continua en a

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0, \forall k \in \mathbb{N}$ $\delta = \frac{1}{k}$. $\exists$ sea $x_k \in B(a, 1/k) \cap D$

$\Rightarrow f(x_k) \notin B(f(a), \varepsilon)$

$\left(|f(x_k) - f(a)| \geq \varepsilon \right)$

De esta manera construimos una sucesión $\{x_k\} \subseteq D$ tq $\lim_{k \to +\infty} x_k = a$

pero $|f(x_k) - f(a)| \geq \varepsilon$ $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \lim_{k\to+\infty} f(x_k) \neq f(a)$$

No se cumple la condición

$(*)$

Ejemplo:

$$f(x,y) = x^3 y^2 e^{x-y}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$

$$(x_k, y_k) \to (0,0) \iff x_k \longrightarrow 0$$

$$y_k \longrightarrow 0.$$

$$f(x_k,y_k) = \underbrace{x_k^3}_{\to 0}\,\underbrace{y_k^2}_{\to 0}\,\underbrace{e^{\overbrace{x_k-y_k}^{\to 0}}}_{\to 1} \longrightarrow 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

Ejercicio:

$$f_i : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

- $$f_1(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

- $$f_2(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$$

- $$f_3(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_i(x,y) \overset{?}{=}$$